数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 169-178



# 有理 Darboux 変換について

## — 数式処理システム Mathematica を活用して —

徳島大学総合科学部自然システム学科　大宮　真弓 (Mayumi Ohmiya)

## 1. 序.

本報告で扱うのは複素領域の 2 階常微分作用素

$$H(u)=-\partial^2+u(x)$$

である。最初に表題の「有理 Darboux 変換」について少し言い訳めいた事を記す。有理 Darboux 変換の概念は Duistermaat-Grünbaum[D-G] によって、有理関数係数の微分作用素 $H(u)$、$u(x)\in \boldsymbol{C}(x)$ の Darboux 変換（[O2] 参照。なお、後で少し詳しく説明する。）が再び有理関数係数になる場合として定式化されている。なお [Z-M] も参照のこと。本報告ではそれを出来るだけ自然な形で有理型関数にまで一般化する事を試みたい。まず $u(x)$ を領域 $\Omega\subset \boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ で定義された任意の有理型関数として、$\mathcal{A}_u$ を $u(x)$ の微分多項式環、$\mathcal{A}_u$ の商体を $\mathcal{K}_u$ とする。通常の微分演算で $\mathcal{A}_u$ は微分環、$\mathcal{K}_u$ は微分体になる。他方、微分方程式

$$H(u)f(x)=-f''(x)+u(x)f(x)=0 \tag{1}$$

の非自明解 $f(x)$ に対して $q(x)=(\log f(x))'$ と置くと 1 階常微分作用素 $A_\pm=\pm\partial+q(x)$ を用いて $H(u)=A_+\cdot A_-$ と因数分解される。因子を左右交換して得られる作用素 $\hat{H}(u)=A_-\cdot A_+$ を $H(u)$ の $f(x)$ による Darboux 変換という。又、$\hat{u}(x)=u(x)-2q'(x)$ と置くと $\hat{H}(u)=H(\hat{u})$ が成立する。係数 $\hat{u}(x)$ 自身も $u(x)$ の $f(x)$ の Darboux 変換という。

単純に考えると、$\hat{u}(x)\in\mathcal{K}_u$ となるとき、即ち、$\hat{u}(x)$ が $u(x)$ 及びその高次導関数の有理式で表されるときに $\hat{H}(u)$ 及び $\hat{u}(u)$ を有理 Darboux 変換というのが妥当な様に思えるが、実はこの定義はいささか窮屈に過ぎる。(現に、[O-M] ではこう定義してしまった。) というのは、例えば $u(x)\equiv 0$ ならば $\mathcal{K}_u=\boldsymbol{C}$ である。確かに微分方程式 $H(0)f=-f''=0$ の解 $f(x)\equiv 1$ による Darboux 変換は恒等的に 0、即ち有理 Darboux 変換であるが、一般解 $ax+b$ による Darboux 変換は、$\dfrac{2a^2}{(ax+b)^2}$ となり、有理関数である、即ち Duistermaat 達の定義では有理 Darboux 変換であるにも拘らず、我々の意味では有理的ではなくなってしまう。すると Duistermaat 達の定義まで含み込んだ形で一般化しようとするならば、「有理 Darboux 変換」$\hat{u}(x)$ は、$u(x)$ とその高次導関数、及びそれらの有理式の不定積分で 1 価のものの有理式位は考えるべきであろう。すなわち $\hat{\mathcal{K}}_u$ を $\mathcal{K}_u$ の元の不定積分で 1 価となるもの全てを付け加えて得られる $\mathcal{K}_u$ の拡大体とするとき、$\hat{u}(x)\in\hat{\mathcal{K}}_u$ を我々の意味での「有理 Darboux 変換」という。ここでもう一度拡大体 $\hat{\mathcal{K}}_u$ の定義をきちんと書いておく:

$$\hat{\mathcal{K}}_u=\mathcal{K}_u<\int p(x)dx;p(x)\in\mathcal{K}_u \quad \text{and} \quad \mathrm{Res}_{x=a}p(x)=0 \quad \forall a\in\Omega> .$$

$\hat{\mathcal{K}}_u$ は積分演算について閉じている、すなわち、原始的 Liouville 拡大 (cf. [K; p408]) である必要はない。

余りにも「有理」という言葉にこだわり過ぎているようだが、最近の B.Simon のスクールの Gesztesy を中心とした精力的な仕事 [G]、[G-H-S-S]、[G-K-Z]、[G-S]、[G-S-S]、[G-Z] 等により、積分可能系と Darboux 変換の密接な関係がスペクトル理論的に明かにされつつある現在、可積分性やスペクトルを計算可能性の立場から見直して見ることも、まんざら無意味でも無いと思っている。一応 [O1]、[O2]、[O3]、[O-M] はその方向のささやかな結果だが、その思いと裏腹に、本報告も含め甚だ不十分な考察に終始してしまっていることは否めない。本格的な発展は後日に期したい。

## 2. クラス $\mathcal{R}_\infty(\Omega)$.

この節では、領域 $\Omega$ の有理型関数 $u(x)$ に対して、$u(x)$ の任意の Darboux 変換が有理的、即ち $\hat{\mathcal{K}}_u$ に属することの判定方法について述べる。詳しい証明は [O-M] を参照して下さい。但し、上にも述べた様に [O-M] では有理 Darboux 変換を $\hat{u}(x) \in \mathcal{K}_u$ で定義してあるが、証明そのものは微分体であることのみに依拠しているので全く並行的に行える。

$f_j(x), j = 1, 2$ を微分方程式 (1) の解の基本系とする。$t \in \boldsymbol{P}_1$ に対して

$$q(x,t) = \begin{cases} \partial \log(f_1(x) + t f_2(x)), & t \in \boldsymbol{C} \\ \partial \log f_2(x), & t = \infty \end{cases}$$

とおく。$u(x)$ の Darboux 変換は 1-パラメータ族

$$\hat{u}_t = \hat{u}(x,t) = u(x) - 2q_x(x,t)$$

である。

$$\chi(u) = \{t \in \boldsymbol{P}_1 | \hat{u}(x,t) \in \hat{\mathcal{K}}_u\}$$

とおく。集合 $\chi(u)$ 自身は解の基本系の選び方に依存するが、$\sharp\chi(u)$ は一意に定まる。但し、$\sharp A$ は集合 $A$ の濃度である。そこで、$k \in \boldsymbol{N}$ に対して $\hat{\mathcal{R}}_k(\Omega)$ を領域 $\Omega$ で定義された有理型関数で $\sharp\chi(u) \geq k$ となるもの全体とする。さらに $\hat{\mathcal{R}}_\infty(\Omega)$ を $\chi(u) = \boldsymbol{P}_1$ となるもの全体とする。そこで

$$\eta(x;u) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

を微分方程式 (1) の projective solution とする。$\eta(x;u)$ も $\chi(u)$ 同様、解の基本系の選び方に依存するが、性質 "$\eta(x;u) \in \hat{\mathcal{K}}_u$" はそうではない。

後に応用として、パラメータ $t$ を時間変数と見なして高次 KdV 方程式の厳密解を構成するが、その際解が各 $t$ ごとに $\hat{\mathcal{K}}_u$ に属する様な「初等解」になっている事を見る為に、$u(x) \in \hat{\mathcal{R}}_\infty(\Omega)$ となる判定方法を3つ程あげておく。

命題 1. $u(x) \in \hat{\mathcal{R}}_\infty(\Omega)$ となる必要十分条件は$\eta(x;u) \in \hat{\mathcal{K}}_u$ である。

この命題の証明（極めて初等的）から次が解る。

系. $k \geq 3$ ならば $\hat{\mathcal{R}}_k(\Omega) = \hat{\mathcal{R}}_\infty(\Omega)$ である。

さらに $\eta(x;u)$ 自身が $\hat{\mathcal{K}}_u$ に属するかどうか判定が難しい時には次の判定方法が効果的である。

命題 2. $u(x) \in \hat{\mathcal{R}}_2(\Omega)$ で $\eta'(x;u) \in \hat{\mathcal{K}}_u$ ならば $u(x) \in \hat{\mathcal{R}}_\infty(\Omega)$ である。

また、次の判定律は $\mathrm{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ の場合に、スペクトル変数を伴った $H(u)$ の有理 Darboux 変換の考察に有効である。

命題 3. $F(x) \in \mathcal{K}_u \setminus \{0\}$ が存在して

$$F'(x)^2 - 2F(x)F''(x) + 4u(x)F(x)^2 = 0$$

が成立するならば、$u(x) \in \hat{\mathcal{R}}_\infty(\Omega)$ である。

3. スペクトル変数を持つ場合.

"$\Lambda$-algorithm" について少し説明しておく。詳しくは [O2]、または [O3] を参照してください。

$$\Lambda(u) = \partial^{-1} \cdot (\frac{1}{2}u'(x) + u(x)\partial - \frac{1}{4}\partial^3)$$

に対して

$$Z_n(u) = \Lambda(u)^n 1, \quad n \in \boldsymbol{Z}_+ = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$$

と置くと、$Z_n(u) \in \mathcal{A}_u$ である。

$$V(u) = \bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}_+} \boldsymbol{C} Z_n(u)$$

と置き、$\dim V(u) < \infty$ のとき

$$\mathrm{rank}_\Lambda u(x) = \dim V(u) - 1$$

で定義する。$n = \mathrm{rank}_\Lambda u(x) < \infty$ ならば

$$V(u) = \bigoplus_{j=0}^{n} \boldsymbol{C} Z_j(u)$$

である。従って

$$Z_{n+1}(u) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu Z_\nu(u)$$

となる定数 $a_0,\cdots,a_n$ が一意に定まる。他方、KdV 多項式の展開定理 [O2, Theorem 3]、[O3, 定理 1] より $n=\mathrm{rank}_\Lambda(u(x)-\lambda)$ であるから

$$Z_{n+1}(u-\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu(\lambda)Z_\nu(u-\lambda) \tag{2}$$

となる $\lambda$ の関数 $b_\nu(\lambda),\nu=0,1,\cdots,n$ が存在することが解るが、実は、それらは $\lambda$ の $n-\nu+1$ 次多項式である。そこで

$$F(x,\lambda)=Z_n(u(x)-\lambda)-\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu(\lambda)Z_{\nu-1}(u(x)-\lambda)$$

と置くと、$F(x,\lambda)$ は恒等的には 0 ではない。

$$\Delta(\lambda;u)=F_x(a,\lambda)^2-2F(a,\lambda)F_{xx}(a,\lambda)+4(u(a)-\lambda)F(a,\lambda)^2$$

と置くと、$\Delta(\lambda;u)$ は定数係数（$a$ には依存しない）の $2n+1$ 次の $\lambda$ の多項式である。

$$\Gamma(u)=\{\lambda\in\boldsymbol{C}|\Delta(\lambda;u)=0\}$$

と置く。$\lambda_j\in\Gamma(u),j=0,1,\cdots,2n$ とすると $f(x,\lambda_j)=F(x,\lambda_j)^{\frac{1}{2}}$ は固有値問題

$$(H(u)-\lambda_j)f(x,\lambda_j)=0$$

の解である。

ここでスペクトル変数を伴う Darboux 変換を定義する。$f_j(x,\lambda),j=1,2$ を固有値問題

$$(H(u)-\lambda)f(x)=0,\quad \lambda\in\boldsymbol{C}$$

の解の基本系とする。

$$q(x,t;\lambda)=\begin{cases}\partial\log(f_1(x,\lambda)+tf_2(x,\lambda)), & t\neq\infty\\ \partial\log f_2(x,\lambda), & t=\infty\end{cases}$$

に対して

$$u^*_{\lambda,t}=u^*(x,t;\lambda)=u(x)-2q_x(x,t;\lambda)$$

と置く。作用素 $H(u^*_{\lambda,t})$ 及び $u^*_{\lambda,t}$ をスペクトル変数を伴った Darboux 変換と呼ぶ。そこで $n=\mathrm{rank}_\Lambda u(x)<\infty$ として $\lambda_j\in\Gamma(u),j=0,1,\cdots,2n$ に対して

$$f_\nu(x,\lambda_j)=\begin{cases}F(x,\lambda_j)^{\frac{1}{2}}, & \nu=1\\ F(x,\lambda_j)^{\frac{1}{2}}\partial^{-1}(F(x,\lambda_j)^{-1}), & \nu=2\end{cases}$$

と置いて上に述べた方法でスペクトル変数を伴った Darboux 変換 $u^*(x,t;\lambda_j)$ を定義すると

$$u^*(x,0;\lambda_j)=u(x)-\frac{F''(x,\lambda_j)F(x,\lambda_j)-F'(x,\lambda_j)^2}{F(x,\lambda_j)^2}$$

で $F(x,\lambda_j)\in\mathcal{A}_u$ より $u^*(x,0;\lambda_j)\in\mathcal{K}_u$ が従う。さらに

$$\mathrm{Res}_{x=a}\frac{1}{F(x,\lambda_j)}=0\quad \forall a\in\Omega \tag{3}$$

ならば、簡単な計算により、任意の $t\in\boldsymbol{P}_1$ に対して $u^*(x,t;\lambda_j)\in\hat{\mathcal{K}}_u$ が解る。故に次が得られた。

命題 4. $n=\mathrm{rank}_\Lambda u(x)<\infty$ で、ある $\lambda_j\in\Gamma(u), j=,1,\cdots,n$ に対して条件 (3) が成立するならば $u(x)-\lambda_j\in\hat{\mathcal{R}}_\infty(\Omega)$ である。

## 4. KdV 型方程式の厳密解.

$n=\mathrm{rank}_\Lambda u(x)<\infty$ とする。(2) 式で定まる多項式 $b_i(\lambda), i=0,1,\cdots,n$ および $\lambda_j\in\Gamma(u), j=0,1,\cdots,2n$ に対して

$$G_j(x,t)=Z_{n+1}(u^*_{\lambda_j,t}-\lambda_j)-\sum_{i=0}^{n}b_i(\lambda_j)Z_i(u^*_{\lambda_j,t}-\lambda_j) \tag{4}$$

と置く。$B_\pm(\lambda)=\pm\partial+2q(x,t;\lambda)$ とすると、Darboux変換の基本等式 ([O1, p623, Theorem 3.2], [O3, 定理 8], [O-M, p6, Theorem 2])

$$B_-(\lambda)Z_n(u-\lambda)=B_+(\lambda)Z_n(u^*_{\lambda,t}-\lambda)$$

より、(2) を考慮すると

$$G_j'(x,t)+2q(x,t;\lambda_j)G_j(x,t)=0$$

である。従って、この方程式を $G_j(x,t)$ について解くと

$$G_j(x,t)=\frac{P_j(t)}{(f_1(x,\lambda_j)+tf_2(x,\lambda_j))^2}$$

となる $t$ の有理関数 $P_j(t)$ が存在することが解る。他方、直接計算により

$$\frac{\partial}{\partial t}u^*(x,t;\lambda_j)=4W(f_1,f_2)\frac{f_1'(x,\lambda_j)+tf_2'(x,\lambda_j)}{(f_1(x,\lambda_j)+tf_2(x,\lambda_j))^3}$$

が解る。ただし、$W(f,g)$ は Wronskian である。従って

$$d_j(t)=-\frac{P_j(t)}{2W(f_1,f_2)}$$

と置くと、これは $t$ の有理関数で

$$d_j(t)\frac{\partial}{\partial t}u^*(x,t;\lambda_j)=\frac{\partial}{\partial x}G_j(x,t)$$

が成立する。他方、$G_j(x,t)$ の表示式 (4) において $Z_i(u^*_{\lambda_j,t}-\lambda_j), j=0,1,\cdots,n$ を展開してして整理すると、$\lambda$ の多項式 $c_i(\lambda), i=0,1,\cdots,n$ が存在して

$$G_j(x,t)=Z_{n+1}(u^*_{\lambda_j,t})+\sum_{i=0}^{n}c_i(\lambda_j)Z_i(u^*_{\lambda_j,t})$$

と書けるから、次を得る。

定理 5. $n=\mathrm{rank}_\Lambda u(x)<\infty$ ならば $u(x)$ のスペクトル変数を伴った Darboux 変換 $u^*_{\lambda_j,t}=u^*(x,t;\lambda_j), \lambda_j\in\Gamma(u), j=0,1,\cdots,n$ は $t\in\boldsymbol{P}_1$ を時間変数とする高次 KdV 方程式

$$d_j(t)\frac{\partial}{\partial t}u^*_{\lambda_j,t}=\frac{\partial}{\partial x}(Z_{n+1}(u^*_{\lambda_j,t})+\sum_{i=1}^{n}c_i(\lambda_j)Z_i(u^*_{\lambda_j,t}))$$

の解である。さらに条件 (3) が成立するならば、$u^*_{\lambda_j,t}$ は全ての $t\in\boldsymbol{P}_1$ に対して $\hat{\mathcal{K}}_u$ に属する。

この定理は [O1, p626, Theorem 4.2] の一般化である。

## 5. 具体例.

前節の定理 5 で、高次 KdV 方程式の厳密解が構成できたわけだが、この節では、その厳密解の正体を具体例を通じて探ってみたい。ところで、具体的な計算を行おうとすると、初等的とは言え、猛烈な量の計算が待ちかまえている。そこで、表題の数式処理システム Mathematica2.2.1(Wolfram Research Inc.) をパーソナルコンピュータ Macintosh IIsi(17MB) 上で動かしてみた。講演の際にも言った事だが、決して先進的な使い方ではなく、手計算の代わりに面倒な計算を機械に委ねただけだが、筆者のようなずぼらな中年でも十分その軽快さ、威力を味わった。(ただし、これは数式処理システムの、と言うより Mathematica のノートブック型のフロントエンドの問題と言って良い。) もっとプロフェッショナルな使用に関しては、広田良吾先生が精力的書かれている書物や論文をご覧になって下さい。コンピュータと言うと頭っから拒否的な態度で臨む論証主義の鬼のような方々、あるいはメインフレーム以外は玩具で信ずるに足らないと言う数値解析の大家の方々、といった両極端ではない普通の人々で、まだ数式処理に親しんでいない方々への気軽なメッセージと思って下さい。

ところで、以下の例は全て実関数を扱っている。複素関数とすると有理型ではないが、それが我々の初等代数的方法の長所でもあるのだが、$C^\infty$関数でも全く同じ論法が成り立つ事を注意しておく。

まず、最も簡単な例として、$\Lambda$-階数が 1 となる関数について定理を適用してみよう。その関数自身 Darboux 変換を応用して構成する:

$$u_0(x)=-2\frac{d^2}{dx^2}\log(e^x+e^{-x})=\frac{-8e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}.$$

即ち、$H(0) = -\partial^2$ の固有値 1 に対する固有関数による、恒等的に 0 に等しい関数の Darboux 変換である。そこで、$\lambda$ を複素パラメータとして $V_\lambda$ を KdV 多項式 $Z_n(u_0-\lambda), n \in \boldsymbol{Z}_+$ で張られる $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とすると、任意の $\lambda$ に対して $\dim V_\lambda = 2$ で

$$b_1(\lambda) = -\frac{3}{2}\lambda - 1, \quad b_0(\lambda) = -\frac{3}{8}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda$$

とおくと

$$Z_2(u_0-\lambda) = b_1(\lambda)Z_1(u_0-\lambda) + b_0(\lambda)Z_0(u_0-\lambda)$$

が成立する。そこで

$$F(x,\lambda) = Z_1(u_0-\lambda) - b_1(\lambda)Z_0(u_0-\lambda) = \frac{1}{2}u_0(x) + \lambda + 1$$

とおく。次に、$H(u_0)$ のスペクトル $\Gamma(u_0)$ を考察する。判別式 $\Delta(\lambda; u_0)$ を Mathematica で計算すると

$$\Delta(\lambda; u_0) = -4\lambda^3 - 8\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha$$

である。ここに

$$\alpha_1 = -u_0'' + 3u_0^2 + 4u_0 - 4$$
$$\alpha_0 = -u_0'' - \frac{1}{2}u_0u_0'' + \frac{1}{4}u_0'^2 + u_0^3 + 4u_0^2 + 4u_0$$

である。これらの計算は手でやっても耐え難い程ではないが、Mathematica にやらせると、頭痛もしないし入力さえチェックすれば計算結果は安心して受け入れられる。さらに

$$\alpha_1 = -4, \quad \alpha_0 = 0$$

も Mathematica で計算すればたちまち出てくる。この結果も理論上予測できることであるが、予測と計算機による計算が exact に一致する瞬間、即ち、複雑な式が CRT を埋め尽くした後、コマンド Simplify[%] を入力することしばし、0 が出力される瞬間はなかなか快感である。それはさておき、直ちに

$$\Delta(\lambda; u_0) = -4\lambda(\lambda+1)^2$$

を得る。(勿論、今の場合の因数分解は一目瞭然だが、階数が高い場合は Mathematica のお世話になるのが賢明である。Mathematica は代数的な因数分解でもなかなか優れ物である。) 従って、$\Gamma(u_0) = \{0, -1\}$ である。そこで

$$F(x,-1) = \frac{1}{2}u_0(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

であるから係数を少し工夫して

$$f_1(x) = -iF(x,-1)^{\frac{1}{2}},$$

$$f_2(x) = iF(x,-1)\int \frac{1}{F(x,-1)^2}dx$$

とおく。これらは $H(u_0)$ の固有値 $-1$ に対応する固有関数である。そこで $u_0(x)$ の固有関数 $tf_1(x) - f_2(x)$ による Darboux 変換を、$\frac{2}{3}$ だけずらしたものを $u(x,t)$ とおく。Mathematica で計算して整理させると

$$u(x,t) = \frac{32e^{2x}(1+e^{2x})(1-t+te^{2x}+x-xe^{2x})}{(1+4te^{2x}-4xe^{2x}-e^{4x})^2} + \frac{2}{3}$$

を得る。これは KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{4}u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

の解である。ところで $\frac{2}{3}$ ずらしたのは、上で得られた KdV 方程式の係数の見栄えを良くするだけの操作に過ぎない。方程式を良い形にするために上のような工夫はしているが、これはまさしく定理 5 の帰結である。これも関数 $u(x,t)$ を上に述べた手順で Mathematica に逐次実行させたうえで定義し、入力

```
D[u[x,t], t] - (3/4) u[x,t] D[u[x,t], x] +
        (1/8) D[u[x,t], {x, 3}]
```

を実行すると膨大な数式が CRT を埋め尽くすが、Simplify[%] を実行させしばらく待つと、コンピュータの勝利か、はたまた数学の勝利か、予想通り 0 を出力してくる。なお、ここが一番時間がかかる。CPU に依存する部分なので、Mac でももっと上位機種を使うか、あるいは最新式の EWS でも使えば速くなるのかも知れないが、コンピュータの無能ぶりを毒づきながら仕事を進めるのもまた一興である。

さて本来の Darboux 変換に戻ると、$H(0)$ の固有値 1 の固有関数による恒等的に 0 に等しい関数の Darboux 変換を出発点に上と同じプロセスをたどれば

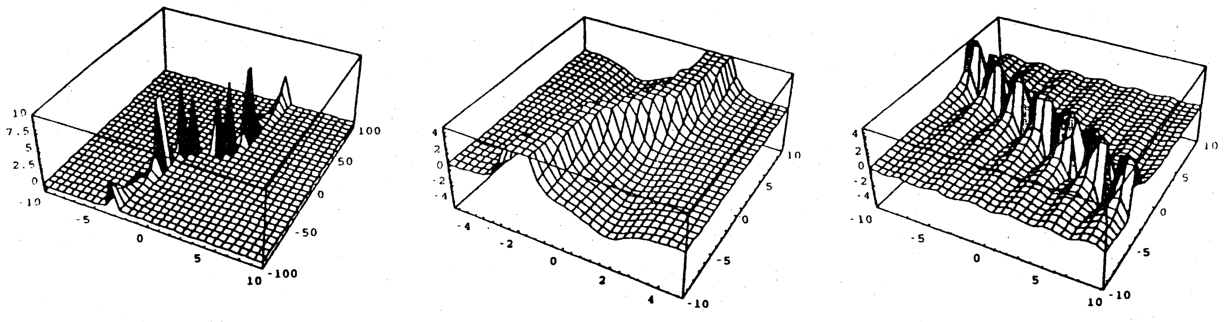
$$v(x,t) = \frac{32\cos x(\cos x + 2t\sin x + x\sin x)}{(4t+2x+\sin 2x)^2} - \frac{2}{3}$$

を得、これも上と同じ KdV 方程式を満たす事が解る。

これらの解は表示式を見ても解る様に特異点を有し、有理ポテンシャルと Bargman ポテンシャル、或いは周期ポテンシャルのハイブリッドな解になっている。となると、Mathematica のセールスポイントでもある 3D グラフィックの機能を活用して視覚的に探って見たくなるのは人情であろう。そこで早速、グラフを描かせてみた。待つ事しばし、CRT 上には図 1 の (a) が色鮮やかに現れた。一瞬私は喜んだ、「全く新しいタイプの解だ。もしかするとカオス的な ….」。しかし、そんな訳は無い、解析的に表示されている以上こんな複雑な挙動を示すのはどこかおかしいと思った時、グラフィックは数値解析であることを思いだした。それまでは Mathematica を、exact なシンボリック計算にばかり使っていたのでうかつにも忘れていた。特異点が存在する以上 3D グラフィックは見て楽しむ分には構わないが、決して、それ以上のものではないと心すべきことを遅ればせながら肝に命じた。そこで、従属変数の評価の最大値を設定しなおしてグラフを描かせたのが図 1 の (b) である。はっきりと特異点の軌跡が曲線

(5) $$t = -\frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} + x$$

になっていることが読み取れる。また、$v(x,t)$ の 3D グラフィックは図 1 の (c) である。なお、関数解析的に取り扱おうとすると、これらの特異点の存在はいかにも具合が悪い。そこで、これらの特異点の発生を避ける方法として立て続けに二度 Darboux 変換を行う二重交換子法 [G] が知られているが、我々の場合は特異点は全く問題は無い。

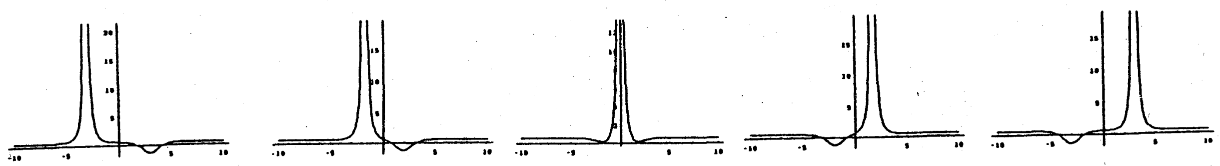


(a) (b) (c)

図 1　$u(x,t)$、$v(x,t)$ の 3D グラフィック

ところで、特異点の軌跡と言えば Calogero 系を思い出すが、(5) の右辺は、$u(x,t)$ の構成法から $f_2(x)/f_1(x)$ と、解の基本系の比で表されるから、それを特徴付ける微分方程式はいわゆる Schwarz 微分を用いて表される。それに関連した考察も後日に期したい。

ところで、図 1 を見ると、特異点の山に凹型のソリトンが追い越され飲み込まれた後再び形を変えずに位相だけ変えて復活しているのが見える。もう少し詳しく見るために 2D グラフを描いてみた。



$t=-100$　$t=-10$　$t=0$　$t=10$　$t=100$

図 2　$u(x,t)$ の 2D グラフィック

これらの正体は、恥ずかしながら実のところまだ私には良く解っていない。広田良吾先生にご教示願ったところ $\tau$ 関数の Wroskian 表示の行列式の成分があるパラメータを含んでいてそのパラメータ微分で有理的な部分が現れたのではないかというアドバイスを受けた。KP 方程式については [H, p117] 参照。KdV 方程式は KP 方程式のリダクションだから、同じことが成り立つはずだが、微分しているはずのパラメータを何にすべきか思い付かない。また、日頃の不勉強から、我々の方法における意味も良くわからないままその所を詰める事無くこの報告を書くことになってしまいましたが、Wronskian 表示との関連も含め後日に期したいと思います。

広田良吾先生には将来の発展を期待できる貴重なアドバイスを頂き心から感謝しています。

最後に、Bulgaria の Y.P.Mishev 氏に心からの謝辞を呈したい。氏は 1992 年 3 月から 4 月にかけて徳島大学国際交流基金で来日し筆者と共同研究を行った。その成果は近刊の [O-M] に発表される。本報告はその結果の一部を一般化し Mathematica を利用しつつ、具体例を通じてその結果の意味を探った研究である。

## 参考文献

[D-G] J. J. Duistermaat and F. A. Grünbaum, Differential equations in the spectral parameter, Commun. Math. Phys., **103**, 177-240 (1986).

[G] F. Gesztesy, A complete spectral characterization of the double commutation method, J. Funct. Anal., **117**, 401-446 (1993).

[G-H-S-S] F. Gesztesy, H. Holden, E. Saab and B. Simon, Explicit construction of solutions of the modified Kadomtsev-Petviashvili equation, J. Funct. Anal., **98**, 311-345 (1991).

[G-K-Z] F. Gesztesy, W. Karwowski and Z. Zhao, Limits of soliton solutions, Duke Math. J., **68**, 101-150 (1992).

[G-S] F. Gesztesy and B. Simon, Constructing solutions of the m KdV-equation, J. Funct. Anal., **89**, 53-60 (1990).

[G-S-S] F. Gesztesy, W. Schweiger and B. Simon, Commutation methods applied to the m KdV equation, Trans. Amer. Math. Soc., **324**, 465-525 (1991).

[G-Z] F. Gesztesy and Z. Zhao, On critical and subcritical Sturm-Liouville operators, J. Funct. Anal., **98**, 311-345 (1991).

[H] R. Hirota, ソリトンの数理, 岩波書店 (1993).

[K] E. R. Kolchin, Differential algebra and algebraic groups, Academic Press, New York (1973).

[O1] M. Ohmiya, On the Darboux transformation of the second order differential operator of Fuchsian type on the Riemann sphere, Osaka J. Math., **25**, 607-632 (1988).

[O2] M. Ohmiya, KdV polynomials and $\Lambda$-operator, preprint.

[O3] M. Ohmiya, $\Lambda$-アルゴリズムとその応用、数理研講究録 822, 206-218 (1993).

[O-M] M. Ohmiya and Y. P. Mishev, Darboux transformation and $\Lambda$-operator, J. Math. Tokushima Univ., **27**, 1-15 (1993).

[Z-M] J. P. Zubelli and F. Magri, Differential equations in the spectral parameter, Darboux transformations and a hierarchy of master symmetries of KdV, Commun. Math. Phys., **141**, 329-351 (1991).