数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 136-148

GL_p-bundle の非可換幾何

信州大学理学部　浅田明 (Akira Asada)

次の微分幾何の問題は，可積分系と関係が深い．

(i)　(行列値) 1-形式 θ が $g^{-1}dg$ と書ける条件を求めよ．

(ii)　(行列値) 2-形式 Θ が $d\theta+\theta\wedge\theta$ と書ける条件を求めよ．

H を polarization ε を持つ Hilbert 空間，I_p を H の線形作用素の作る p-Schatten ideal とする時，(i), (ii) の非可換版は

(i)′　I_p の値を取る K が $g^{-1}[\varepsilon, g]$ と書ける条件を求めよ．

(ii)′　I_p の値を取る R が $\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ と書ける条件を求めよ．

となる．(i), (ii) の (局所) 解を非 Abel Poincaré 補題と呼んでいるので ([2], [1] 参照)，(i)′, (ii)′ の解は非可換 Poincaré 補題と呼ぶ事にする．

以下では非可換 Poincaré 補題を中心に，GL_p-bundle の非可換幾何的取扱いについて話す．これは前回の研究会での話 ([3]) の続きだが，前回話した非可換特性類は，GL_p-bundle は U_1-bundle に同値な事が証明出来たので必要なくなった．これについて

も報告する.

1. 群 GL_p, 環 gl_p と非可換形式

$\mathcal{H}$ を polarization $\varepsilon = P_+ - P_-$ を持つ Hilbert 空間, $B(\mathcal{H})$, $GL(\mathcal{H})$, $U(\mathcal{H})$ を, それぞれ $\mathcal{H}$ の有界線形作用素の作る環, 逆を持つ有界線形作用素の作る群, unitary 作用素の作る群とする. $\mathcal{H}$ の compact 作用素の全体 I_c は $B(\mathcal{H})$ の唯一つの極大 ideal だが

$$I_p = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid \sum |(Te_n, e_n)|^p < \infty,\ \text{ある o.N-basis } \{e_n\} \text{ について}\}$$

も ideal で p-Schatten ideal と呼ばれる. 定義から $p > q$ なら $I_p \subset I_q$ だが, 更に

(1) $$I_p{}^2 = I_{p/2}$$

である. ε と I_p を用いて

$$gl_p = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] \in I_p\},$$
$$GL_p = \{T \in GL(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] \in I_p\},$$
$$U_p = GL_p \cap U(\mathcal{H})$$

とおく. $T \in GL_p$ の時 $|T| \in GL_p$ となるから, GL_p を構造群とする paracompact 空間上の fibre bundle (GL_p-bundle) は U_p を構造群とする bundle と同値である.

$P_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $P_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$ とすれば, 直和分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ により, $T \in B(\mathcal{H})$ は $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と (2,2)-行列の形に書ける.

$T^d = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $T^0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ とした時

$$\varepsilon T = T\varepsilon \iff T = T^d, \quad \varepsilon T = -T\varepsilon \iff T = T^0$$

となる.

(2) $$\delta_+ T = \{\varepsilon, T\} = \varepsilon T + T\varepsilon, \qquad \delta_- T = [\varepsilon, T] = \varepsilon T - T\varepsilon$$

と書く事にする. $\delta_+\delta_- = \delta_-\delta_+ = 0$ である.

定義 $T_{i_0 \cdots i_k}, T_{i_0}, \cdots, T_{i_k} \in gl_p$ の時

$$\sum T_{i_0 \cdots i_k} \delta_- T_{i_0} \cdots \delta_- T_{i_k}$$

の形の元を非可換 k-形式(非可換 k 次微分形式)と呼ぶ.

定義から非可換 k-形式 $\in I_p^k$, 特に非可換 2-形式 $\in I_{1/2}$ である

補題 1. δ_- (2k-非可換形式) = (2k+1)-非可換形式,

δ_+((2k+1)-非可換形式) = (2k+2)-非可換形式.

注意 より精密に, 次が成立する.

$$\{\text{非可換 } 2k\text{-形式}\}/I_p^{2k+1} = (I_p^{2k}/I_p^{2k+1})^d$$

$$\{\text{非可換 } (2k-1)\text{-形式}\}/I_p^{2k} = (I_p^{2k-1}/I_p^{2k})^0.$$

2. 非可換接続と非可換曲率

$\xi = \{g_{uv}\}$ を多様体 M 上の GL_p-bundle とする.

定義 I_p の値を取る(連続, 又は可微分)関数の集まり $\{K_u\}$ が

(3) $$(\varepsilon + K_u) g_{uv} = g_{uv} (\varepsilon + K_v)$$

を満す時，ξ の非可換接続，又 $\{R(K_u)\}=\{R_u\}$

(4) $$R(K_u)=\varepsilon K_u+K_u+K_u^2$$

を，$\{K_u\}$ の(非可換)曲率と言う．

$\{U\}$ に関する(C^∞-級) 1 の分割を $\{e_u\}$ とした時

$$K_u=\sum e_w g_{uw}^{-1}[\varepsilon, g_{uw}]$$

とおけば (3) をみたすから

補題 2　M が paracompact な Hilbert 多様体の時，M 上の GL_p-bundle は非可換 1-形式に値を取る非可換接続を持つ．特に ξ が U_p-bundle であれば，Hermite 作用素の値を取る非可換 1 形式の非可換接続を持つ．

系　同じ仮定で，ξ は $I_{p/2}$ に値を取る非可換曲率を持つ．

尚非可換接続，非可換曲率の形式的性質は通常の接続，曲率 (gl_p に値を取る 1-形式と 2-形式) と同じである ([3])．

3．非可換 Poincaré 補題，I．局所問題．

最初に，比較の為非 Abel Poincaré 補題に関する結果をまとめておく ([2])．

行列値微分形式 $\phi=\sum\phi_{i_1\cdots i_p}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$ に対し

$$I\phi=\sum I(\phi)_{i_1\cdots i_{p-1}}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{p-1}}$$

$$I(\phi)_{i_1\cdots i_{p-1}}=\int_0^1 t^p\sum_{j=1}^m x_j\phi_{j,i_1\cdots i_{p-1}}(xt)\,dt$$

$$I_\theta(\phi)=I(\theta\wedge\phi),\quad P_\theta(\phi)=\sum_{n=0}^{\infty} I_\theta^n(\phi)$$

とおく．但し θ は行列値1-形式である．この時

$$dP_\theta(\phi)=\theta\wedge P_\theta(\phi)+P_\theta(d\phi-I((d\theta+\theta\wedge\theta)\wedge P_\theta(\phi)))$$

が成立する．特に $d\theta+\theta\wedge\theta=0$ が $\theta=g^{-1}dg$ と（局所的に）書ける為の必要十分条件で g は $P_\theta(1)$（1は単位行列）で与えられる（[1]参照）．これが1-次元非Abel Poincaré補題である．

2-次元非Abel Poincaré補題（曲率形式の候補者を与えて接続形式を求める問題）は次の様に述べられる．

1-形式 ϕ と p-形式 β に対し

$$J_\phi(\beta)=(-1)^{p-1}P_\phi(1)^{-1}{}_{(-1)^p\phi}(I(P_\phi(1)\beta))$$

とおく．1-形式 β と 2-形式 α に対し

$$T\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}-J_\beta\left(D\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right),\quad D\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\alpha+[\beta,\alpha]\\ \alpha-(d\beta+\beta\wedge\beta)\end{pmatrix}\quad J_\phi\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_\phi(\alpha)\\ J_\phi(\beta)\end{pmatrix}$$

とおいた時，すべての n について

$$T^n\begin{pmatrix}\Theta\\ \theta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Theta\\ \theta_n\end{pmatrix}$$

がなりたてば，$\lim\theta_n=\theta$ が存在して $d\theta+\theta\wedge\theta=\Theta$ となり，逆も正しい．

非可換Poincaré補題は，Hermite作用素の値を取る，I_p-値関数 K と R に対してだけ得られているので，以下その事を仮定

する。

定理1. (i) Kが(非可換)平坦, $\varepsilon K+K\varepsilon+K^2=0$, となる為の必要十分な条件は U_p の値を取る関数 g が存在して

(5) $$K=g^{-1}[\varepsilon,g]$$

と(局所的に)書ける事である。

(ii) $R=\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$, KはI_pの値を取る関数, と書ける為の必要十分条件は次の(a), (b)である。

(a) $I+R$ は positive 作用素 になる。

(b) $[\varepsilon, R]\in I_p^2$

Kが平坦なら $(\varepsilon+K)^2=I$ となり, $K(x)\in I_p$から $\varepsilon+K(x)$ は ε と同じ spectre 型を持つ。従って (i) は次の補題3に帰着する。

補題3. ε_uがHの polarization の値を取る関数なら, 局所的にε_uと同じ regularity を持つ, unitary 作用素の値を取る関数h_uがあって $\varepsilon_u=h_u^{-1}\varepsilon h_u$ と書ける。更に $\varepsilon+\varepsilon_u$が mod. I_p で逆を持てば, h_uはU_pに値を取る。但し $\varepsilon_u\in \mathfrak{gl}_p$ とする。

証明(藤井一幸氏による). $\varepsilon_u(x)$ と ε の spectre 型が等しいから, $\varepsilon_u(x_0)=\varepsilon$ と仮定して良い。$\eta=\frac{1}{2}(1+\varepsilon\varepsilon_u)$ とおくと $\eta(x_0)=1$, $\varepsilon\eta=\eta\varepsilon_u$ だから, ηが逆を持つ範囲で $\varepsilon_u=\eta^{-1}\varepsilon\eta$ である。又 $\eta^*\varepsilon=\varepsilon_u\eta^*$ だから

$$\eta\eta^*\varepsilon=\eta\varepsilon_u\eta^*=\varepsilon\eta\eta^*$$

である．従って $(\eta\eta^*)^{1/2}$ も ε と交換し

$$h = (\eta\eta^*)^{-1/2}\eta$$

は unitary, $h^{-1}\varepsilon h = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1/2}\varepsilon(\eta\eta^*)^{-1/2}\eta = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1}\varepsilon\eta = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1}\eta\,\varepsilon_u = \varepsilon_u$

となって前半が得られる．後半は $\varepsilon_u = h^{-1}\varepsilon h$ の時

$$[\varepsilon,\varepsilon_u] = \varepsilon h^{-1}\varepsilon h - h^{-1}\varepsilon h\varepsilon = \varepsilon h^{-1}(\varepsilon h - h\varepsilon) + h^{-1}\varepsilon(\varepsilon h - h\varepsilon)$$

$$= (\varepsilon + h^{-1}\varepsilon h)h^{-1}(\varepsilon h - h\varepsilon) = (\varepsilon+\varepsilon_u)h^{-1}[\varepsilon,h]$$

から解る．

$R=\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ なら $I+R=(\varepsilon+K)^2$ だから $I+R$ は positive である．逆に $I+R$ が positive の時 $I+R=\sum\lambda_iP_i$ と spectre 分解出来 $\lambda_i\geqq 0$ である．簡単の為符号の不定性を残したまゝ

$$(I+R)^{1/2}=\sum\pm\sqrt{\lambda_i}\,P_i$$

と書く．$K=(I+R)^{1/2}-\varepsilon$ と置けば $R=\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ だから，$K\in I_p$ となる様 $I+R$ の固有値の平方根の符号をきめる事が問題である．(b) から $I+R$ の固有値は有限個を除いて，$I+R^d$ の固有値の摂動として求められ，$I+R^d$ の固有値の平方根の符号は，$I+R^d$ と ε が同時対角化されるから，ε から定められる．この時 $\sum|\lambda_i-1|^p<\infty$ から $\sum|\sqrt{\lambda_i}-1|^p<\infty$ となる事により，$K\in I_p$ が得られる．尚この議論から $\varepsilon K+K\varepsilon+K^2=\varepsilon K'+K'\varepsilon+K'^2$ なら

(6) $K'=eK$, $e=I-2P$, P は有限次元空間への射影

となる．

4. 非可換曲率の性質

[3]で述べた様に，$\{K_u\}$, $\{R_u\}=\{R(K_u)\}$ を U_p-bundle ξ の Hermite 非可換接続，及び曲率とする時，次の (a), (b) が成立する．

(a) $I+R_u(x)$ が至る所逆を持たなければ，ξ は trivial である．

(b) $R_u(x)$ が I_q の値を取れば，ξ は U_q-bundle と同値である（$p>q$ とする）．

(a) は補題3と $\mathcal{H}$ の unitary 作用素の群が可縮という Kuiper の定理から導かれる．(b) は摂動論の Rellich-Kato の定理から，任意の x の近傍で $\mathcal{H}$ の射影の値を取る連続（又は可微分）関数 P_τ で

$$P_\tau \mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varepsilon+K_u(x)) \oplus \{\varepsilon+K_u(x) \text{ の } + \text{ 固有空間}\}$$

となるものの存在が言え，この事と補題3から得られる．

(b) と補題2系から次の定理が得られる

定理2. Paracompact 多様体（又は C^∞-smooth 多様体）上の GL_p-bundle は位相的 bundle（又は可微分 bundle）として，U_1-bundle と同値である．特に非可換接続，非可換曲率としては，trace を持つものを取れる．

5　非可換 Poincaré 補題 II，大域問題

M は paracompact，位相的 bundle の時，C^∞-smooth（C^∞-級の 1 の分割を持つ，paracompact な Hilbert 多様体なら充分），可微分 bundle の時，とし K，R を M 上連続，又は微分可能な Hermite 且 I_p の値を取る関数とする．ことわらないが，以下表われる関数は K，R と同じ regularity を持つとする．

定理 3．K が M 上で $\varepsilon K + K\varepsilon + K^2 = 0$ をみたせば

$$K = g^{-1}[\varepsilon, g],$$

となる M から U_p への関数 g が存在する．

証明　Local には $K = g_u^{-1}[\varepsilon, g_u]$ と書ける．

$$(fg)^{-1}[\varepsilon, fg] = g^{-1}\{f^{-1}[\varepsilon, f]\}g + g^{-1}[\varepsilon, g]$$

から $c_{uv} = g_u g_v^{-1}$ とおくと，$\{c_{uv}\}$ は M 上の $U(\mathcal{H}_+) \times U(\mathcal{H}_-)$-bundle を定める．従って Kuiper の定理から $c_{uv} = h_u^{-1} h_v$，$h_u : U \to U(\mathcal{H}_+) \times U(\mathcal{H}_-)$ と書け，$h_u g_u = h_v g_v$，$(h_u g_u)^{-1}[\varepsilon, h_u g_u] = g_u^{-1}[\varepsilon, g_u]$ だから定理が得られる．

R が定理 1，(ii) の (a)，(b) をみたせば，局所的に

$$R = \varepsilon K_u + K_u \varepsilon + K_u^2, \quad K_u = (I+R)^{1/2}_u - \varepsilon,$$

と書け，$(I+R)^{1/2}{}_u = e_{uv}(I+R)^{1/2}{}_v$ とおけば

$$e_{uv} = I - 2P_{uv}, \quad P_{uv}(x) \text{ は有限次元空間への射影}$$

となる．$I+R$ が M 上 open dense な集合で，単純固有値しか持たなければ $\{e_{uv}\}$ は(勿論) 可換になるが，M 上の Hermite 且 I_p の値を取る関数 S を取って $I+R+\tau S$ が $\tau>0$ で定理1.(ii)の (a), (b) をみたし，M の open dense な点で，単純固有値しか持たない様出来るから，$\{e_{uv}\}$ は可換と仮定して良い．この時 $e_{uv}(x)$ は Z_2^∞ (Z_2 の無限直和) の元と思えるから，$\{e_{uv}\}$ は Z_2^∞-係数の M 上の Čech 1-cocycle を定める．そうすれば標準的な議論で次の定理が得られる．

定理4．$\{e_{uv}\}$ の定める $H^1(M, Z_2^\infty)$ の元は R だけで定まる．この元を $o(R)$ と書くと $o(R)=0$ が $R=\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ と M 上で書ける為の必要十分条件である．特に $H^1(M, Z_2)=\{0\}$ であれば，R は常に M 上で $\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ と書ける．

6．非可換 Poincaré 補題と U_p-bundle の不変量

$\xi=\{g_{uv}\}$ を M 上の U_p-bundle とし，$\{R_u : U\to I_p$, 且 Hermite$\}$ は，各 $R_u(x)$ が定理1.(ii) の (a), (b) をみたし

(7) $$g_{uv}^{-1}R_u g_{uv}=R_v$$

となるものとする．(U 上の関数として連続又は可微分)

もし $(I+R_u)^{1/2}$ を，$(I+R_u)^{1/2}-\varepsilon\in I_p$，且

(8) $$g_{uv}^{-1}(I+R_u)^{1/2}g_{uv}=(I+R_v)^{1/2}$$

となる様取れれば，$K_u=(I+R_u)^{1/2}-\varepsilon$ は

(9) $$g_{uv}^{-1}K_u g_{uv} + g_{uv}^{-1}[\varepsilon, g_{uv}] = K_v$$

をみたすから，ξの非可換接続になる．

実数 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の時 $\{tR_u\}$ も $\{R_u\}$ と同じ性質を持つ．もし $(I+tR_u)^{1/2}$ を

$$(I+tR_u)^{1/2} - \varepsilon \in I_p, \quad g_{uv}^{-1}(I+tR_u)^{1/2}g_{uv} = (I+tR_v)^{1/2}$$

となる様取れれば，

$$K_{u,t} = (I+tR_u)^{1/2} - \varepsilon,$$

とおいて，$\{K_{u,t}\}$ はξの非可換接続であり，$\lim_{t\to 0} K_{u,t}$ は平坦になるからξは trivial になる．$I+tR_u(x)$ の spectre 分解は

$$I+tR_u(x) = \sum (1+t\lambda_i(x))P_i, \qquad I+R_u(x) = \sum(1+\lambda_i(x))P_i,$$

だから，もし $1+\lambda_i(x) \neq 0$ なら，$(1+t\lambda_i(x))^{1/2}$ の符号は $(1+\lambda_i(x))^{1/2}$ の符号から定められる．特に $\{R_u\}$ がξの非可換曲率で $I+R_u(x)$ が常に逆を持てば，ξが trivial になる事がこの事から解る．

$1+\lambda_i \geqq 0$ なら $1+t\lambda_i \gneqq 0$，$0 \leqq t < 1$，だから，$I+R_u(x)$ が 0-mode を持っても $I+tR_u(x)$，$t<1$，は 0-mode を持たない．この場合，$(I+tR_u)^{1/2} - \varepsilon \in I_p$ となる $(I+tR_u)^{1/2}$ は，R_u が非可換曲率であっても，その非可換接続からは定められない．しかし

(10) $$(I+tR_u)^{1/2} = e_{uv}\, g_{uv}(I+tR_v)^{1/2} g_{uv}$$

$$e_{uv} = I - 2P_{uv}, \quad P_{uv} \text{ は有限次元空間への射影}$$

は成立し，e_{uv} は t に無関係に取れる．又 $(I+tR_u)^{1/2}_a$ も $(I+tR_u)^{1/2}_a - \varepsilon \in I_p$ をみたせば

(11) $$(I+tR_u)^{1/2}{}_a = \varepsilon_u (I+tR_u)^{1/2}$$

$\varepsilon_u = I-2P_u$, P_uは有限次元空間への射影

となる．

(10), (11) から次の cocycle 関係と同値関係が導かれる．

(12) $$e_{uv}g_{uv}\cdot e_{vw}g_{vw}\cdot e_{wu}g_{wu} = 1,$$

(13) $$\{e_{uv}\} \sim \{\varepsilon_u^{-1} e_{uv}\, g_{uv}\, \varepsilon_v\, g_{uv}^{-1}\}.$$

ここで，$\{e_{uv}\}$, $\{\varepsilon_u\}$ の交換関係は

(14) $$e_{uv}e_{uw} = e_{uw}e_{uv}, \quad e_{uv}g_{wu}e_{wx}g_{wu} = g_{wu}e_{wx}g_{wu}e_{uv}$$

(15) $$\varepsilon_u e_{uv} = e_{uv}\varepsilon_u, \quad \varepsilon_u g_{uv}\varepsilon_v g_{vu} = g_{uv}\varepsilon_v g_{vu}\varepsilon_u$$

である．尚 $\{g_{uv}\}$ を $\{h_u^{-1}g_{uv}h_v\}$ に取りかえると

$$\{e_{uv}\} \to \{h_u^{-1}e_{uv}h_u\}, \quad \{\varepsilon_u\} \to \{h_u^{-1}\varepsilon_u h_u\}$$

と変る．

上記を定式化する為，Z_2^∞ を（定理4と同じ議論をして），R_u と可換な有限次元射影を用いて表現すれば $g_{uv}^{-1}Z_2^\infty g_{uv}$ は R_v と可換な有限次元射影による Z_2^∞ の表現である事を注意する．この事から ξ によって twist された Z_2^∞ の層 $Z_2^\infty(\xi)$ が出来，$H^1(M, Z_2^\infty(\xi))$ が ξ だけで定まる．(12), (13) から $\{e_{uv}\}$ から $H^1(M, Z_2^\infty(\xi))$ の元 $o(R)$ が定まる．尚交換関係 (15) から，ξ が non-trivial の時，$B^1(\mathcal{U}, Z_2^\infty(\xi))$ はかなり小さくなる．

Z_2^∞ は discrete だから R が parameter s に連続的に依存している時 $o(R)$ は不変である．特に $\{R_u\}$ として ξ の非可換曲率を取

れば，非可換曲率全体の集合は弧状連結だから $o(\{R_u\})$ は ξ だけで定まる．従って次の定理が得られる．

定理5．$\{R_u\}$ を ξ の非可換曲率とすれば $o(\{R_u\}) \in H^1(M, Z_2^{\infty}(\xi))$ は ξ だけで定まる．この元を $o(\xi)$ とすれば $o(\xi) = 0$ となる必要十分な条件は ξ が trivial な事である．

$o(\xi)$ からより計算しやすい不変量を導く事は今後の問題である．尚この研究の主な部分は昨年（93年）Bologna 滞在中出来た．滞在の機会を与えて戴いた Vaz Ferreira 教授と CNR，及び種々討論した Almeida 教授に感謝します．

文献（尚 [3] の引用文献参照）

[1] Almeida, P.: A direct approach to one variable noncommutative calculus, Port. Math. 46 (1989)

——: Calcul explicite de l'holonomie（上記の resumé, 3p）.

[2] Asada, A.: Non Abelian Poincaré Lemma, Lect. Notes Math. 1209 (1986), 37-65

[3] Asada, A.: 非可換接続と超対称性，数理研講究録 822 (1993), 70-83

——: Non-commutative geometry of Glp-bundles, preprint 42p).

尚非可換幾何の標準 model への応用について最近次の論文が発表された．

Kastler, D.: A detailed account of Alain Connes' version of the standard model in non-commutative geometry, I, II, Rev. Math. Phys. 5 (1993), 477-532, Várilly, J.C.-Gracia-Bondía, J.M.: Connes' noncommutative differential geometry and the standard model, J. Geo. Phys. 12 (1993) 223-301.