

非線形確率微分方程式と情報の微分幾何学  
— 工学的応用の視点 —

筑波大物質工 金野秀敏 (Hidetoshi Konno)

1. 緒言

原子炉のような巨大な工学システムでは、中性子の輸送・拡散現象と熱水力現象が複雑に絡み合っているばかりでなく、燃料や炉心構造、各種配管等、極めて非均質なシステム構成をとっている。通常、炉心内の状況は沸騰水型原子炉 (BWR) では炉心内に中性子検出器、加圧水型原子炉 (PWR) では炉外検出器が備えられ、原子炉の状態を監視している。この観測される中性子揺らぎの時間変動の情報を用いて、原子炉の内部状態の推定・診断を行っている。この意味で、揺らぎの解析屋は逆問題を解いているわけである。

最近、原子炉でも冷却用の流体 (気液二相流) のチャンネル内での運動を記述する空間不均一モデルからカオスが発生しうる可能性が報告された事 [1]、事故や新型燃料への転換に伴う炉出力振動現象 [2]、制御系の時間遅れに起因すると考えられる炉出力振動 [3] に関連して、原子炉内で観測された中性子の揺らぎ信号の相関次元 (correlation dimension)、リアプノフ指数、埋め込み次元 (embedding dimension) 等を用いた解析の安定性指標としての有効性の検討がなされている [4, 5]。

工学システムの従来の異常診断では揺らぎの周波数スペクトルを観測し、特定の周波数のピークが成長するかどうかを監視する手法が主として採用されてきた。しかし、巨大で複雑な構造を持つシステムでは原因の異なる振動のピーク等が数多く混入し、パワースペクトルの監視のみでは兆候の早期発見は難しい場合が多い。また、カオス解析で用いられているリアプノフ指数や相関次元等の解析の応用の直接的な試みも、素性の明かでない多く雑音源の存在のため、解析結果の信頼性、物理的解釈に問題がある事が指摘されている。時系列から非線形特性を抽出するには、位相空間における軌道のつくる多様体の構造を最大限利用する必要がある。その際より粗視化された情報を用いた方が誤推定・誤判断を回避でき、また、システム同定に動力的物理的意味を導入出来ると考えられる。

カオス的アトラクタ上の軌道の揺らぎはリアプノフスペクトルや一般化フラクタル次元 ( $q=1$  の情報次元、 $q=2$  の相関次元を特別な場合として含む) [6]

$$D_q = \{1/(q-1)\} \lim_{r \rightarrow 0} \{ \log \chi / \log r \} \quad (1a)$$

$$\chi = \sum_i P_i^q \quad (1b)$$

等を用いて特徴付けが可能である。この統計力学的粗視量は、位相空間を微小なセルに分割し、その中に軌道点が通過する確率  $P_i$  を用いて軌道のバンチング (bunching) の様子を  $q$  を変化させたときの幾何学的な形状の変化を通してとらえる。分配関数は  $D_q = \tau(q)/(q-1)$  で定義される事に注意すればルジャンドル変換

$$\alpha(q) = d\tau(q)/dq \quad (2a)$$

$$f(\alpha) = \tau(q) - q d\tau(q)/dq \quad (2b)$$

で  $\alpha$  と  $f$  が決定される。このスケーリング指数  $\alpha$  と関数  $f(\alpha)$  の関係は「特異点

スペクトル」(the spectrum of singularities)と呼ばれている。この定量化の方法はレイリー・ベナル対流のカオス的アトラクタ[7]や乱流の解析[8]ではある程度の成功を納めた。

上記の熱統計力学的方法は「情報の微分幾何学の方法」の理論的枠組みで理解できる。また、「非線形可積分系」との関連が盛んにとりあげられている。各専門分野における応用の進展については文献[9-11]に譲るとして、ここでは複雑な非平衡系である工学システムの一例としての原子炉の揺らぎ信号の解析を通じて「情報の微分幾何学」や「揺動の非可逆循環」との関連を「特異点スペクトル」とは別の角度から考察したので報告する。本報では、特に軌道点のつくる多様体の構造を1本の時系列データを2次元の位相空間に埋め込み[12]、その確率密度関数から抽出されるポテンシャルから(i)系の非線形構造を推定すると共に、(ii)一般化q次元モーメント及び振幅の2次元モーメントと密接な関係のある「揺動の非可逆循環」が原子炉の確率中心多様体ダイナミクスと関連付ける事が出来、安定性指標を抽出できる事、(iii)非線形モデルのパラメータ推定(逆問題)可能性とパラメータが従う力学系の可積分性の関係について述べる。

## 2. 確率中心多様体方程式

原子炉の動力学方程式は中性子の拡散方程式、熱伝達方程式と炉心の冷却材としての流体の結合方程式からなる。炉心内の燃料棒、制御棒、冷却材通路の空間的に不均一な配置が現象の3次元性と関係する。また、沸騰水型原子炉(BWR)では冷却材通路の中で冷却水が下部よりジェットポンプにより注入され、気泡を生成しながら気液2相流として炉心の核分裂熱を奪い二次系へと送られる。これらの熱水力的な挙動は中性子の核分裂反応断面積及び吸収断面積の時空変動を通じて中性子密度の時空変動にフィードバックする。炉出力振動は冷却材の流量が低く、また、気泡の発生により流路抵抗が増大した場合に発生する。安全研究炉(NSRR)では、制御棒に自動制御を働かせたとき制御棒の駆動モータの故障等の為に遅れ時間が長くなり、発振に至ったと推定される[3]。

中性子拡散方程式に(I)中性子場に対する瞬時伝搬近似(Prompt Spread Approximation (PSA))、(II)温度場の均質化近似と断熱近似、(III)制御棒系の断熱近似、(iv)実効中性子寿命 $\Lambda$ を導入する事により、先行核寿命の効果を取り入れる。その結果、次の中性子密度  $N(t)$  に関する非線形動力学モデルを得る。

$$dN(t)/dt = (1/\Lambda)(\rho_0 + \rho(t) - \gamma_r N(t-\tau_r) - \gamma_c N(t-\tau_c)) N(t) \quad (3)$$

ここで、 $\rho_0$ は挿入反応度を表す。また、現実に存在する温度フィードバックの時間遅れ $\tau_r$ 、流体の気泡発生による炉心部通過時間や制御系のフィードバックの時間遅れ $\tau_c$ を導入し、それらの増加に起因する不安定性を考慮した。非線形性は中性子断面積の温度場、2相流場や制御系等の場の変数と中性子場の双1次結合から生じた事に注意する。また、BWRに於ける気泡振動やNSRRに於けるデフューザの動作は温度揺らぎを通じて中性子反応断面積に影響するからパラメトリック雑音 $\rho(t)$ を導入してこの効果を取り入れた。空間依存モデルから均質モデルへの簡単化の際の仮定(I)PSAにより、炉出力が空間的に一様に振動する状況を前提としている事に注意。

炉出力振動(リミット・サイクル振動)の臨界点近傍の振舞いに注目し、時間遅れが小さいとして時間遅れ項をテイラー展開して近似すれば、次の様な確率ファンデルポール(Van der Pol)方程式を得る。

$$m \ddot{y} + [-\alpha + \beta y + \beta y^2] \dot{y} + y = \eta(t) \quad (4a)$$

ここで、 $\cdot$  記号はスケールされた時間  $\xi$  に関する微分をあらわし、 $m, \alpha, \beta, \eta(t)$  は(3)式の炉物理パラメータと次の様な関係がある[3]:

$$\alpha = (1 - \Gamma_{\tau}) + \beta \Gamma_{\tau} - 1/a\tau_c, \quad (4b)$$

$$\beta = 1 / a\tau_c, \quad r = r_{\tau}/r_c, \quad (4c)$$

$$m = (1/2) [ \Gamma_{\tau} r^2 + (1 - \Gamma_{\tau}) ], \quad (4d)$$

$$\xi = \tau_c t, \quad a = \rho_0 / \Lambda, \quad \Gamma_{\tau} = r_{\tau} / (r_{\tau} + r_c). \quad (4e)$$

$$\eta(t) = \rho(t) / \rho_0. \quad (4f)$$

この様に簡単になると炉物理パラメータの変化と共に炉の動特性に起こる質的变化を理解しやすい。また、相乗性(パラメトリック)雑音を有する非線形確率微分方程式が変数変換によって相加性雑音を有する非線形確率微分方程式に変換されている事に注意されたい。雑音源  $\eta(t)$  が無視できる場合の時間遅れを有する微分方程式は無数個の自由度を有するシステムと見なされるが、時間遅れの大きさに対する固有値の変化の様子やアクティブな不安定モードの数に関する解析は文献[3]を参照されたい。リミット・サイクル振動の臨界点近傍では(4)式は次式に示す非線形確率微分方程式の複素標準型:

$$dA/dt = i\omega_0 A + g A - h |A|^2 A + F(t) \quad (5a)$$

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (5b)$$

で運動をよく捉え得ると期待される。この方程式を導く際、系は良く同期して運動しているとし、レーザー物理で回転波近似と呼ばれる近似法を採用している。ここでは実データ解析の簡単化のため  $g, h$  は実数であると仮定する。また、揺動力は複素数をとるとし;

$$F(t) = F_x(t) + i F_y(t) \quad (5c)$$

$$\langle F_i(t) F_j(t') \rangle = D^* \delta_{ij} \delta(t-t') \quad (i, j = x \text{ and } y) \quad (5d)$$

ガウス性及び白色性を仮定して、実験データを用いたシステム同定(炉物理パラメータの推定)を実行する。

この様に雑音源の性質を厳しく限定してしまつては、明らかに、非マルコフ的な確率現象や間欠的な確率振動現象をとらえるには不十分であると考えられるし、同定問題も意味の無い事になるのではないかと危惧されよう。間欠的現象の詳細を捉えるには非線形モデルとして高次の標準型を考え、高次元の位相空間内で同定問題の実行可能性が示される方が好ましい。しかし、実用的には技術的に高度の方法は必ずしも有用とは限らない。この事に関しては7章で考察する。

もう一点、述べて置かなければならない点は、1本の時系列データしか与えられていない場合、位相空間内のアトラクタの再構成をタケンスにより提唱された遅延座標(delay-coordinate)を用いた埋め込みの方法を使って実行すると、幾何学的には同相のアトラクタが再構成できることになっているが、物理量としては1本しか与えられていないわけであるから、あらたに設定された座標軸の物理的意味や座標軸のスケールが本来の系の実在のものとうどう対応するかは注意が必要である。この点を鑑みて、カノニカル変数(同じスケールを持ち、時間発展演算子が自己随伴)で表現された2次元空間に於ける非線形複素標準型を用いてシステム同定する意味が理解できる。

## 3. 2次元確率密度関数

3.1 理論解析 (5a)式で表される非線形複素標準型モデルを極座標に変換すると、係数  $g, h$  を実数に限定し、雑音源  $F_r(t)$  及び  $F_\theta(t)$  の強度が等しい(5c)-(5d)と仮定した事により、振幅  $r (= |A|)$  と位相  $\theta (= (1/2i) \log(A/A^*))$  に関する非線形ランジュバン方程式は次の様に簡単、かつ、分離した形に帰着する:

$$dr/dt = g r - h r^3 + F_r(t) \quad (6a)$$

$$d\theta/dt = F_\theta(t)/r \quad (7a)$$

ここで、 $\langle F_r(t) \rangle = 0, \quad \langle F_r(t) F_r(0) \rangle = D^* \delta(t) \quad (6b)$

$$\langle F_\theta(t) \rangle = 0, \quad \langle F_\theta(t) F_\theta(0) \rangle = D^* \delta(t) \quad (7b)$$

また、(6), (7) 式に対応する振幅と位相のフォッカー・プランク方程式はそれぞれ次のように帰着する:

$$dP(r, t)/dt = - \frac{\partial}{\partial r} (gr - hr^3) P(r, t) + (D^*/2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} P(r, t) \quad (8a)$$

$$dP(\theta, t)/dt = \frac{D^*}{2r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(\theta, t) \quad (8b)$$

ここで、変数変換により規格化の積分は次のようになっている事に注意

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} P(r, \theta, t) r dr d\theta = 1. \quad (9)$$

複素標準系の確率微分方程式の係数  $\{g, h\}$  を実数に限定すれば、(6)式(7)式より容易に振幅と位相の運動が分離可能である。すなわち、理論モデルより期待される定常状態に於ける確率密度関数  $P_s(r, \theta)$  は、位相はランダムな運動をしながら拡散し、 $[0, 2\pi]$  間を一様に運動すると期待されるので極座標表示で次の様に書ける。

$$P_s(r, \theta) = P_0 \exp\{-V(r)/T^*\}/2\pi \quad (10a)$$

ただし、 $A = (X+iY) \exp\{i\omega t\}$ ,  $X = r \cos \theta$  and  $Y = r \sin \theta \quad (10b)$

と置いた。ここで、 $D^*$  は雑音源の強度(5d)とし、 $\omega_0$  は系の固有周波数として、実効温度  $T^*$  は  $T^* = D^*/2$  であり、実効ポテンシャルは次のようになる:

$$V(r) = (-g/2) r^2 + (h/4) r^4 \quad (10c)$$

すなわち、臨界点近傍の近似理論から得られた複素標準型の方程式(1)からは臨界点以下では2次元ガウス分布(図1)、臨界点より上では(4)式のシリンダー状の分布関数(図2)が期待される。

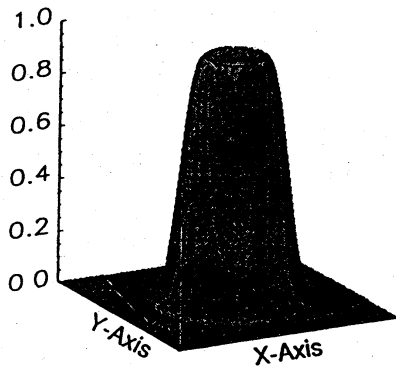


図1 複素標準型のモデル(5)から期待される確率密度関数  $P_s(x, y)$  ( $g < 0$ )

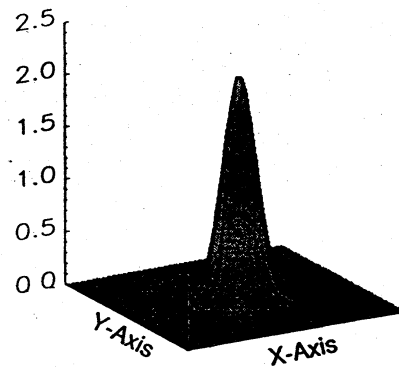


図2 複素標準型のモデル(5)から期待される確率密度関数  $P_s(x, y)$  ( $g > 0$ )

3.2 実験データ解析[13] 解析に利用したデータは日本原子力研究所の安全研究炉 NSRR (Nuclear Safety Reactor)において制御系へのゲイン調整して発振の様子の変化を調べた場合の中性子の揺らぎ信号である。図3にはその時系列データ、図4には振幅  $r$  の確率密度関数  $W_{s,r}(r)$  を示す。データ解析にあたっては、モデル(4)が本来持っていたパラメータの物理的詳細を一旦忘れて、あてはめ定数とみなす。カオス解析で知られているタケンスの埋め込みの方法[12]を遅延座標を用いて実行し、相互情報量が最小になる時間遅れを最適値として採用して2次元の確率密度関数を得た。その結果、定常状態の確率密度関数を

$$P_s(X, Y) = P_0 \exp\{-2 V(X, Y) / D^*\} \quad (11)$$

と表せば、ポテンシャル関数  $V(X, Y)$  として、リミットサイクル振動の発生が明確な場合には次のようなポテンシャル;

$$V(X, Y) = - (g/2) (X^2 + Y^2) + (h/4) (X^2 + Y^2)^2 \quad (12)$$

が得られた(図5)。一方、制御系へのゲインがもっと小さく、リミットサイクル振動の先行振動と見なされる状態の場合のポテンシャルは

$$V(X, Y) = -(a/2)X^2 + (b/2)Y^2 + (h/4)(X^2 + Y^2)^2 \quad (13)$$

と表現される事がわかった(図6)。また、さらにゲインが小さな状態では振動は間欠的で極小点が三個存在するポテンシャルで表現される事がわかった。しかし、(13)式のようなポテンシャルの出現理由は白色雑音を有する(4)または(5)式からは見つからない。また、ガウス白色雑音がパラメータ励振型で影響しているとしても(13)のようなポテンシャルは得られない。白色雑音とする現象の粗視化がこの場合には妥当でなく、非白色雑音の存在(言い替えると、状態変数が完全系を構成できていない)によりこのような結果がもたらされた可能性がある。(13)のようなポテンシャルを得る為には(4)式に対称性を破る  $g'A^*$  を付け加える必要がある。可能性としては、何らかの非定常性や原子炉内の空間結合の存在等が考えられる。

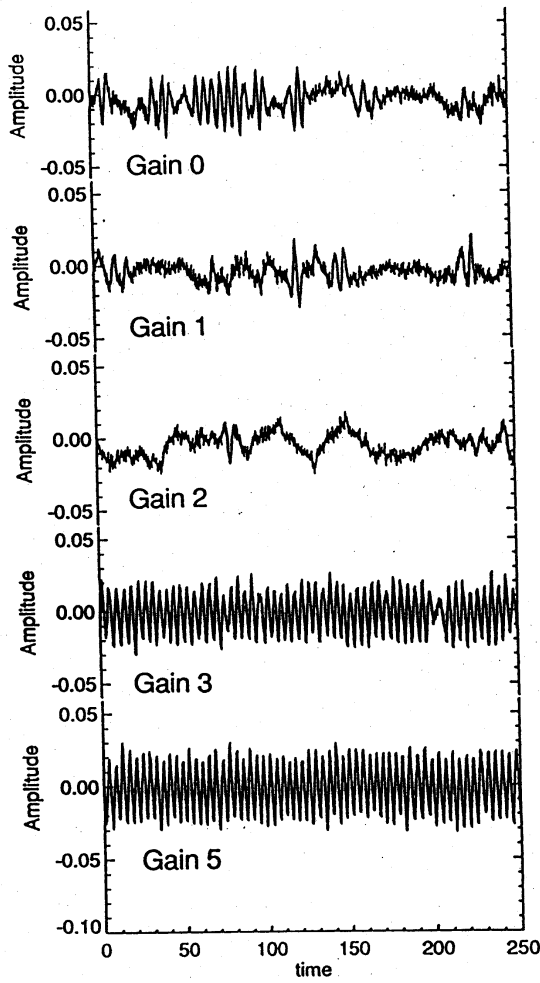


図3 制御系へのフィードバック・ゲインの変化に伴う炉出力パタン  
の変化の様子。ゲイン0、1、2  
では間欠的振動となっている。

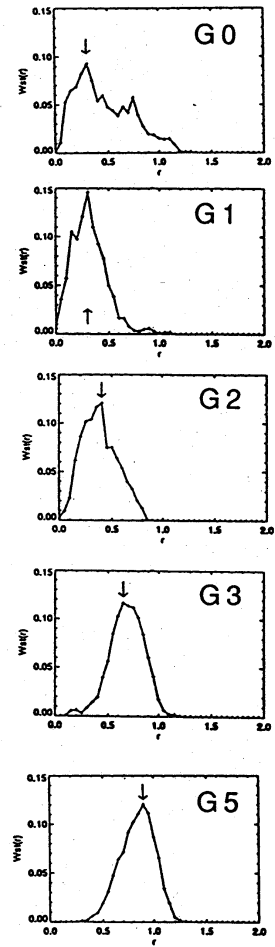


図4 振幅に関する確率密度関数  
 $P_s(r)$ 。最も確からしい値  $r_m$  はゲ  
インの増加と共に増加する。

G 3 ( $\tau=30$ )



図5 実炉(NSRR)での出力振動から  
推定された確率密度関数  
 $P_s(x, y)$ の等高線図  
(Gain 3の場合)  
 $\tau=30 \Delta t, \Delta t=0.0625 \text{ sec}$

G 2 ( $\tau=35$ )



図6 実炉(NSRR)での出力振動から  
推定された確率密度関数  
 $P_s(x, y)$ の等高線図  
(Gain 2の場合)  
 $\tau=35 \Delta t, \Delta t=0.0625 \text{ sec}$

4. 一般化 q 次モーメントと非可逆循環

この結果を原因究明でなく、システムの安定性指標の探索の観点から考えると、ゲインの小さな場合に見いだされた2次元のダフィング振動子型のポテンシャルは発振の前兆・兆候となる過渡状態とみなす事が出来よう。このポテンシャルをパターン認識するナイーブな考えから一歩進んで、粗視化した統計量を提案しよう。その候補としては振幅分布の q 次モーメント（または、キュムラント）が考えられる。(1)のモデルの場合これは解析的に求まる [5]:

$$\langle r^q \rangle = (2b)^{-q/4} \Gamma(q/2+1) D_{-(q/2+1)}(a/2b) / D_{-1}(a/2b) \quad (14)$$

ここで、 $a = g/D^2$ ,  $b = h/2D^2$ ,  $D_\nu(x)$  はパラボリック・シリンダー関数、 $\Gamma(z)$  はガンマ関数である。この一般化され、規格化されたモーメントを q の関数として表現するとノイズによる時系列の汚れの影響をある程度解消でき、また、通常の運転時のガウス分布からのずれを容易に検出可能である。さらに、q による変化と実効ポテンシャルの対応も付けられる。(図7)

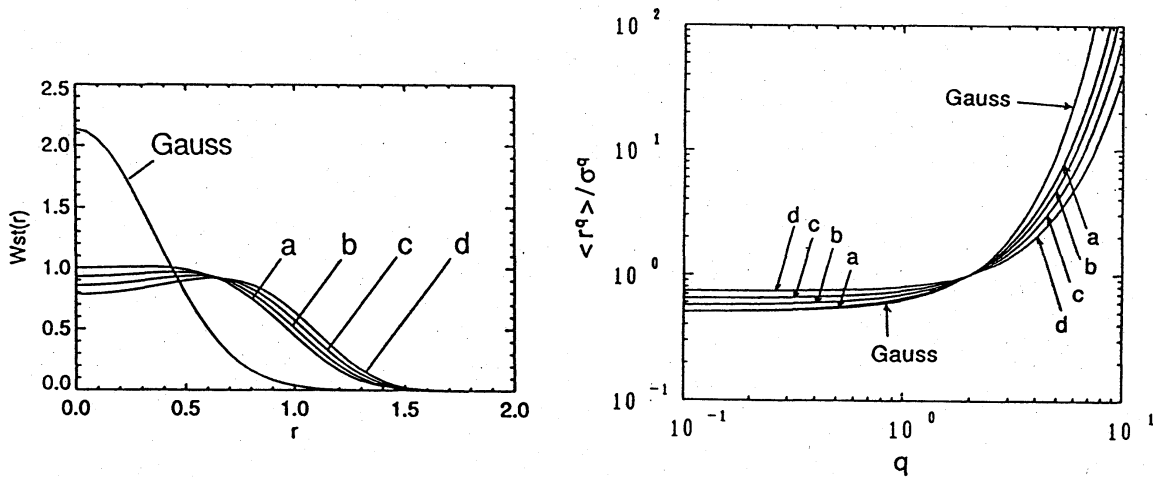


図7 振幅の分布関数と対応する一般化 q 次モーメントの q 依存性

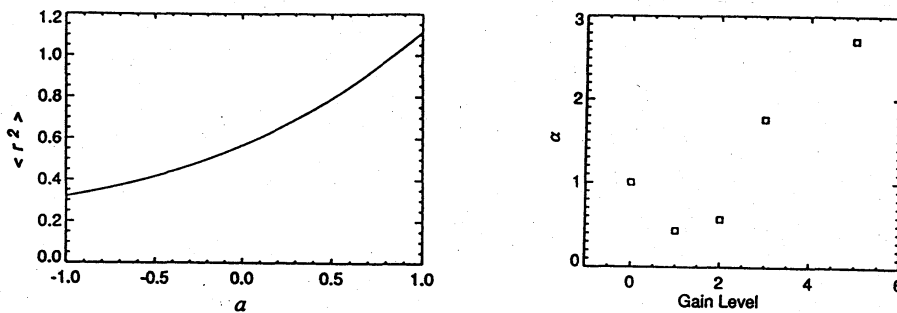


図8 理論式(16)から計算した揺動の非可逆循環の g 依存性と実験での制御系へのフィードバック Gain 依存性

これから、原子炉の安定性指標として、様々なオーダパラメータを考える事が出来る。すなわち、(a) 規格化されたq次モーメント（または、キュムラント）のガウス分布の場合との差；(b) 規格化されたq次モーメント（または、キュムラント）の勾配；(c) 2次モーメントの絶対値等である。これらは、積分値であるから観測雑音や未知の雑音による推定誤差を比較的低減出来て居る事が期待される。さらに、このq次モーメントの情報を使ってポテンシャルを推定可能である事も期待される。また、2次元位相空間での振幅  $r$  のモーメントの絶対値を知る為に振幅の2次モーメント  $\langle r^2 \rangle$  について考えてみよう。この物理量は2次元の位相空間  $(r, \theta)$  での運動の場合、富田ら[14]によって非平衡開放を特徴付ける量として提案された「揺動の非可逆循環」A と関係付けられる：

$$A = (1/2) \langle r^2 \dot{\theta} \rangle \quad (15)$$

振幅と位相の運動が独立として良い場合、 $\langle r^2 \dot{\theta} \rangle = \langle r^2 \rangle \langle \dot{\theta} \rangle = \langle r^2 \rangle \omega_0$  と評価出来、モデル(1)から循環は次のように評価できる：

$$A = \omega_0 g/h/2 + (\omega_0/2) (2D^*/h\pi)^{1/2} \exp(-g^2/2hD^*) / (1 + \operatorname{erf}(g/(2hD^*)^{1/2})) \quad (16)$$

ここで、 $D^* = D/\omega_0$ 、 $\operatorname{erf}(x)$  は規格化されたガウスの誤差関数である。この表式では、転移点より上の場合が与えられているが平均の循環とそのまわりの揺らぎの循環が明確に分離されている事に注意されたい。パラメータ  $g$  の関数として、循環の値の変化の様子の理論曲線と実験データから計算した値を比較すると、実験では一度小さくなってから再び増加する傾向みられる（図8）。類似の現象として、ヤリイカの発振の臨界点の接近の途中で振動のピークの強度が一度低くなってから再び増大するという結果が報告されており、こらは空間結合と関係する事が示唆されている。

### 5. 揺動散逸定理

振幅と位相が分離される場合の振幅に関するランジュバン方程式は1次元の拡散過程と同様であり、積分範囲と直交座標系から極座標系への座標変換に伴うヤコビアン  $J=r$  なる事のみ異なる。この点に注意すると、非可逆循環の関係式(16)式は、まさに、岡部氏により提唱されている非線形ランジュバン方程式に対する揺動散逸定理[15]そのものである事が理解される。実際、一般化拡散係数  $D_r$ 、一般化抵抗  $C_{r,r}$  を確率密度関数を用いた定義に従って計算してみると、次のようになり、等価性が確認できる。

$$D_r = \int_0^\infty r^2 (dV(r)/dr) P_s(r) dr = D^* \quad (17)$$

$$C_{r,r} = \int_0^\infty r^2 (dV(r)/dr) P_s(r) dr / \int_0^\infty r^3 P_s(r) dr \quad (18)$$

### 6. 情報の微分幾何[16]

規格化した確率分布関数(11)を(12)のポテンシャル関数  $V(r)$  の場合に極座標で表現すると

$$P(r) = \exp(\phi_1 r^2 - \phi_2 r^4 - \psi(\phi_1, \phi_2)) \quad (19a)$$

$$V(r) = (D^*/2) (-\phi_1 r^2 + \phi_2 r^4) \quad (19b)$$



が得られる。これは、指数関数族に分類され次のようなポテンシャル関数  $\psi(\phi)$  を定義できる:

$$\psi(\phi_1, \phi_2) = -(1/2) \log \phi_2 + (1/4) \phi_1^2 \phi_2^{-1} + \log(1 + \text{erf}(\phi_1/2\phi_2)) \quad (20)$$

ここで、2個のパラメータ  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  は

$$\phi_1 = g/D^* \quad \text{及び} \quad \phi_2 = h/2D^* \quad (21)$$

で与えられる。Fischer 情報行列は

$$g_{ij} = \partial_i \partial_j \psi(\phi_1, \phi_2) \quad (22)$$

から計算でき、双対座標  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  は次のようになる:

$$\begin{aligned} \eta_1 = \partial_1 \psi = \langle r^2 \rangle &= (\phi_1/2\phi_2) + (1/\pi\phi_2)^{1/2} \exp(-\phi_1^2/4\phi_2) / (1 + \text{erf}(\phi_1/2\phi_2)) \\ \eta_2 = \partial_2 \psi = \langle r^4 \rangle &= (1 + \phi_1^2/2\phi_2) / 2\phi_2 \\ &\quad + (\phi_1/2\phi_2) (1/\pi\phi_2)^{1/2} \exp(-\phi_1^2/4\phi_2) / (1 + \text{erf}(\phi_1/2\phi_2)) \end{aligned} \quad (23)$$

ガウス分布の場合の双対座標は1次及び2次モーメントである[9-11]事に注意する。パラメータに対する勾配方程式[17, 18]

$$(d\phi/dt) = -g_{ij} \partial_j \phi \quad (24)$$

はルジャンドル変換により線形化可能となり、可積分かつ流れはポテンシャルの最小点に指数関数的に収束する。これは、モーメントの情報を用いてパラメータを推定する逆問題が解けることを意味する。このように、逆問題が解けるようになったのは現象を粗視化し、雑音源をガウス白色雑音であるとみなして現実の非白色性をポテンシャルに押しつけた結果である。

非線形複素標準型方程式として相加性雑音のみを仮定して議論をおこなってきたが、相乗性雑音の印加はどのような結果をもたらすのか考察しておく。振幅に関するランジュバン方程式は

$$dr/dt = (g + \xi_r(t)) r - h r^3 \quad (25)$$

となり、雑音源の白色性  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t) \xi(0) \rangle = D^* \delta(t)$  とガウス性を仮定すると、定常状態での確率密度関数は次式で与えられる:

$$P_s(r) = (2g/D^*) (h/D^*)^{q/2} r^{2q/2-2} \exp\{-h r^2 / D^*\} \quad (26a)$$

$$= \exp\{2(\phi_1-1) \log r - \phi_2 r^2 - \psi(\phi_1, \phi_2)\} \quad (26b)$$

$$V(r) = (D^*/2) (-2(\phi_1-1) \log r + \phi_2 r^2) \quad (26c)$$

一般化  $q$  次モーメントは

$$\langle r^q \rangle = \phi_1 \phi_2^{-q/2} \Gamma(\phi_1 + q/2) / \Gamma(\phi_1 + 1) \quad (27)$$

となり、2次モーメント  $\langle r^2 \rangle = g/h$  は雑音源の強度  $D^*$  に依存しない。また、ポテンシャル関数  $\phi(\phi)$  は次式のように定義できる:

$$\phi(\phi_1, \phi_2) = \log \Gamma(\phi_1 + 1) - \phi_1 \log \phi_2 - \log \phi_1 - \log 2 \quad (28)$$

ここで、 $\phi_1 = g/D^*$  及び  $\phi_2 = h/D^*$  (29)

Fischer 行列  $G$  及び双対座標  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  は次のように求められる:

$$G = \begin{pmatrix} \gamma(\phi_1) + \phi_1^{-2} & -\phi_2^{-1} \\ -\phi_2^{-1} & \phi_1 \phi_2^{-2} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\eta_1 = \partial_1 \phi = \gamma(\phi_1) - \log \phi_2 - \phi_1^{-1} \quad (31)$$

$$\eta_2 = \partial_2 \phi = -\phi_1 / 2\phi_2 \quad (32)$$

ここで、 $\gamma(z) = (d/dz) \log(z+1)$  (デイ・ガンマ関数) (33)

である。この場合も勾配方程式は可積分系となり、逆問題が解ける事が理解される。

注意すべき点として、相加性雑音の場合には相対座標が  $\eta_1 = \langle r^2 \rangle$ ,  $\eta_2 = -\langle r^4 \rangle$  であったのに対し、この場合は  $\eta_1 = \langle \log r \rangle$ ,  $\eta_2 = -\langle r^2 \rangle$  と対応している。相乗性雑音の場合には、非線形変換(対数変換)によりシュレディンガー型の方程式に変換でき、時間に依存した問題でも可積分(フォッカー・プランク方程式の初期値問題が解ける)となっている。

### 7. 3次の非線形動力学方程式の標準系

間欠的振動現象は雑音源の白色性を前提とした非線形複素標準型モデルではうまく同定出来ない事はすでに述べた。間欠的振動現象を発生しうる非線形確率モデルの最も簡単なものはパラメトリックな非白色雑音  $\xi(t)$  を散逸項に有する確率ファン・デル・ポール方程式

$$\ddot{x} + (-\alpha + \beta x^2 + \xi(t)) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (34)$$

である(文献[19]及びその引用文献参照)。図9にその例を示す。

非白色雑音を特徴付けるのパラメータを一般的な形で定義するのは困難である。岡部氏により非マルコフ・ランジュバン方程式の揺動力の抽出アルゴリズムとその同定予測問題への応用の試みがなされている[21]が、以下では、間欠性を生ずる非線形構造を導入し残りを白色雑音とする同定問題を考える。このような観点から、もっと広いクラスの非線形確率微分方程式[6]の逆問題さらには非線形可積分系を見直す事は興味深い[19]。

いま揺らぎを  $f(t)$  として、3次の非線形実数標準型は次のようになる:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (-\eta - k_3 x^2 - k_0 x \dot{x}) \dot{x} + (-\nu - k_2 x^2 - k_4 x \dot{x} - k_5 x^2) \dot{x} \\ - \mu x - k_1 x^3 = f(t) \end{aligned} \quad (35)$$

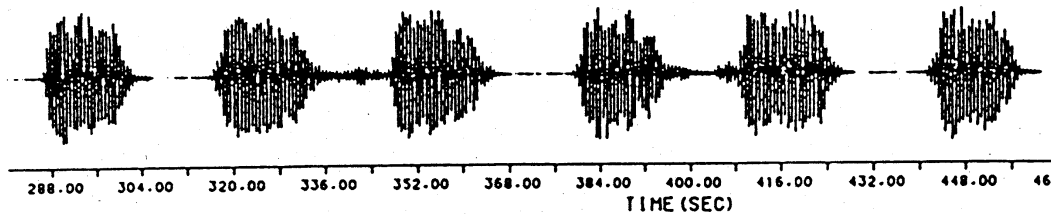


図9 散逸項に非白色雑音を有する確率ファン・デル・ポールモデルから得られる間欠的振動パターン。様々な間欠振動のタイプが存在し、雑音 $\xi(t)$ の種類に強く依存する。

ただし、ここでは非線形項だけでも十分複雑なので、揺らぎ $f(t)$ は強度 $D$ の相加性ガウス・白色性を仮定した。このような標準型に変換することで、パラメータの数を通減することができる。ちなみに、パラメータは $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ 、 $\mu$ 、 $\nu$ 、 $\eta$ 及び $D$ の10個が存在する。固有値問題はシルベスタ(Sylvester)行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu & -\nu & -\eta \end{pmatrix} \quad (36)$$

と関係し、固有値を決めているのは $\mu$ 、 $\nu$ 及び $\eta$ の3個のパラメータである。すなわち、特性方程式は

$$s^3 + \eta s^2 + \nu s + \mu = 0 \quad (37)$$

となつて、臨界点近傍の振舞いはこの固有値の性質である程度推定できる。現在までのところ、この方程式から出現する振動パターンの全てを分類することは出来ていない。しかし、ある特殊な場合の性質に注目しその運動の質が実験で観測されたものと同相であるか否かの分類は可能であろうと期待される。

ここでは、3個の固有値が saddle-focus 型である場合：

$$\{\rho \pm i\omega, \lambda\} \quad (38)$$

についての考察を行おう。この場合 $\rho$ と $\lambda$ の符号により2つの型に分類できる：

- (i) multi-branched ( $\rho > 0$  and  $\lambda < 0$ )
- (ii) multi-humped ( $\rho < 0$  and  $\lambda > 0$ )

上記方程式は次の型に帰着する：

$$\dot{x} = \rho x + \omega y + P(x, y, z, \dots)$$

$$\dot{y} = -\omega x + \rho y + Q(x, y, z, \dots) \quad (39)$$

$$\dot{z} = \lambda z \quad (40)$$

さらに、  $|\rho/\lambda| < 1$

の場合には位相空間での運動は図10の様なものになると期待される。しかし、このように限定しても未知のパラメータは  $\{k_i\} (i=1-6)$  と  $D$  の7個残っており、ポテンシャル条件が成立する場合を除いて、同定アルゴリズムは完成していない。系の物理的な背景を考慮に入れて非線形項の種類に制限を加える等して、係数推定という逆問題を解きうる形式に持ってゆく必要がある。



図10 (i)、(ii)の型の場合の3次元位相空間での運動の概念図

## 8. 結言

可積分ソリトン方程式系の多ソリトン解は行列の恒等式とみなす事が出来る[20]が、別の見方をすると、非線形変換によって線形のシュレディンガー(SCH)型方程式に変換出来るならば可積分となる。相加性雑音を有する非線形確率微分方程式の実数係数複素標準型方程式(2次元)の場合でも、対応するフォッカー・プランク(FP)方程式が非線形変換でSCH型の固有値問題に帰着出来るならば可積分系となる。実数係数複素標準型方程式(5)の場合、振幅と位相運動は分離でき、振幅方程式は変数  $A$  が実数(1次元)の場合と同様SCH型の固有値問題に帰着できるが、現在までのところ厳密解は見つかっていない。一方、相乗性雑音を有する場合、振幅のFP方程式は厳密解が得られる。

一方、(5)式に対応するFP方程式の定常解(振幅分布)  $P_s(r)$  を特徴つける2次元位相空間での幾何学的ポテンシャルとして

実効ポテンシャル  $V(r)$  と 情報幾何ポテンシャル  $\phi(\phi_1, \phi_2)$

の2つがあり、関連した一般化  $q$  次モーメントの  $q$  依存性とポテンシャルの関係、非可逆循環との関係を明かにし、物理的意味を明かにした。また、パラメータの組のつくる位相空間でのパラメータに対する勾配方程式は揺動力がガウス・白色雑音の仮定により可積分系を構成し、逆問題可解性を保証する。

揺動力が白色雑音でないと考えられる原子炉の中性子信号時系列データを2次元空間に埋め込んだ結果、2次元のダフニング方程式とみなせる実効ポテンシャル(13)が推定された。この場合、振幅と位相の方程式は分離出来ず、情報幾何ポテンシャル  $\phi(\phi)$  の解析表現は一般的に簡単には求まらない。主軸座標  $(X_p, Y_p)$  へと座標変換し、1変数の確率密度関数  $P(X_p)$  に関連した1次元問題に落としても情報幾何ポテンシャルの解析表現は得られない。

今後の課題として、複素標準型(5)で係数  $\{g, h\}$  が全て複素数になっているだ

けでなく、対称性を破る項を考慮した確率微分方程式に対する定常分布の張るパラメータの勾配方程式と関連した逆問題の定式化を考えてゆく必要がある。すなわち、複素標準型としてより一般的な

$$dA/dt = g A + g' A^* - h |A|^2 A - h' |A|^2 A^* + F(t) + \xi(t)A \quad (41)$$

で、係数  $\{g, g', h, h'\}$  が全て複素数であり、 $D^*$ ,  $D^*$  を雑音源の強度として、10個のパラメータの存在する場合の情報の微分幾何学と逆問題可能性を調べつくしておく必要がある。

いずれにせよ、位相空間内に於ける点の濃淡の情報、すなわち、確率密度関数（定常分布）のみを用いているので、パラメータ推定の際雑音源の強度と散逸係数の絶対値が定まらない。定常分布に基づいた情報の微分幾何と実効ポテンシャル推定問題だけでは情報が足りない場合、位相空間内での軌道の時間的推移様式情報をも用い、同定問題にどう利用するかを定式化する必要がある。

#### 謝辞

京大数理解析研の研究会において高崎金久氏、中村佳正氏はじめ研究会参加者の方々より有益なコメントをいただいた。ここに、感謝の意を表します。また、原子炉雑音解析で平素より議論していただいている岸田邦治氏にも、非可逆循環の定義と応用に関して有益なコメントをうけた事に感謝します。なお、この研究の一部は原研の林光二氏、篠原慶邦氏との共同研究によっている。

#### 参考文献

- [1] Takenaka, N. et al., Trans. Amer. Nucl. Soc. 63 (1991) 197 及引用文献.
- [2] Bergdahl, B. et al. Ann. Nucl. Energy 16 (1989) 509.
- [3] H. Konno, K. Hayashi and Y. Shinohara, Ann. Nucl. Energy 17 (1990) 317; idem, J. Nucl. Sci. & Technol. 29 (1992) 530.
- [4] 武内豊, 宮本久, システム制御研究会資料(1992)12月9日、東大電気工学科.
- [5] T. Suzudo et al. Nucl. Sci. Engng 113 (1993) 145.
- [6] Halsay, R.T. et al., Phys. Rev. A33 (1993) 1141.
- [7] Jensen, M.H. et al., Phys. Rev. Lett. (1985) 2798.
- [8] Prasad, R.R. et al., Phys. Rev. Lett. (1988) 74.
- [9] 甘利俊一, 長岡浩司「情報の微分幾何の方法」(岩波) 1993
- [10] 甘利俊一他「情報空間」数理科学 366 (サイエンス社) 1993
- [11] S. Amari: Differential Geometrical Methods in Statistics, Springer Lecture Note in Statistics, 28, 1985.
- [12] Takens, F., in Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics Vol.989, (1981) p366, Edited by D. A. Rand et. al., Springer.
- [13] H. Konno, K. Hayashi and Y. Shinohara, Ann. Nucl. Energy 21 (1994) 印刷中
- [14] K. Tomita and H. Tomita, Progr. Theor. Phys. 51 (1974) 1731.
- [15] Y. Okabe, Commn. Math. Phys. 98 (1985) 449.
- [16] H. Konno, (unpublished)
- [17] Y. Nakamura, Japan J. Indust. Appl. Math. 10 (1993) 179.
- [18] Y. Nakamura, ibid.
- [19] 金野秀敏, 「非線形動力学方程式の標準型と逆問題」, JAERI-m-05-315 (1993), p65-78.
- [20] 広田良吾, 「ソリトンの数理」岩波(1992).
- [21] Y. Okabe and T. Nakano, Hokkaido Math. J 20 (1991) 45.