

## Calogero-Moser hierarchy と KP hierarchy の関係について

龍谷大・理工 松木平淳太 (Junta Matsukidaira)

研究会において、KP hierarchy の  $\tau$  関数のゼロ点の運動が Calogero-Moser hierarchy によって記述されるという予想を提案した。具体的には KP hierarchy において、

$$\tau = \prod_{i=1}^N (t_1 - x_i(t_2, t_3, \dots)) \quad (1)$$

とおいたとき、 $x_i$  は Calogero-Moser hierarchy

$$\frac{\partial}{\partial t_n} \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} \frac{\partial H_n}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H_n}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を満たすということである。但し、 $p_i = (1/2)\partial x_i / \partial t_2$ ,  $H_n = \text{tr} Y^n$  で、 $Y$  は成分が

$$Y_{ij} = \frac{1}{x_i - x_j} \quad (i \neq j), \quad Y_{ii} = p_i \quad (3)$$

である  $N \times N$  行列である。

実際 KP hierarchy の低次の bilinear form から Calogero-Moser hierarchy の低次の方程式が導かれることは容易に確かめられる。Modified KP hierarchy の最低次の bilinear form

$$(D_2 + D_1^2)\tau \cdot \tau' = 0 \quad (4)$$

において、 $\tau = \prod_{i=1}^N (t_1 - x_i)$ ,  $\tau' = \prod_{i=1}^N (t_1 - x'_i)$  と置くと、

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_2} - \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j} + \sum_j \frac{2}{x_i - x'_j} = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial t_2} + \sum_{j \neq i} \frac{2}{x'_i - x'_j} - \sum_j \frac{2}{x'_i - x_j} = 0 \quad (5b)$$

が得られる。これから  $x'_i$  を消去すると

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t_2^2} = -8 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3} \quad (6)$$

となり、これは Calogero-Moser 方程式そのものに他ならない。 $t_3$  を含む双線形形式

$$(D_1^4 - 4D_1 D_3 + 3D_2^2)\tau \cdot \tau = 0 \quad (7)$$

に対して同様に  $\tau = \prod_{i=1}^N (t_1 - x_i)$  と置くと、

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t_2^2} = -8 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3} \quad (8a)$$

$$4 \frac{\partial x_i}{\partial t_3} = -3 \left( \frac{\partial x_i}{\partial t_2} \right)^2 + \sum_{j \neq i} \frac{12}{(x_i - x_j)^2} \quad (8b)$$

となるが、これは

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_2} = \frac{\partial H_2}{\partial p_i} \quad (9a)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_2} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_i} \quad (9b)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_3} = \frac{\partial H_3}{\partial p_i} \quad (9c)$$

に等しく、Calogero-Moser hierarchy の  $t_2, t_3$  に対する方程式が得られることがわかる。さらに  $t_4$  を含む方程式

$$\{(D_1^3 + 2D_3)D_2 - 3D_1D_4\} \tau \cdot \tau = 0 \quad (10)$$

に対しても同様に  $\tau = \prod_{i=1}^N (t_1 - x_i)$  と置けば

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \left( 4 \frac{\partial x_i}{\partial t_3} + 3 \left( \frac{\partial x_i}{\partial t_2} \right)^2 - \sum_{j \neq i} \frac{12}{(x_i - x_j)^2} \right) = 0 \quad (11a)$$

$$6 \frac{\partial x_i}{\partial t_4} = 3 \left( \frac{\partial x_i}{\partial t_2} \right)^3 - \sum_{j \neq i} \frac{24 \frac{\partial x_i}{\partial t_2}}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{j \neq i} \frac{12 \frac{\partial x_j}{\partial t_2}}{(x_i - x_j)^2} \quad (11b)$$

が得られ、これらも Calogero-Moser hierarchy に対する  $t_3, t_4$  に対する方程式になっている。

これらの事実から KP hierarchy の  $t_5, t_6, \dots$  を含む高次の方程式に対しても同様のことが成り立つであろうことは予想される。

あとはこれが実際に正しいことを証明すれば良いだけなのだが、著者がこの予想を立てた後、京大の塩田隆比呂氏が独立に同じ予想を立て、証明したことを知った。そこで本稿では塩田氏の証明について少しコメントすることにし、また今後の課題について述べる。

塩田氏の証明の詳細については hep-th/9402021 [1] を参照されたい。彼の証明は佐藤方程式の formalism を用いて行なわれているので、一見専門家以外にはわかりにくいように思えるが、本質的には次の双線形形式を使っている。

$$(D_2 + D_1^2) \tau_n \cdot \tau_{n+1} = 0 \quad (12a)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} D_1 D_n - p_{n+1}(\tilde{D}) \right\} \tau_n \cdot \tau_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12b)$$

但し、 $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} k^n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) k^n$ ,  $\tilde{D} = (D_1, 1/2 D_2, 1/3 D_3, \dots)$  である。

式 (12a) は Modified KP hierarchy の最低次の方程式であり、式 (12b) は KP hierarchy の一部である。塩田氏の証明においてはまず

$$w_m = \frac{p_m(-\tilde{\partial}) \tau}{\tau} = \sum_{i=1}^N \frac{c_{m,i}}{t_1 - x_i}, \quad m \geq 0 \quad (13)$$

と置く。但し  $\tilde{\partial} = (\partial_1, 1/2 \partial_2, 1/3 \partial_3, \dots)$  である。こういう形に置けることを示すのはそれほど難しくなく、そしてこれを式 (12a) に代入する。但しこのとき、 $\tau_{n+1}/\tau_n = X(k) \tau_n/\tau_n = (1 + w_1/k +$

$w_2/k^2 + \dots) \exp(\sum_{n=1}^{\infty} k^n x_n)$  という関係式を使う。これから  $c_{m,i}$  に関する漸化式が求まり、具体的に  $c_{m,i}$  を計算することができる。そして

$$\frac{p_n(\bar{D})\tau \cdot \tau}{\tau\tau} = \sum_{\substack{m+m'=n \\ m,m'>0}} w_m w_{m'}^* \quad (14)$$

という関係式から式 (12b) は

$$\sum_{i=1}^N \frac{\frac{\partial x_i}{\partial t_n}}{(t_1 - x_i)^2} = \sum_{\substack{m+m'=n+1 \\ m,m'>0}} \sum_{i=1}^N \frac{c_{m,i}}{t_1 - x_i} \sum_{j=1}^N \frac{c_{m',j}^*}{t_1 - x_j} \quad (15)$$

となり、

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_n} = \sum_{\substack{m+m'=n+1 \\ m,m'>0}} c_{m,i} c_{m',i}^* \quad (16)$$

が得られる。但し、

$$w_m^* = \frac{p_m(\bar{\partial})\tau}{\tau} = \sum_{i=1}^N \frac{c_{m,i}^*}{t_1 - x_i}, \quad m \geq 0 \quad (17)$$

である。あとは漸化式を計算して得られた  $c_{m,i}, c_{m,i}^*$  を代入すれば、Calogero-Moser hierarchy が得られる。

このように Calogero-Moser hierarchy が Modified KP hierarchy の最低次の双線形形式と、KP hierarchy の一部の双線形形式から得られるということが分かっただけならば、他の hierarchy について同様の計算をすることは難しくない。しかしながら、何故 hierarchy の一部を使うのか、何故 hierarchy そのものだけではなく Modified hierarchy による漸化式の計算が必要なのかといった Calogero-Moser hierarchy の代数的な構造に関する部分についてはまだよくわからない点が多い。このへんはもっと調べてみる必要があるであろう。また Discrete な系や量子系が KP hierarchy とどうからんでくるかという問題もあり、案外その辺から全く違った別の面白い視点が現れてくるかもしれない。

## References

- [1] [rn1.yukawa.kyoto-u.ac.jp\(133.54.107.21\)](http://rn1.yukawa.kyoto-u.ac.jp(133.54.107.21)) に gopher あるいは ftp でアクセスすれば、手にいれます。