

Kepler 型対称性をもつ自由度 3 のハミルトン系 (非線形可積分系の例)

京都大学・工学部 岩井敏洋 (Iwai, Toshihiro)

大阪府立工業高等専門学校 片山登揚 (Katayama, Noriaki)

Kepler 運動は、角運動量ベクトルに加えて Runge-Lenz ベクトルと呼ばれる保存ベクトルが存在し、非線形可積分系の例となっていることはよく知られている。Kepler 運動の拡張である MIC-Kepler 運動も Kepler 運動と同様に、2つの保存ベクトルが存在することが示されている。さらに、これらの2つ力学系には、有界な軌道はすべて閉軌道となるという性質がある。また、角運動量ベクトルと Runge-Lenz ベクトルは、Poisson 括弧のもとで閉じて $SO(4)$ の Lie 代数をなすことも知られている。これらの性質を、ここでは Kepler 型対称性と呼ぶことにする。他方、 $\mathbf{R}^4 - \{0\}$ で定義された Taub-NUT 計量における測地流は、 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上のハミルトン系とみなされる。それを $U(1)$ 作用で簡約化して得られる $T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\})$ 上の力学系も Kepler 型対称性を持つことが示されている。

そこで、本講では、まず Kepler 型対称性に注目して、Taub-NUT 計量を拡張し、得られた計量を Kepler 型計量と呼ぶ。これに対応する測地流力学系の簡約化力学系は MIC-Kepler 運動の拡張になっていることが解る。簡約力学系の有界軌道が閉じるという要請からも、Taub-NUT 計量の拡張として Kepler 型計量を得られるが、同時にその簡約力学系が調和振動子型の対称性を持つような計量も見いだされる。この4次元計量を調和振動子型計量と呼ぶ。さらに、Kepler 型対称性を持つ簡約力学系と平面3体系との関係についても議論する。最後に、簡約力学系において有界な軌道がすべて閉じるという性質のみに注目して見いだされる rationally-fold Kepler 系についても簡単に触れる。

1 MIC-Kepler 運動と Kepler 型対称性

本節では、Kepler 運動の拡張である MIC-Kepler 問題の Kepler 型対称性について、簡単に述べる。MIC-Kepler 問題 [1] は、 $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ において、次の運動方程式で支配される力学系である。

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}},$$
$$\mathbf{B} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\mu^2}{2r^2}$$

ただし、 $r = |\mathbf{r}|$ で、 μ, k は実定数 ($k > 0$). $\mu = 0$ のときが普通の Kepler 問題である。この系には2つの保存ベクトル、角運動量ベクトル \mathbf{J} と Runge-Lenz ベクトル \mathbf{R}

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{R} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{J} - k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

が存在し、そのことから、解軌道が円錐曲線になることが結論できる。すなわち、 \mathbf{J} と \mathbf{r}/r の内積 $(\mathbf{J}, \mathbf{r}/r) = \mu$ から、解軌道は円錐上の上のっていることがわかり、また

$$\mathbf{N} = \mu \mathbf{R} + k \mathbf{J}$$

とおくとき、 $(\mathbf{N}, \mathbf{r}) = \mu(|\mathbf{J}|^2 - \mu^2)$ から、軌道は平面曲線をなすことがいえるので、結局解軌道は、円錐と平面との交線である円錐曲線であることがわかる。特に、有界な軌道はすべて閉軌道となることがわかる。

2 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ の簡約化と MIC-Kepler 問題

本節では、 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上のハミルトン力学系が $U(1)$ 対称性を持つとき、どのように、 $T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\})$ 上の力学系に簡約化されるかをみる。 $\pi: \mathbf{R}^4 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$ は構造群 $SO(2) \cong U(1)$ をもつ主バンドルである。 $U(1)$ の作用は行列

$$T(t) = \begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & R(t) \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} \cos t/2 & -\sin t/2 \\ \sin t/2 & \cos t/2 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$x \mapsto T(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^4$$

で定義される。このとき、底空間 $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ のデカルト座標を $(q_k), k = 1, 2, 3$ とすれば、射影は π は

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で与えられる。また、

$$r := \sqrt{\sum_{k=1}^3 q_k^2} = \sum_{j=1}^4 x_j^2$$

に注意。

$U(1)$ の作用を、symplectic 作用として、 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ に持ち上げて

$$(x, y) \mapsto (T(t)x, T(t)y), \quad (x, y) \in (\mathbf{R}^4 - \{0\}) \times \mathbf{R}^4$$

とし、これを用いて 標準的 symplectic 形式

$$d\theta = \sum_{j=1}^4 dy_j \wedge dx_j, \quad \theta = \sum_{j=1}^4 y_j dx_j$$

をもつ相空間 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ を簡約化する。 $U(1)$ に付随する運動量写像 $\Phi : T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}$ は

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(-x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_4 y_3 + x_3 y_4)$$

で与えられる。 $\mu \neq 0$ のとき、簡約化相空間 P_μ は

$$\pi_\mu : \Phi^{-1}(\mu) \longrightarrow P_\mu := \Phi^{-1}(\mu)/U(1)$$

で定義され、 $T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}) \cong (\mathbf{R}^3 - \{0\}) \times \mathbf{R}^3$ と同相になることが証明できる。実際、 $(q, p) \in (\mathbf{R}^3 - \{0\}) \times \mathbf{R}^3$ は前述の q と

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \Phi/r \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

で実現できる。今

$$\iota_\mu : \Phi^{-1}(\mu) \longrightarrow T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$$

を包含写像とすると、簡約化 symplectic 形式 σ_μ は簡約化相空間上で

$$\pi_\mu^* \sigma_\mu = \iota_\mu^* d\theta$$

により定義される。具体的には、

$$\sigma_\mu = \sum_{k=1}^3 dp_k \wedge dq_k - \frac{\mu}{r^3} (q_1 dq_2 \wedge dq_3 + \text{cyclic})$$

と書ける。この第2項は第1節の $B = -\mu \mathbf{r}/r^3$ に対応する。

MIC-Kepler 問題は symplectic 多様体 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu)$ 上で定義される力学系である。その Hamiltonian H_μ は $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上の Hamiltonian

$$H_c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4r} \sum_{j=1}^4 y_j^2 \right) - \frac{k}{r} \quad (k > 0, \text{const.})$$

を簡約化 $H_c \circ \iota_\mu = H_\mu \circ \pi_\mu$ して得られる [2]。

$$H_\mu = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$$

この Hamiltonian に対し $i(X_{H_\mu})\sigma_\mu = -dH_\mu$ で Hamiltonian ベクトル場 X_{H_μ} を導けば、前節で与えた運動方程式が得られる。ただし、 $i(\cdot)$ は内部積 (縮約) を表す。また、symplectic 形式 σ_μ から、誘導される Poisson 括弧のもとで、保存ベクトル \mathbf{J} と \mathbf{R} は、軌道が有界なとき $SO(4)$ の Lie 代数の交換関係をなすことが示される。

3 Taub-NUT 計量の測地流に付随する力学系

本節では、Taub-NUT 計量の測地流を $U(1)$ 対称性で簡約化した力学系が Kepler 型対称性を持つことを示す [3,4]。

$\mathbf{R}^4 - \{0\}$ において

$$x_1 + ix_2 = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi+\phi}{2}}, \quad x_3 + ix_4 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\phi}{2}}$$

により、座標系 (r, θ, ϕ, ψ) を導入する。ただし、 $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$. この座標系で、定数 m を用いて

$$ds^2 = \left(1 + \frac{4m}{r}\right)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) + \left(\frac{(4m)^2}{1 + 4m/r}\right)(d\psi + \cos \theta d\phi)^2$$

で定義される計量を Taub-NUT 計量と呼ぶ。この計量に対する測地流は $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上の力学系である。これを、第 2 節の方法で簡約化すると、 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu)$ 上の力学系で Hamiltonian

$$H_\mu = \frac{1}{2 + 8m/r} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2(1 + 4m/r)}{32m^2}$$

をもつものが得られる。回転対称性から、角運動量

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r}$$

が保存量であることが容易に証明できる。さらに、Runge-Lenz ベクトルとして

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} \times \mathbf{J} - 4m\left(E - \left(\frac{\mu}{4m}\right)^2\right)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

が保存されることが示される。ここで、 E は全エネルギーである。

やはり、第 1 節の MIC-Kepler 運動と同様に、角運動量ベクトルと Runge-Lenz ベクトルを用いて簡約力学系の軌道は円錐曲線となることが示され、特に、有界な軌道はす

べて閉となることが解る。さらに、角運動量ベクトルと Runge-Lenz ベクトルは Poisson 括弧のもとで閉じていることも同様に示される。したがって、Taub-NUT 計量の測地流を簡約化した力学系も MIC-Kepler 運動と同様に、Kepler 型対称性をもつことがわかる。4次元計量としての Taub-NUT 計量は、Einstein 計量でかつ Ricci flat でしかも自己双対であることが知られている。

4 Kepler 型計量と調和振動子型計量

本節では、Taub-NUT 計量を Kepler 型対称性に注目して拡張することを考える。まず、Taub-NUT 計量を

$$ds_G^2 = f(r)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) + g(r)(d\psi + \cos \theta d\phi)^2$$

と拡張して一般化 Taub-NUT 計量と呼ぶ。前節の Taub-NUT 計量の場合と同様の簡約化の議論がなりたつ。つまり、この計量に対する測地流は $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ 上のハミルトン力学系であり、これを第2節の方法で簡約化すると、 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu)$ 上の力学系で Hamiltonian

$$K_\mu = \frac{1}{2f(r)} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2g(r)}$$

をもつものが得られる。回転対称性から、角運動量

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r}$$

が保存量であることが容易に証明できる。角運動量ベクトルを用いて、軌道は円錐上に拘束されることも示される。ここで、Kepler 型の対称性を特徴付ける Runge-Lenz ベクトルの存在を仮定する。つまり、Taub-NUT 計量のときのように

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{J} - \kappa \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \kappa = \text{const. of motion}$$

の形の保存量が存在すること (κ を単なる定数でなく、運動の定数としているところに注意) を要請すると、 f, g, κ が次のように決まる [5]。

$$f(r) = \frac{a + br}{r}, \quad g(r) = \frac{(a + br)r}{1 + cr + dr^2}$$

$$\kappa = aK_\mu - \frac{c\mu^2}{2}$$

ただし、 a, b, c, d は定数である。このように定められた $f(r), g(r)$ をもつ計量

$$ds_K^2 = \frac{a + br}{r}(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) + \frac{ar + br^2}{1 + cr + dr^2}(d\psi + \cos \theta d\phi)^2$$

を Kepler 型計量または 拡張型 Taub-NUT 計量と呼ぶ。実際、 $4m = a/b, c = 2b/a, d = (b/a)^2$ のときには、定数倍をのぞいて、

$$f(r) = 1 + \frac{4m}{r}, \quad g(r) = \frac{(4m)^2}{1 + 4m/r}$$

をもつ Taub-NUT 計量に帰着するからである。

Kepler 型計量に付随する力学系 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu, K_\mu)$ の Hamiltonian を具体的に書いておくと

$$K_\mu = \frac{r}{a + br} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} + \frac{c\mu^2}{2r} + \frac{d\mu^2}{2} \right)$$

特に、 $a = 0, b = 1, c\mu^2/2 = -k, d = 0$ とすると、MIC-Kepler 運動の Hamiltonian となる。

ここで、第 1 節と同様

$$N = \mu A + \kappa J$$

とおくと、やはり、

$$(N, \mathbf{r}) = \mu(|\mathbf{J}|^2 - \mu^2)$$

が成り立ち、 $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ 内で運動方程式の解軌道は円錐曲線となる。

もし、

$$\kappa = aK_\mu - \frac{c\mu^2}{2} = k > 0$$

をみたすように、保存量 $K_\mu = \text{const.}$ の値を選べば、 \mathbf{J}, \mathbf{A} は MIC-Kepler 問題のものと一致する。したがって、解軌道も、パラメータの取り方を除いて、MIC-Kepler 運動のものと一致する。特に、 $bK_\mu - d\mu^2/2$ の、負、正、零に応じて、解曲線は、楕円、双曲線、放物線となることも示される。また、角運動量ベクトルと Runge-Lenz ベクトルが Poisson 括弧のもとで閉じて Kepler 型対称性を示すことも直接の計算から示すことができる。こうして Kepler 型対称性を用いて Taub-NUT 計量が拡張され、また力学的には MIC-Kepler 運動を含むような自由度 3 の非線形可積分系が見いだされた。

次に、Kepler 型対称性の 1 つの特徴である有界な軌道がすべて閉軌道となる性質に注目する。よく知られているように、普通の中心力問題ではこの性質をもつ力学は、Kepler 運動と調和振動子に限られる (Bertrand の定理) [6]。Bertrand のものと問題の設定は若干異なるが、我々の場合にも Bertrand の定理の証明方法が適用できる。今、一般化 Taub-NUT 計量の測地流の簡約力学系は円錐上に拘束されているので、簡約力学系の極座標 (r, θ, ϕ) のうち θ は、座標系を適当にとることにより $\cos \theta = \mu/|\mathbf{J}|$ を満たす定数とできる。従って、運動を記述する方程式は r と ϕ 、及びその時間微分で表されるエネルギー

積分と角運動量の保存から決定される。ここで Bertrand の方法を応用することにより、有界な軌道がすべて閉軌道となるための十分条件として、 $f(r), g(r)$ が定数 a, b, c, d を用いて、

$$f(r) = \frac{a + br}{r}, \quad g(r) = \frac{(a + br)r}{1 + cr + dr^2}$$

または

$$f(r) = ar^2 + b, \quad g(r) = \frac{(ar^2 + b)r^2}{1 + cr^2 + dr^4}$$

の形に求められる。前者は Kepler 型軌道（付録図 1）を、後者は調和振動子型軌道（付録図 2）をそれぞれもつ [7]。有界軌道において、軌道半径 r が最小値からとなりあう最大値まで変化するときの偏角 ϕ の増分を $\Delta\phi$ で表すとき、Kepler 型軌道に対しては $\Delta\phi = \pi$ 、調和振動子型軌道に対しては $\Delta\phi = \pi/2$ である。また、調和振動子型軌道を与える $f(r), g(r)$ に対する 4 次元計量

$$ds_H^2 = (ar^2 + b)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) + \frac{ar^4 + br^2}{1 + cr^2 + dr^4}(d\psi + \cos\theta d\phi)^2$$

を調和振動子型計量と呼ぶ。調和振動子型軌道を示す簡約力学系も、調和振動子型の対称性 $SU(3)$ を示す保存量を見いだすことができる [7]。

5 Kepler 型計量の幾何学的性質

第 4 節で Kepler 型対称性の観点から見いだされた Kepler 型計量

$$ds_K^2 = \frac{a + br}{r}(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) + \frac{ar + br^2}{1 + cr + dr^2}(d\psi + \cos\theta d\phi)^2$$

は 4 次元計量として、Taub-NUT 計量の拡張になっている。ここで、Kepler 型計量が、どの程度 Taub-NUT 計量の拡張になっているかを示すために、4 次元計量としての性質を結果のみまとめておく [5]。

(1) 計量 ds_K^2 が平坦計量となるための必要十分条件は $b = c = d = 0$ となることである。

(2) 計量 ds_K^2 が Einstein 計量となるための必要十分条件は $c = 2b/a, d = (b/a)^2$ となることである。このとき、Ricci-flat となり定数倍を除いて Taub-NUT 計量と一致する。

(3) 計量 ds_K^2 の Riemann の曲率形式が自己双対となるための必要十分条件は、 $c = 2b/a, d = (b/a)^2$ となることである。

(4) 計量 ds_K^2 の Weyl 共形曲率テンソルが $2 + cr > 0$ において自己双対となるための必要十分条件は、 $d = c^2/4$ となることである。

(5) 計量 ds_K^2 の Weyl 共形曲率テンソルが $2 + cr < 0$ において反自己双対となるための必要十分条件は、 $d = c^2/4$ となることである。

6 有界軌道が閉じる力学系と Kepler 型対称性

第4節において、Kepler 型対称性をもつ自由度3の非線形可積分系 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu, K_\mu)$ を導いた。その Hamiltonian は

$$K_\mu = \frac{r}{2(a+br)} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2(1+cr+dr^2)}{2(ar+br^2)}$$

で与えられた。本節では、平面3体系の内部運動がある中心力ポテンシャルを受けるとき
の力学系が、上記の力学系に含まれることを示す。平面上の3質点の質量を m_1, m_2, m_3 と
して重心から3質点までの位置ベクトルをそれぞれ h_1, h_2, h_3 とする。このとき、平面 \mathbf{R}^2
の標準基底ベクトル e_1, e_2 を用いて複素ベクトル z_1, z_2, z_3 を次の式で定義する。

$$z_k = (h_k, e_1) + i(h_k, e_2), \quad k = 1, 2, 3$$

ここで、 i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とし、さらに、 $(,)$ は \mathbf{R}^2 の標準内積を表すものとする。この
とき、Jacobi ベクトルを用いて重心系の Cartesian 座標 $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ が次の式で定義される。

$$\begin{aligned} \xi^1 + i\xi^2 &= \left(\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}\right)^{1/2} (z_1 - z_3) \\ \xi^3 + i\xi^4 &= \left(\frac{m_2(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\right)^{1/2} \left(z_2 - \frac{m_1 z_1 + m_3 z_3}{m_1 + m_3}\right) \end{aligned}$$

重心回りの慣性モーメントは、

$$\sum_{k=1}^3 m_k |h_k|^2 = \sum_{j=1}^4 (\xi^j)^2$$

となる。

さて、一般にポテンシャル $V(\xi)$ をもつ力学 $(T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\}), \sum_{j=1}^4 d\eta_j \wedge d\xi^j, H_4)$ を考
える。ここで η_j は、 ξ^j に共役な運動量で、Hamiltonian H_4 は

$$H_4 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \eta_j^2 + V(\xi)$$

である。次に、 $V(\xi)$ が $U(1)$ -不変 ($U(1)$ 対称) であるとする。つまり、第3節で導入し
た曲線座標 (r, θ, ϕ, ψ) を用いると、 $V(\xi)$ が、 ψ に依存しないとする。すると、この力学
系は第2節の方法で自由度3の力学系 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu, H_3)$ に簡約化される。ただし、
Hamiltonian H_3 は

$$H_3 = 2r \sum_{j=1}^3 p_j^2 + \frac{2\mu^2}{r} + V(r, \theta, \phi)$$

となる。この力学系は平面3体系の内部空間における運動（内部運動）、つまり、3体のなす形の運動を記述する力学系と解釈される [8]。

さらに、ポテンシャル V が r のみに依存すると仮定する。重心系で考えれば慣性モーメントのみにポテンシャル V が依存していることとなる。この時、角運動量ベクトル

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{\mu}{r} \mathbf{r}$$

が保存され、簡約系の軌道が円錐上に存在するのは、MIC-Kepler 運動や第4節の Kepler 型対称性をもつ力学系と同様である。軌道は半径 r と回転角 ϕ で記述されるので、第4節の後半で用いた Bertrand の方法が適用できる。その結果、有界な軌道がすべて閉となるための必要十分条件は $V(r)$ が定数 a_0, a_1, b_0, b_1 をもちいて

$$V(r) = a_0 r + a_1$$

または

$$V(r) = b_0/\sqrt{r} + b_1$$

と書けることであることが証明される。

まず、 $V(r) = a_0 r + a_1$ のときの対称性をみてみよう。Hamiltonian は

$$H_3 = 2r \sum_{j=1}^3 p_j^2 + \frac{2\mu^2}{r} + a_0 r + a_1$$

となるので、第4節の Kepler 型対称性をもつ力学系となる。したがって、角運動量ベクトルに加えて Runge-Lenz ベクトルとして

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} \times \mathbf{J} - \frac{H_3 - a_1}{4r} \mathbf{r}$$

が保存される。この保存量をもう少しちがう観点から見てみよう。 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ に戻って考えると、Hamiltonian は、

$$H_4 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \eta_j^2 + a_0 \sum_{j=1}^4 (\xi^j)^2 + a_1$$

の4次元調和振動子を表している。従って、次の保存量が存在する。

$$\xi^j \eta_k - \xi^k \eta_j, \quad \eta_j \eta_k + 2a_0 \xi^j \xi^k.$$

これらを用いて、次の $U(1)$ 不変な保存量を定義する。

$$L_1 = \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_4 - \xi^4 \eta_1 + \xi^3 \eta_2 - \xi^2 \eta_3)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_3 - \xi^3\eta_1 + \xi^2\eta_4 - \xi^4\eta_2)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_2 - \xi^2\eta_1 + \xi^4\eta_3 - \xi^3\eta_4)$$

$$Q_1 = \frac{1}{4}(\eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_4 + 2a_0(\xi^1\xi^3 + \xi^2\xi^4))$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}(\eta_2\eta_3 - \eta_1\eta_4 + 2a_0(\xi^2\xi^3 - \xi^1\xi^4))$$

$$Q_3 = \frac{1}{8}(\eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2 + 2a_0((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2))$$

これらは、簡約力学系の保存量を定義する。つまり F で L_j または Q_j を表すとき、 $\pi_\mu^* F_\mu = \iota_\mu^* F$ で定義される F_μ は簡約力学系での保存量、すなわち角運動量ベクトル J と Runge-Lenz ベクトル R を導く。実際

$$L_{k,\mu} = J_k, \quad Q_{k,\mu} = -R_k,$$

が成り立つ。

また、一様磁場中の相互作用をしない平面 3 電子系についても、その内部運動が Kepler 型対称性をもつことを示すことができるがここでは割愛する [9]。

次に、 $V(r) = b_0/\sqrt{r} + b_1$ のときの対称性をみてみよう。簡約力学系の Hamiltonian は

$$H_3 = 2r \sum_{j=1}^3 p_j^2 + \frac{2\mu^2}{r} + \frac{b_0}{\sqrt{r}} + b_1$$

となる。この力学系の有界軌道において、軌道半径が最小値からとなりあう最大値まで変化するときの、偏角の増分 $\Delta\phi$ は $\Delta\phi = 2\pi$ となる。従って、軌道が原点まわりに 2 回転してから閉じる (付録図 3)。この意味でこの簡約力学系を 2-fold Kepler 系と呼ぶことにする。Kepler という理由は、 $T^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ にもどるともっとはっきりする。Hamiltonian は、 $b_1 = 0$ として

$$H_4 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \eta_j^2 + \frac{b_0}{\sqrt{r}}$$

となる。($r = \sum(\xi^j)^2$ に注意。) これは 4 次元 Kepler 運動の Hamiltonian である。4 次元 Kepler 問題においては次の保存量が存在することが知られている。

$$L_{jk} = \xi^j\eta_k - \xi^k\eta_j, \quad j, k = 1, 2, 3, 4,$$

$$A_j = \sum_{k=1}^4 L_{jk}\eta_k + \frac{b_0\xi^j}{\sqrt{r}} \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

これらを用いて、次の $U(1)$ 不変な保存量 $L_1, L_2, L_3, B_1, B_2, B_3$ を定義する。

$$L_1 = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_4 - \xi^4\eta_1 + \xi^3\eta_2 - \xi^2\eta_3)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_3 - \xi^3\eta_1 + \xi^2\eta_4 - \xi^4\eta_2)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_2 - \xi^2\eta_1 + \xi^4\eta_3 - \xi^3\eta_4)$$

$$B_1 = A_1A_3 + A_2A_4$$

$$B_2 = A_2A_3 - A_1A_4$$

$$B_3 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 - A_4^2)$$

これらは、簡約力学系の保存量を定義する。 L_j から、 $V(r) = a_0r + a_1$ のときと同様、角運動量ベクトル \mathbf{J} が導かれる。また、 $\pi_\mu^* G_k = \iota_\mu^* B_k$ で定義される G_k は 2-fold Kepler 系での一般化された Runge-Lenz ベクトル

$$\mathbf{G} = \alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{p} + \frac{16\mu}{r}(\mathbf{r}, \mathbf{p})^2\mathbf{J}$$

となる。ただし、

$$\alpha = \frac{b_0^2}{2r} + \frac{4H_3|\mathbf{J}|^2}{r} + \frac{4b_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})^2}{r\sqrt{r}}$$

$$\beta = -4(\mathbf{r}, \mathbf{p})(4|\mathbf{J}|^2 + b_0\sqrt{r})$$

である。この時、 \mathbf{J} と \mathbf{G} は、Poisson 括弧のもとで次の交換関係をなすことが示され、2-fold Kepler 系も非線形可積分系の例となっていることが解る。

$$\{J_i, J_j\} = \sum \varepsilon_{ijk} J_k,$$

$$\{J_i, G_j\} = \sum \varepsilon_{ijk} G_k,$$

$$\{G_i, G_j\} = (-2H_3) \sum \varepsilon_{ijk} (2A_\mu^2 J_k - 4\mu G_k)$$

ここで、 $A_\mu^2 = b_0^2 + 8H_3|\mathbf{J}|^2$ である。

7 Rationally-fold Kepler 系

一般化 Taub-NUT 計量

$$ds_G^2 = f(r)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) + g(r)(d\psi + \cos\theta d\phi)^2$$

に対する測地流力学系を簡約化した力学系は、 $(T^*(\mathbf{R}^3 - \{0\}), \sigma_\mu)$ 上の力学系で Hamiltonian

$$K_\mu = \frac{1}{2f(r)} \sum_{k=1}^3 p_k^2 + \frac{\mu^2}{2g(r)}$$

をもつものであった。前節で得られた 2-fold Kepler 系の $f(r), g(r)$ を次のように拡張する。

$$f(r) = r^{(\alpha-2)}(a + br^\alpha)$$

$$g(r) = \frac{r^\alpha(a + br^\alpha)}{1 + cr^\alpha + dr^{2\alpha}}$$

ここで α は実のパラメータである。このとき、有界軌道に対して軌道半径が最小値からとなりあう最大値まで変化するときの偏角の増分 $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{\alpha}$$

となる。従って、 $f(r)$ と $g(r)$ が上式で与えられるとき有界軌道がすべて閉軌道となるための必要十分条件は α が有理数となることである。特に、 $\alpha = 1$ のときは第 4 節の Kepler 型力学系に、 $\alpha = 2$ のときは調和振動子型力学系となる。さらに、 $\alpha = 1/2$ のときは第 6 節の 2-fold Kepler 型力学系の一般形を与えていることがわかる。こうした拡張性から、上記の自由度 3 の力学系を rationally-fold Kepler 系と呼ぶことにする。Rationally-fold Kepler 系の円錐上の軌道の様子を付録図 4 に示す。なお、rationally-fold Kepler 系の対称性については現在研究中である。

参考文献

- [1] H.V. McIntosh and A. Cisneros, Degeneracy in the presence of a magnetic monopole, J. Math. Phys. **11**, 896-916 (1970).
- [2] T. Iwai and Y. Uwano, The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three-dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classical theory, J. Math. Phys. **27**, 1523-1529 (1986).
- [3] G.W. Gibbons and N.S. Manton, Classical and quantum dynamics of BPS monopoles, Nucl. Phys. B **274**, 183-224 (1986).
- [4] B. Cordani, Gy. Fehér and P.A. Horváthy, Kepler-type symmetries of long-range monopole interactions, J. Math. Phys. **31**, 202-211 (1989).
- [5] T. Iwai and N. Katayama, On the extended Taub-NUT metrics, J. Geom. Phys. **12**, 55-75 (1993).
- [6] J. Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, C. R. Acad. Sci. Paris **77** 849-853 (1873).

- [7] T. Iwai and N. Katayama, Two kinds of generalized Taub-NUT metrics and the symmetry of associated dynamical systems, submitted to J. Phys. A: Math. Gen.
- [8] T. Iwai, A gauge theory for the quantum planar three-body problem, J. Math. Phys. 28, 964-974 (1987).
- [9] T. Iwai and N. Katayama, Two classes of dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed, submitted to J. Math. Phys.

付 録

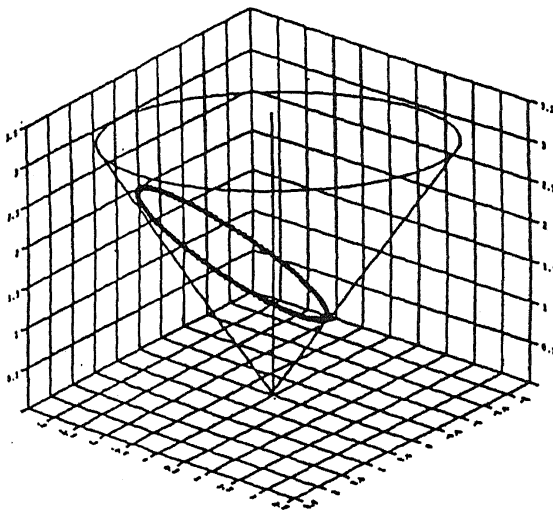


図1 Kepler型の軌道

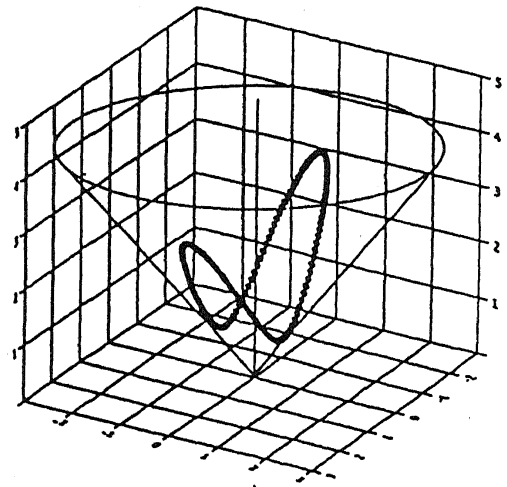


図2 調和振動子型の軌道

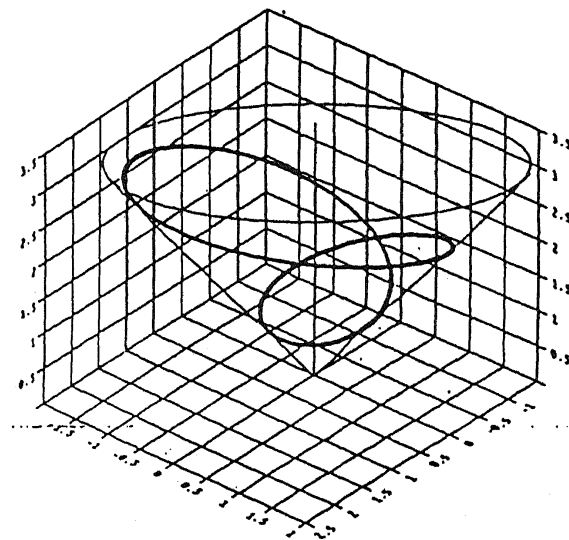


図3 2-fold Kepler型の軌道

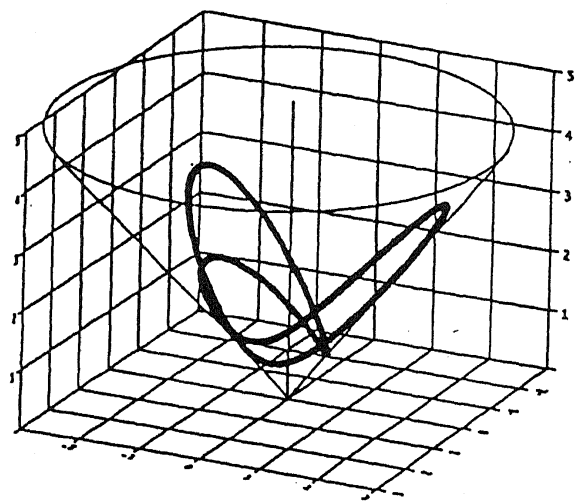


図4 Rationally-fold Kepler型の軌道 (但し $\alpha = 3/2$ の場合)