数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 74-84

定常軸対称 Einstein 方程式と広田の方法

東大工　　佐々　成正　(Narimasa Sasa)†

§1. はじめに

ソリトン方程式の解を求める方法として発見され, 今日まで発展してきたものに, 逆散乱法, Bäcklund 変換, 広田の方法などがある. 特に広田の方法は, N ソリトン解を得るためには一番強力な方法で, KP hierarchy に含まれる方程式すべてに適用可能であり, その上多くの可積分な非線形差分方程式にも適用可能である. しかし, KP hierarchy に含まれない高次元非線形可積分系, 例えば自己双対 Yang-Mills 方程式などについては, 不思議なことではあるが, これまで広田の方法を用いて解析された例がほとんどなかった. 従って, 広田の方法を使って高次元非線形可積分系の解析を行えば, 何か新しい知見が得られるのではないか, というのが我々の研究の動機である.

そこで本論説では, 定常軸対称 Einstein 方程式に広田の方法を適用し, 行列式を用いて表される解を構成する方法について解説する. 定常軸対称 Einstein 方程式は, 自己双対 Yang-Mills 方程式の独立変数にある制限を置いて得られる方程式で, 高次元系ではないが KP hierarchy には含まれていない方程式なので, 上記の主旨に沿った適当な研究対象であると考えられる. 本論説の主要な結果をここにまとめておくと,

1. 定常軸対称 Einstein 方程式の新しい解の系列
2. Neugebauer の Soliton 解に対する 2 つの異なった行列式表現
3. Tomimatsu-Sato 解や Soliton 解が満たす bilinear form

が得られている. 研究会で発表した内容の一部は, 文献 [1] にまとまっているので, そちらも参考にして下さい.

§2. 定常軸対称 Einstein 方程式

まず時空の計量が定常軸対称, すなわち次の形

$$ds^2 = \tilde{f}^{-1}[e^{2\gamma}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\phi^2] - \tilde{f}(dt - \omega d\phi)^2, \tag{1}$$

† e-mail address: sasa@mmm.t.u-tokyo.ac.jp

を持つと仮定する [2]. ここで, $\tilde{f}, \omega, \gamma$ は ρ と z のみに依存する関数である. この時空の曲率テンソルが 0 という条件から, 真空中の Einstein 方程式が導出される. いま, $\tilde{f}$ と ω に対する方程式に注目すれば

$$\tilde{f}(\tilde{f}_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}\tilde{f}_{\rho}+\tilde{f}_{zz})-\tilde{f}_{\rho}^{2}-\tilde{f}_{z}^{2}+(\tilde{f}^{2}\omega_{\rho}/\rho)^{2}+(\tilde{f}^{2}\omega_{z}/\rho)^{2}=0, \tag{2a}$$

$$(\tilde{f}^{2}\omega_{\rho}/\rho)_{\rho}+(\tilde{f}^{2}\omega_{z}/\rho)_{z}=0, \tag{2b}$$

が得られる. 方程式 (2) は 2×2 行列 G;

$$G=\begin{pmatrix}\tilde{f} & \tilde{f}\omega\\ \tilde{f}\omega & -\tilde{f}\omega^{2}+\rho^{2}/\tilde{f}\end{pmatrix}, \qquad (\det G=-\rho^{2}) \tag{3}$$

を用いて

$$(\rho G_{\rho}G^{-1})_{\rho}+(\rho G_{z}G^{-1})_{z}=0, \tag{4}$$

とも書くことができる.

さらに方程式の解析を容易にするため, 方程式 (2) に対して次の式で定義される twist potential ψ;

$$\psi_{\rho}=\tilde{f}^{2}\omega_{z}/\rho, \quad \psi_{z}=-\tilde{f}^{2}\omega_{\rho}/\rho, \tag{5}$$

を導入する. 方程式 (2) からωを消去すると, $\tilde{f}$とψに対する方程式

$$\tilde{f}(\tilde{f}_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}\tilde{f}_{\rho}+\tilde{f}_{zz})-\tilde{f}_{\rho}^{2}-\tilde{f}_{z}^{2}+\psi_{\rho}^{2}+\psi_{z}^{2}=0, \tag{6a}$$

$$\tilde{f}(\psi_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}\psi_{\rho}+\psi_{zz})-2\tilde{f}_{\rho}\psi_{\rho}-2\tilde{f}_{z}\psi_{z}=0, \tag{6b}$$

が得られる. 方程式 (6) に対しても 2×2 行列 P;

$$P=\frac{1}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1 & \psi\\ \psi & \tilde{f}^{2}+\psi^{2}\end{pmatrix}, \qquad (\det P=1) \tag{7}$$

を用いて

$$(\rho P_{\rho}P^{-1})_{\rho}+(\rho P_{z}P^{-1})_{z}=0, \tag{8}$$

と書き直すことができる. 本論説では方程式 (6) を定常軸対称 Einstein 方程式と呼ぶことにし, この方程式についての解析を行うことにする.

まず方程式 (6) について知られていることをまとめておく. Nakamura[3] は Bäcklund 変換を用いて, 方程式 (6) に行列式で表される 2 つの解の系列があることを示した. それは

$$\tilde{f}=\frac{\rho^{n-1}A^{(n)}}{A^{(n-1)}}, \quad \psi=\frac{i\rho^{n-1}\tilde{A}^{(n+1)}}{A^{(n-1)}}, \qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{9}$$

と

$$\tilde{f} = \frac{A^{(n-1)}}{\rho^{n-2}A^{(n)}}, \quad \psi = \frac{i\tilde{A}^{(n)}}{\rho^{n-2}A^{(n)}}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{10}$$

で与えられる．ここで $A^{(n)}$ と $\tilde{A}^{(n)}$ はそれぞれ, $n \times n$ 行列式と $(n-1) \times (n-1)$ 行列式でありその具体形は

$$A^{(n)} = \begin{vmatrix} u_0 & iu_1 & i^2u_2 & \cdots & i^{n-1}u_{n-1} \\ iu_1 & u_0 & iu_1 & \cdots & i^{n-2}u_{n-2} \\ i^2u_2 & iu_1 & u_0 & \cdots & i^{n-3}u_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i^{n-1}u_{n-1} & i^{n-2}u_{n-2} & i^{n-3}u_{n-3} & \cdots & u_0 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$\tilde{A}^{(n)} = \begin{vmatrix} iu_1 & u_0 & iu_1 & \cdots & i^{n-3}u_{n-3} \\ i^2u_2 & iu_1 & u_0 & \cdots & i^{n-4}u_{n-4} \\ i^3u_3 & i^2u_2 & iu_1 & \cdots & i^{n-5}u_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i^{n-1}u_{n-1} & i^{n-2}u_{n-2} & i^{n-3}u_{n-3} & \cdots & iu_1 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

と与えられ, $A^{(0)} = \tilde{A}^{(1)} = 1$ であると定義する．この具体的な表示からわかるように, $\tilde{A}^{(n)}$ は $A^{(n)}$ から第 1 行と第 n 列を取り除いたものである．$A^{(n)}$ と $\tilde{A}^{(n)}$ の要素 u_m は次の漸化式を満たす関数なら何でもよい．

$$(\partial_\rho + \frac{m-1}{\rho})u_m = -\partial_z u_{m-1}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{13a}$$

$$(\partial_\rho - \frac{m}{\rho})u_{m-1} = \partial_z u_m. \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{13b}$$

ここで, 方程式 (13) から u_{m-1} を消去すると

$$(\partial_\rho^2 - \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \partial_z^2 - \frac{m^2-1}{\rho^2})u_m = 0, \tag{14}$$

となるから, 例えば, 方程式 (13) の解は Besssl 関数 $J_m(x)$ を用いて

$$u_m = \rho J_m(k\rho)\mathrm{e}^{-kz}, \tag{15}$$

と与えられる．また異なった k の値に対する (15) の線形結合も方程式 (13) の解になっているので u_m の取り方にはかなりの任意性があることがわかる．しかしこれまでのところ, u_m をどのように選んでも解 (9),(10) からは物理的な解, すなわち計量が実数値でかつ無限遠方で漸近平坦になる解は得られていない．

ここで, $A^{(n)}$と$\tilde{A}^{(n)}$がどのような bilinear form を満足するかについてまとめておく. 方程式 (6) の解の系列 (9), (10) を得るために用いられた Bäcklund 変換 [3,4] を bilinear form で書くと, 次のようになる.

$$D_\rho A^{(n-1)} \cdot \tilde{A}^{(n+1)} - iD_z A^{(n)} \cdot \tilde{A}^{(n)} = \frac{n-1}{\rho} A^{(n-1)} \tilde{A}^{(n+1)}, \tag{16}$$

$$D_\rho A^{(n)} \cdot \tilde{A}^{(n)} - iD_z A^{(n-1)} \cdot \tilde{A}^{(n+1)} = -\frac{n-2}{\rho} A^{(n)} \tilde{A}^{(n)}. \tag{17}$$

方程式 (16), (17) において$\tilde{A}^{(n)}$と$\tilde{A}^{(n+1)}$を消去すると $A^{(n)}$ と $A^{(n-1)}$に対する bilinear form,

$$[D_\rho^2 + \frac{2n-3}{\rho} D_\rho + D_z^2 + \frac{1}{\rho^2}] A^{(n)} \cdot A^{(n-1)} = 0, \tag{18}$$

が得られる. 一方, 方程式 (16), (17) において $A^{(n)}$と$\tilde{A}^{(n+1)}$を消去すると$\tilde{A}^{(n)}$と $A^{(n-1)}$に対する bilinear form,

$$[D_\rho^2 + \frac{1}{\rho} D_\rho + D_z^2 - \frac{(n-1)(n-3)}{\rho^2}] \tilde{A}^{(n)} \cdot A^{(n-1)} = 0, \tag{19}$$

が得られる.

§3. Soliton 解の新しい行列式表現

前節でも言及したように, 方程式 (6) の解 (9), (10) はかなり広いクラスの解を含んではいるが, 物理的な解を実現することができない. 物理的な解を捉えるためには, (9), (10) とは異なった解の系列を見い出すことが必要となる. そこでまず, 物理的な解がどのような構造になっているかを見るため, Neugebauer の $2N$-soliton 解の行列式表現について考察を行う. 通常, 方程式 (6) に対する Neugebauer の $2N$-soliton 解は

$$\tilde{f} = \frac{G_{2N}G_{2N}^* - F_{2N}F_{2N}^*}{(F_{2N}+G_{2N})(F_{2N}^*+G_{2N}^*)}, \tag{20a}$$

$$\psi = \frac{i(F_{2N}G_{2N}^* - F_{2N}^*G_{2N})}{(F_{2N}+G_{2N})(F_{2N}^*+G_{2N}^*)}, \tag{20b}$$

と与えられる [5]. ただし F_{2N} と G_{2N} は $2N \times 2N$行列式で

$$F_{2N} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ K_1 & K_2 & \cdots & K_{2N} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{2N} \\ K_1^2 & K_2^2 & \cdots & K_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_1^{N-2}S_1 & K_2^{N-2}S_2 & \cdots & K_{2N}^{N-2}S_{2N} \\ K_1^N & K_2^N & \cdots & K_{2N}^N \end{vmatrix}, \tag{21}$$

$$G_{2N}=\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_{2N} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ K_1S_1 & K_2S_2 & \cdots & K_{2N}S_{2N} \\ K_1 & K_2 & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_1^{N-1}S_1 & K_2^{N-1}S_2 & \cdots & K_{2N}^{N-1}S_{2N} \\ K_1^{N-1} & K_2^{N-1} & \cdots & K_{2N}^{N-1} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$$S_{\mathrm{j}}=\sqrt{\rho^2+(z-K_{\mathrm{j}})^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{\mathrm{j}}}, \qquad (\mathrm{j}=1,2,\cdots,2N) \tag{23}$$

であり, K_{j}, δ_{j} は実定数である. このように $2N$-soliton 解 (20) は (21), (22) のような行列式 F_{2N} と G_{2N} で表現されることは知られていたが, F_{2N}, G_{2N} に対してどのような bilinear form が成り立つかについては, これまでまったくわかっていなかった.

しかし我々は, 行列式 (21), (22) ではなく, これとは異なった行列式, すなわち行列式 (11), (12) を用いて $2N$-soliton 解 (20) を表現する方法を見い出した. 最初に簡単な例として 2-soliton 解について考察する. まず行列式の要素として

$$u_0=\rho/S_1^*-\rho/S_2^*, \tag{24}$$

と選んで, 漸化式 (13) から u_1, u_2, u_3 を計算する. これを $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $\tilde{A}^{(3)}$ に代入して計算すると

$$A^{(1)}/\rho=\frac{-1}{S_1^*S_2^*(K_2-K_1)}F_2G_2^*, \tag{25}$$

$$A^{(2)}=\frac{-1}{S_1^*S_2^*}(G_2G_2^*-F_2F_2^*), \tag{26}$$

$$\rho A^{(3)}=\frac{4(K_2-K_1)}{S_1^*S_2^*}F_2^*G_2, \tag{27}$$

$$\tilde{A}^{(3)}=\frac{-1}{S_1^*S_2^*}(F_2F_2^*+G_2G_2^*), \tag{28}$$

が得られる. F_2 と G_2は具体的に書くと

$$F_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ K_1 & K_2 \end{vmatrix}, \qquad G_2=\begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{29}$$

となっている.

このような関係式が一般の $A^{(n)}$, $\tilde{A}^{(n+1)}$ と F_{2N}, G_{2N} との間に成り立つことは直ちに予想できる. すなわち

$$\rho^{N_0-2N+1}A^{(2N-1)}=\frac{-1}{aS_1^*S_2^*\cdots S_{2N}^*}F_{2N}G_{2N}^*, \tag{30}$$

$$\rho^{N_0} A^{(2N)} = \frac{-1}{S_1^* S_2^* \cdots S_{2N}^*}(G_{2N}G_{2N}^* - F_{2N}F_{2N}^*), \tag{31}$$

$$\rho^{N_0+2N-1} A^{(2N+1)} = \frac{4a}{S_1^* S_2^* \cdots S_{2N}^*} F_{2N}^* G_{2N}, \tag{32}$$

$$\rho^{N_0} \tilde{A}^{(2N+1)} = \frac{-1}{S_1^* S_2^* \cdots S_{2N}^*}(F_{2N}F_{2N}^* + G_{2N}G_{2N}^*), \tag{33}$$

である. ただし $N_0 = 2N^2 - 2N$ で a は適当な定数である. $A^{(n)}$, $\tilde{A}^{(n+1)}$ の要素 u_m は

$$u_0 = b \sum_{j=1}^{2N} \frac{\rho C_j}{S_j^*}, \tag{34}$$

$$C_j = (-1)^{j+1} \prod_{\substack{1 \le l < m \le 2N \\ (l,m \ne j)}} (K_l - K_m), \tag{35}$$

と漸化式(13)から与えられる. b も適当な定数である. 我々は方程式(30)-(33)が一般のNに対して成り立つという証明は得ていないが, 4-soliton 解と 6-soliton 解の場合についてこの関係式が成り立つということを, 数式処理言語 "REDUCE3.3" を使って確かめた. 4-soliton 解の場合は定数 a, b を

$$a = 2(ih_4)^{\frac{1}{2}}, \qquad b = \frac{1}{2}(-ih_4)^{\frac{-1}{2}} \tag{36a}$$

$$h_4 = \prod_{1 \le l < m \le 4} (K_l - K_m), \tag{36b}$$

と選び, 6-soliton 解の場合は

$$a = -4(h_6)^{\frac{1}{3}}, \qquad b = \frac{1}{4}(h_6)^{\frac{-2}{3}} \tag{37a}$$

$$h_6 = \prod_{1 \le l < m \le 6} (K_l - K_m), \tag{37b}$$

と選ぶ.

§4. 新しい解の系列

前節で得た $2N$-soliton 解の新たな行列式表現(30)-(33)を詳しく考察すると, 定常軸対称 Einstein 方程式(6)には(9), (10)とは異なった新しい解の系列が存在するということがわかる. これについてもまず, 簡単な 2-soliton 解の場合から考察する. 方程式(20)において

N=1 とし (25)-(28) を代入すると

$$\tilde{f} = \frac{G_2G_2^* - F_2F_2^*}{(F_2+G_2)(F_2^*+G_2^*)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} u_0 & iu_1 \\ iu_1 & u_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} iu_1 & u_0 \\ i^2u_2 & iu_1 \end{vmatrix} - \frac{\rho}{4a}\begin{vmatrix} u_0 & iu_1 & i^2u_2 \\ iu_1 & u_0 & iu_1 \\ i^2u_2 & iu_1 & u_0 \end{vmatrix} + au_0/\rho}, \tag{38a}$$

$$\psi = \frac{i(F_2G_2^* - F_2^*G_2)}{(F_2+G_2)(F_2^*+G_2^*)},$$

$$= \frac{i\left[\frac{\rho}{4a}\begin{vmatrix} u_0 & iu_1 & i^2u_2 \\ iu_1 & u_0 & iu_1 \\ i^2u_2 & iu_1 & u_0 \end{vmatrix} + au_0/\rho\right]}{\begin{vmatrix} iu_1 & u_0 \\ i^2u_2 & iu_1 \end{vmatrix} - \frac{\rho}{4a}\begin{vmatrix} u_0 & iu_1 & i^2u_2 \\ iu_1 & u_0 & iu_1 \\ i^2u_2 & iu_1 & u_0 \end{vmatrix} + au_0/\rho}, \tag{38b}$$

が得られる. 方程式 (38) において行列式の要素 u_m の関数形は, 方程式 (24) と漸化式 (13) から完全に決定されている. しかし, 実は漸化式 (13) さえ満たせば (38) は定常軸対称 Einstein 方程式 (6) の解を与えることがわかる. これを一般の n の場合について書けば

$$\tilde{f} = \frac{A^{(n)}}{\tilde{A}^{(n+1)} - \frac{1}{4a}\rho^{n-1}A^{(n+1)} + a\rho^{1-n}A^{(n-1)}}, \tag{39a}$$

$$\psi = \frac{i[\frac{1}{4a}\rho^{n-1}A^{(n+1)} + a\rho^{1-n}A^{(n-1)}]}{\tilde{A}^{(n+1)} - \frac{1}{4a}\rho^{n-1}A^{(n+1)} + a\rho^{1-n}A^{(n-1)}}, \tag{39b}$$

となる. ただし $A^{(n)}$ と $\tilde{A}^{(n)}$ は (11), (12) で与えられる. 解 (39) が実際に方程式 (6) を満たすということは, 次のようにして確認すればよい. まず方程式 (6) に (39) を代入すると次の 3 つの bilinear form

$$[D_\rho^2 + \frac{1}{\rho}D_\rho + D_z^2](\rho^{n_0-n+1}A^{(n-1)}) \cdot (\rho^{n_0}A^{(n)}) = 0, \tag{40a}$$

$$[D_\rho^2 + \frac{1}{\rho}D_\rho + D_z^2](\rho^{n_0+n-1}A^{(n+1)}) \cdot (\rho^{n_0}A^{(n)}) = 0, \tag{40b}$$

$$[D_\rho^2 + \frac{1}{\rho}D_\rho + D_z^2](\rho^{n_0}\tilde{A}^{(n+1)}) \cdot (\rho^{n_0}A^{(n)}) = 0, \tag{40c}$$

に分けられることがわかる. ただし $n_0 = n(n-2)/2$ であり,

$$\tilde{A}^{(n+1)} + \frac{1}{4a}\rho^{n-1}A^{(n+1)} - a\rho^{1-n}A^{(n-1)}$$

$$= \frac{(A^{(n)})^2 - [\frac{1}{4a}\rho^{n-1}A^{(n+1)} + a\rho^{1-n}A^{(n-1)}]^2}{\tilde{A}^{(n+1)} - \frac{1}{4a}\rho^{n-1}A^{(n+1)} + a\rho^{1-n}A^{(n-1)}}, \tag{41}$$

なる関係式を用いた. Bilinear form (40) は, 方程式 (18), (19) から導けるので, 解 (39) が方程式 (6) を満たすということがわかる.

同じ $A^{(n)}$, $\tilde{A}^{(n)}$ は使っているが解 (39) は, (9), (10) とは全く異なった新しい解の系列を与えている. しかも u_m に特別の関数を取れば Neugebauer の $2N$-soliton 解に一致する. すなわち解 (39) は特別な場合として物理的な解を含む, 重要な解の系列であるということができる.

§5. Tomimatsu-Sato 解と Soliton 解の bilinear form

この節では, 広田の方法に関連して Tomimatsu-Sato(T-S) 解と Soliton 解が満たす bilinear form についての考察を行う. まずそのために T-S 解と Ernst 方程式についての復習を行う. 方程式 (6) に変数変換

$$\xi = \frac{1-\tilde{f}-i\psi}{1+\tilde{f}+i\psi}, \tag{42}$$

$$\rho = K(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad z = Kxy+\zeta, \quad (K \text{ と } \zeta \text{ は定数}) \tag{43}$$

を施せば

$$(\xi\xi^*-1)\nabla^2\xi - 2\xi^*(\nabla\xi\cdot\nabla\xi) = 0, \tag{44}$$

が得られる. ただし

$$\nabla^2 = \frac{1}{x^2-y^2}[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}], \tag{45a}$$

$$\nabla A\cdot\nabla B = \frac{1}{x^2-y^2}[(x^2-1)\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}], \tag{45b}$$

とする. 方程式 (44) を通常, Ernst 方程式と呼ぶ [2]. 方程式 (44) は T-S 解と呼ばれる x と y の有理式の解の系列を持つことが知られている. その系列の始めの 2 つの関数形を具体的に書くと

$$\xi = f_n/g_n, \qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{46}$$

$$f_1 = 1, \qquad g_1 = px - iqy, \tag{47}$$

$$f_2 = 2px(x^2-1) - 2iqy(1-y^2), \tag{48a}$$

$$g_2 = p^2(x^4-1) - 2ipqxy(x^2-y^2) + q^2(y^4-1), \tag{48b}$$

となる．ただし p と q は $p^2+q^2=1$ を満たす実定数である．Nakamura と Ohta[6] は Ernst 方程式に広田の方法を使うため，方程式 (44) を次の bilinear form に分けるということを提案している．

$$[(x^2-1)D_x^2+2x\partial_x+(y^2-1)D_y^2+2y\partial_y+c](g_n^*\cdot g_n+f_n^*\cdot f_n)=0, \tag{49}$$

$$[(x^2-1)D_x^2+2x\partial_x+(y^2-1)D_y^2+2y\partial_y+c]g_n^*\cdot f_n=0, \tag{50}$$

$$D_x(g_n\cdot f_n-g_n^*\cdot f_n^*)=0, \tag{51}$$

$$D_y(g_n\cdot f_n+g_n^*\cdot f_n^*)=0. \tag{52}$$

ここで $c=-2n^2$ である．我々は REDUCE3.3 を用いて，方程式 (49)-(52) 以外にも T-S 解を満足する bilinear form が数多く存在することを見い出した．（付録参照）

方程式 (44) には T-S 解以外に，“完全”Tomimatsu-Sato 解と呼ばれる解の系列も存在することが知られている．例えば，$\xi=f_2'/g_2'$ とすると [7],

$$\begin{aligned}f_2'=&2px(x^2-1)-2iqy(1-y^2)-2i(p\alpha+iq\beta)x(x^2-y^2)\\&+2i(p\beta+iq\alpha)y(x^2-y^2),\end{aligned} \tag{53a}$$

$$\begin{aligned}g_2'=&p^2(x^4-1)-2ipqxy(x^2-y^2)+q^2(y^4-1)\\&-2i\alpha(x^2+y^2-2x^2y^2)-2i\beta xy(x^2+y^2-2)+(\alpha^2-\beta^2)(x^2-y^2)^2,\end{aligned} \tag{53b}$$

で与えられる．ここで，α と β は実定数である．もし $\alpha=\beta=0$ とおけば，(53a) と (53b) はそれぞれ (48a) と (48b) に一致する．完全 T-S 解 (53) は方程式 (44) の解ではあるが，これを bilinear form (49)-(52) に代入してみると，これらを満たさないことは直ちに分かる．その他の bilinear form (A.1)-(A.11) についても，同様に満足しない．すなわち非常に不思議なことであるが，完全 T-S 解 (53) はこれまでに知られている T-S 解の bilinear form を全て満足しない．すると完全 T-S 解 (53) はどのような bilinear form を満足するのであろうか．

この問題の解答を得るためには，まず 前節で議論した $2N$-soliton 解が満足する bilinear form を見い出さなければならない．bilinear form (40) に (30)-(33) を代入すると $2N$-soliton 解が満足する bilinear form

$$[D_\rho^2+\frac{1}{\rho}D_\rho+D_z^2](F_{2N}^*G_{2N})\cdot(F_{2N}F_{2N}^*-G_{2N}G_{2N}^*)=0, \tag{54a}$$

$$[D_\rho^2+\frac{1}{\rho}D_\rho+D_z^2](F_{2N}G_{2N}^*)\cdot(F_{2N}F_{2N}^*-G_{2N}G_{2N}^*)=0, \tag{54b}$$

$$[D_\rho^2+\frac{1}{\rho}D_\rho+D_z^2](F_{2N}F_{2N}^*+G_{2N}G_{2N}^*)\cdot(F_{2N}F_{2N}^*-G_{2N}G_{2N}^*)=0. \tag{54c}$$

が得られる．実は $2N$-soliton 解は (ρ,z) 座標から (x,y) 座標へ変数変換を行いパラメータを適当に落すと [5], (N番目の) 完全 T-S 解に一致するということが知られている．このことから完全 T-S 解の満たす bilinear form は

$$L(f_n'^* g_n')\cdot(f_n' f_n'^* - g_n' g_n'^*) = 0, \tag{55a}$$

$$L(f_n' g_n'^*)\cdot(f_n' f_n'^* - g_n' g_n'^*) = 0, \tag{55b}$$

$$L(f_n' f_n'^* + g_n' g_n'^*)\cdot(f_n' f_n'^* - g_n' g_n'^*) = 0, \tag{55c}$$

$$L = (x^2-1)D_x^2 + x(D_x+\partial_x) - (y^2-1)D_y^2 - y(D_y+\partial_y). \tag{56}$$

で与えられることがわかる．

§6．まとめ

本論説では，広田の方法を用いて定常軸対称 Einstein 方程式 (6) の新しい解の系列 (39) を見い出した．この解は単に新しいというだけでなく，特別な場合として Neugebauer の $2N$-soliton 解を含む，物理的にも重要な解である．また，Neugebauer の $2N$-soliton 解に対する新しい行列式表現 (30)-(33) を得ることができた．

さらに，Tomimatsu-Sato 解に対するいくつかの bilinear form（付録）と，これまで見つかっていなかった完全 Tomimatsu-Sato 解に対する bilinear form (55) を新たに見い出すことができた．

参考文献

[1] N. Sasa and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn. **62**(1993)1153.

[2] F. J. Ernst, Phys. Rev. **167**(1968)1175.

[3] Y. Nakamura, J. Math. Phys. **24**(1983)606.

[4] P. R. Vein, Class. Quantum. Grav. **2**(1985)899.

[5] D. Kramer and G. Neugebauer, Phys. Lett. A **75**(1980)259.

[6] A. Nakamura and Y. Ohta, J. Phys. Soc. Jpn. **60**(1991)1853.

[7] W. Kinnersley and D. M. Chitre, J. Math. Phys. **19**(1978)2037.

付録 (Tomimatsu-Sato 解の満たす bilinear form)

ここでは, REDUCE3.3 を用いて見い出した T-S 解に対する bilinear form のリストを掲げる.

$$[(x^2-1)D_x^2+2x\partial_x-(y^2-1)D_y^2+c](g_n\cdot f_n+g_n^*\cdot f_n^*)=0, \tag{A.1}$$

$$[(y^2-1)D_y^2+2y\partial_y-(x^2-1)D_x^2+c](g_n\cdot f_n-g_n^*\cdot f_n^*)=0, \tag{A.2}$$

$$[yD_y^2+\partial_y+xD_xD_y](g_n\cdot f_n+g_n^*\cdot f_n^*)=0, \tag{A.3}$$

$$[xD_x^2+\partial_x+yD_xD_y](g_n\cdot f_n-g_n^*\cdot f_n^*)=0, \tag{A.4}$$

$$[xD_x+yD_y](g_n\cdot g_n^*-f_n\cdot f_n^*)=0, \tag{A.5}$$

$$[xD_x^2+\partial_x](g_n\cdot g_n^*-f_n\cdot f_n^*)=0, \tag{A.6}$$

$$[yD_y^2+\partial_y](g_n\cdot g_n^*-f_n\cdot f_n^*)=0, \tag{A.7}$$

$$[D_x^2+x\partial_x+D_y^2+y\partial_y+c](g_n\cdot g_n^*-f_n\cdot f_n^*)=0, \tag{A.8}$$

$$D_xD_yg_n\cdot g_n^*=0, \tag{A.9}$$

$$D_xD_yf_n\cdot f_n^*=0, \tag{A.10}$$

$$D_xD_yg_n\cdot f_n^*=0. \tag{A.11}$$

ここで $c=-2n^2$ である. また, (A.9)-(A.11) は広田良吾先生による.