数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 149-156

CP-invariance and nonlinear sigma models

藤井一幸

横浜市立大学・文理学部・数学教室

QCD の CP-invariance が nonlinear sigma models に古典論及び量子論においてどのような影響を及ぼすのか? これを2次元の chiral model と3次元の Grassmann model に限定して調べる。我々の考える nonlinear sigma models では，力学変数(写像)の domain で回転不変性(rotational invariance)を仮定する

(I) Chiral model in two dimensions

2次元の chiral model を考えよう。action S は

$$S : Map(S^2, SU(N)) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ;$$

$$S(g) = \frac{1}{4f^2}\int_{S^2} \mathrm{tr}\, dg^{-1} \wedge * dg \qquad \text{(a)}$$

で与えられる。 ここに f は coupling constant である。これの運動方程式は

$$\frac{1}{2f^2}\, d(*g^{-1}dg) = 0 \qquad \text{(i)}$$

で与えられる。 この方程式は 次の2つの $\mathbb{Z}_2$-symmetry

$$P\ (\text{parity}) : (x_0, x_1) \longrightarrow (x_0, -x_1)$$

$$C\ (\text{charge}) : \quad g \quad \longrightarrow \quad g^{-1}$$

のもとで 独立に不変である。 QCD は これに異を唱える。

CP-不変性の原理（QCD からの要請）

理論は CP 変換（: C と P の合成）., 即ち

$$CP : g(x_0, x_1) \longrightarrow g(x_0, -x_1)^{-1}$$

のみで不変 であるべし。

この原理を最小限のコストで みたすために 運動方程式 (i) を

$$\frac{1}{2f^2}\, d(*g^{-1}dg) + \frac{k}{4\pi}\, g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg = 0 \qquad \text{(ii)}$$

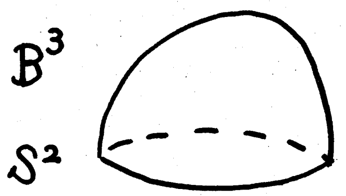
と補正する。 k は後に決められる定数（実数）である。 では (ii) を 運動方程式として もつ action は何か？ この解答は Witten [1] によって与えられた 。

$$S(g;\tilde{g}) = \frac{1}{4f^2}\int_{S^2} \mathrm{tr}\, dg^{-1} \wedge * dg$$
$$\qquad + \frac{k}{12\pi}\int_{B^3} \mathrm{tr}\,(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})^{\wedge 3}, \qquad (6)$$

但し，$\tilde{g}$ は

$$\tilde{g} \in \mathrm{Map}(B^3, SU(N)) \quad \& \quad \tilde{g}|_{\partial B^3 = S^2} = g$$

となるもの（下図）。



$$\xrightarrow{\tilde{g}} \quad \xrightarrow{g} \quad SU(N) \quad ; \ \tilde{g}|_{S^2} = g.$$

g の lift $\tilde{g}$ は unique ではないので，(6) は single-valued ではない。しかし Feynmann 積分 では

$$e^{iS(g;\tilde{g})} \text{ が single-valued}$$

が要請されるだけである。

Theorem ([1])

$$e^{iS(g;\tilde{g})} \text{ が single-valued} \Longrightarrow k \in \mathbb{Z}.$$

即ち, k が位相的に量子化される。

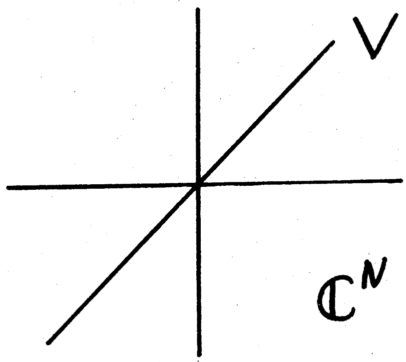
(II) Grassmann model in three dimensions

3次元の Grassmann model を考えよう。

$\mathbb{C}^N$ の中の j 次元部分空間全体のつくる Grassmann manifold $G_{j,N}(\mathbb{C})$ $(0 \leqq j \leqq N)$ を projection operators で表現する。

$$G_{j,N}(\mathbb{C}) = \{ P \in M(N;\mathbb{C}) \mid P^2 = P,\ P^\dagger = P,\ \mathrm{tr}\,P = j \}$$

$$\cong U(N) / U(j) \times U(N-j) .$$



$V \longleftrightarrow \exists!\, P_V$: projection on V

そして

$$G_{*,N} = \bigcup_{j=0}^{N} G_{j,N}(\mathbb{C})$$

とおく。3次元の Grassmann model の action は

$$S : \mathrm{Map}(S^3, G_{*,N}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ;$$

$$S(P) = \frac{1}{4f^2}\int_{S^3} \mathrm{tr}\, dP \wedge * dP \qquad \text{(c)}$$

で与えられる。ここに f は coupling constant である。これの運動方程式は

$$\frac{1}{2f^2}[P, d(*dP)] = 0 \qquad \text{(iii)}$$

で与えられる。この方程式は次の2つの $\mathbb{Z}_2$-symmetry

P (parity) : $(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow (x_0, x_1, -x_2)$

C (charge) : $P \longrightarrow \mathbb{1} - P$

のもとで独立に不変である。QCD はこれに異を唱える。

CP-不変性の原理 (QCD からの要請)

理論は CP 変換 (: C と P の合成), 即ち,

$CP : P(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow \mathbb{1} - P(x_0, x_1, -x_2)$

のみで不変であるべし。

この原理を最小限のコストでみたすために運動方程式 (iii) を

$$\frac{1}{2f^2}[P, d(*dP)] + \frac{-\theta}{\pi^2} dP \wedge dP \wedge dP = 0 \qquad \text{(iv)}$$

と補正する。θ は後に決められる定数(実数)である。この方程式を運動方程式としてもつ action

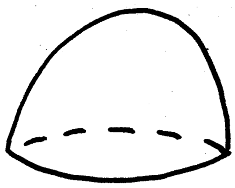
は

$$S(P;\tilde{P}) = \frac{1}{4f^2}\int_{S^3} \mathrm{tr}\, dP \wedge * dP$$
$$+ \frac{-\theta}{4\pi^2}\int_{B^4} \mathrm{tr}\,(\tilde{P}\, d\tilde{P} \wedge d\tilde{P})^{\wedge 2} \qquad \text{(d)}$$

で与えられる（[2]）。ここに $\tilde{P}$ は

$$\tilde{P} \in \mathrm{Map}(B^4, G_{*,N}) \ \& \ \tilde{P}|_{\partial B^4 = S^3} = P$$

となるもの（下図）。

B^4
S^3


$$\xrightarrow{\tilde{P}} G_{*,N} \ ; \ \tilde{P}|_{S^3} = P$$
$$\xrightarrow[P]{}$$

P の lift $\tilde{P}$ は unique ではないので，(d) は single-valued ではない。しかし Feynmann 積分では

$$e^{iS(P;\tilde{P})} \text{ が single-valued}$$

が要請されるだけである。

Theorem（[2], [3]）

$$e^{iS(P;\tilde{P})} \text{ が single-valued}$$

$\Longrightarrow$ (イ) $j=1, N-1$ のとき θ は任意の実数を取る（量子化されない）。
(ロ) $2 \leqq j \leqq N-2$ のとき θ は量子化される。,

$$\theta = \frac{\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(III) Some relation

(I) で target space を $SU(N)$ の代りに $U(N)$ としても全く同様の結果が成り立つ。即ち，$g \in Map(S^2, U(N))$ である。この場合に charge 変換の fixed points を考えてみる。

Fixed points of charge

$$= \{ g \in U(N) \mid g^{-1} = g \ \& \ g^{\dagger} = g \}$$

$$= \{ g \in U(N) \mid g^2 = \mathbb{1} \ \& \ g^{\dagger} = g \}$$

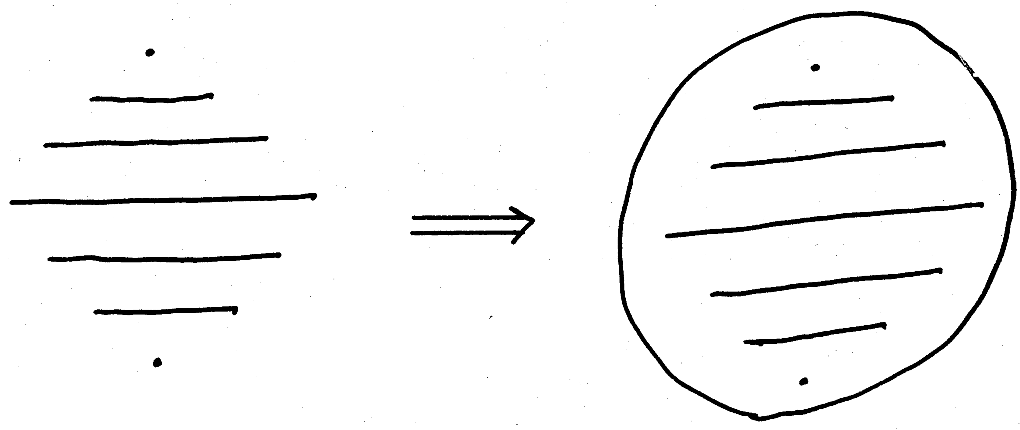
$$= \{ 2P - \mathbb{1} \mid P^2 = P, P^{\dagger} = P \}$$

$$= \bigcup_{j=0}^{N} \{ 2P - \mathbb{1} \mid P^2 = P, P^{\dagger} = P, \mathrm{tr}\, P = j \}$$

$$\cong \bigcup_{j=0}^{N} G_{j,N} = G_{*,N}.$$

即ち，(I) での charge 変換の fixed points が (II)

の model の target space になっている(下図).



$G_{*,N}$ $\Longrightarrow$ $U(N)$

References

[1] E. Witten : Non-abelian bosonization in two-dimensions, Commun. Math. Phys., 92 (1984), 455-472。

[2] G. Ferretti & S. G. Rajeev : Current algebra in three dimensions, Phys. Rev. Lett., 69 (1992), 2033-2036.

[3] K. Fujii : Ferretti-Rajeev term and homotopy theory, to appear in Commun. Math. Phys.