

## 非線形可積分系の応用解析の新展開

同志社大学 中村 佳正 (Yoshimasa Nakamura)

### 1 有理関数の空間と有限非周期戸田方程式のタウ関数

実係数  $n$ - 次有理関数

$$f(\lambda) = \frac{q_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + q_0}{\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_0} = \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)}, \quad (1)$$

の空間  $\text{Rat}(n)$  を考える. ただし,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\{p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{n-1}\} \in \mathcal{R}^{2n}$ , 多項式  $p(\lambda), q(\lambda)$  は互いに素とする.  $\text{Rat}(n)$  のトポロジーを  $\mathcal{R}^{2n}$  から induce されたもの考えると,  $p(\lambda)$  と  $q(\lambda)$  が互いに素であることにより,  $\text{Rat}(n)$  は  $2n$  次元の曲った空間となる. このような有理関数は応用数学において線形制御システムの入出力関係を記述する伝達関数として現れ, その空間の幾何学はシステムの同定や実現などの制御の問題と密接に関係する. 複素係数の有理関数の空間は  $\text{SU}(2)$  モノポールのモジュライ空間としてゲージ理論に登場する.

$\lambda$  を実軸上  $-\infty$  から  $\infty$  へ変化させたとき,  $f(\lambda)$  の値の  $-\infty$  から  $\infty$  へのジャンプの回数と  $\infty$  から  $-\infty$  へのジャンプの回数の差を Cauchy 指数という. Cauchy 指数の計算法として Hermite-Hurwitz により以下が知られている [1].  $f(\lambda)$  の Laurant 展開  $f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \lambda^{-k}$  を用いて定まる Hankel 行列の系列

$$H_k = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{k-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{k-1} & h_k & \dots & h_{2k-2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$k = 1, 2, \dots$ , を考える.  $H_k$  は実対称行列だから固有値は全て実数である.  $f(\lambda)$  の分母と分子が互いに素であることの帰結として無限行列  $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k$  のランクは  $n$ .

特に,  $H_n$  は固有値 0 を持たない.  $H_n$  の正の固有値の数  $i$  と負の固有値の数  $j$  との差, すなわち,  $\text{sgn}H_n$  は  $\{-n, -n+2, \dots, n\}$  のいずれかの値をとり, Cauchy 指数に一致する. Cauchy 指数の異なる有理関数は  $p_j, q_j$  を連続的に変化させることで互いに移りあうことはできないから,  $\text{Rat}(n)$  は  $n+1$  個の連結成分からなることになる. Cauchy 指数  $i-j$  の連結成分を  $\text{Rat}^{i-j}(n)$  とかく. 特に, Cauchy 指数  $n$  の有理関数の分母は相異なる  $n$  実根  $\lambda_k$  を持ち, 常に部分分数展開が可能で

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{r_k^2}{\lambda - \lambda_k}, \quad r_k > 0, \quad \lambda_j \neq \lambda_k \quad (3)$$

と表される.  $\text{SU}(2)_n$ -モノポールのモジュライは  $\text{Rat}^0(2n)$  に同相であることが知られている.

次に, 有理関数と有限非周期戸田方程式の関わりについて述べる. 戸田方程式は指数関数型の非線形最近接相互作用をする 1 次元の格子モデルの運動方程式である [2]. ここでは, 非周期的境界条件のもとでの有限個の質点の運動を表す場合 (1 次元戸田分子方程式) を考える [3]. 運動方程式は Hamilton 関数

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \exp(x_k - x_{k+1}) \quad (4)$$

に関して

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (5)$$

で導入される. ここに,  $x_k$  は  $k$  番目の質点の位置,  $y_k$  はその運動量を表し, 格子の両端が無遠慮にあることを示す境界条件  $x_0 = -\infty, x_{n+1} = \infty$  が仮定されている. 運動方程式としての自由度は  $n$  である. 各格子点は通常の戸田方程式のような非線形振動を起こすのではなく, 相互作用の後無遠慮に飛び去り, 斥力の調和振動子に近づく.

Flaschka に従って変数  $a_k, b_k$  を

$$a_k = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+1})\right), \quad b_k = -\frac{1}{2}y_k \quad (6)$$

として導入すると, 運動方程式は

$$\frac{da_k}{dt} = a_k(b_{k+1} - b_k), \quad \frac{db_k}{dt} = 2(a_k^2 - a_{k-1}^2), \quad (7)$$

と表される。境界条件は、 $a_0 = 0, a_n = 0$ 。さらに、 $a_k, b_k$  を成分とする Jacobi 行列  $L$ , および、歪対称行列  $M$  を

$$L(t) = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ a_1 & b_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad M(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & 0 \\ -a_1 & 0 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

で定める。このとき、運動方程式は Lax 表示

$$\frac{dL}{dt} = [M, L], \quad (9)$$

をもつ。Jacobi 行列  $L(t)$  に対して  $n$  次有理関数

$$f(\lambda) = e_n^T (\lambda I - L)^{-1} e_n, \quad e_n = (0 \cdots 0 1)^T \quad (10)$$

を導入する。 $a_j(t) > 0$  であることから、 $f(\lambda)$  は

$$f(\lambda; t) = \sum_{j=1}^n \frac{r_j(t)^2}{\lambda - \lambda_j}, \quad \sum_{j=1}^n r_j^2 = 1, \quad r_j > 0, \quad \lambda_j \neq \lambda_j \quad (11)$$

と部分分数展開される。すなわち、有限非周期戸田方程式は Lax 表示を通じて連結成分  $\text{Rat}^n(n)$  上に 1 - パラメータ流を定めることがわかる [4]。Lax 表示のスペクトル保存性より  $L(t)$  の固有値  $\lambda_j \in \mathcal{R}$  は  $t$  に依らないから、有理関数の極の位置は戸田方程式の時間発展のもとで不変である。ここで、

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_n \quad (12)$$

としても一般性を失わない。

$f(\lambda; t)$  を  $t$  で微分し戸田方程式、および  $\sum_{j=1}^n r_j^2 = 1, d\lambda_j/dt = 0$  を用いると力学系

$$\frac{dr_j}{dt} = -\lambda_j r_j + r_j \sum_{k=1}^n \lambda_k r_k^2, \quad j = 1, \dots, n \quad (13)$$

を得る。Lax 表示に現れる変数の空間  $\{(a_j, b_k) | a_j > 0\}$  と有理関数の部分分数展開による変数の空間  $\{(r_j, \lambda_k) | \sum_{j=1}^n r_j^2 = 1\}$  が微分同相であることが確かめられる。以上

の戸田方程式の変形は Moser[3] によるもので, Moser はこの力学系を用いて戸田方程式を線形化し, その作用角変数を書き下すことで完全積分可能性を示した. 実際,

$$r_j^2 = \frac{\exp(\frac{1}{2}\alpha_j)}{\sum_{k=1}^n \exp(\frac{1}{2}\alpha_k)} \quad (14)$$

とおくと,  $\alpha_j$  が

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = -\lambda_j \quad (15)$$

に従えば,  $r_j$  は Moser の力学系を満たすことがわかる. 解の一意性より, 有限非周期戸田方程式は  $\mathcal{R}^{2n} = \{\lambda_j, \alpha_j\}_{1 \leq j \leq n}$  上で線形化されると結論づけられる.  $\lambda_j, \alpha_j$  は積分の結果,  $\lambda_j = \lambda_{0j}, \alpha_j(t) = \alpha_{0j} - \lambda_j t$  とかけられ, それぞれ, 作用角変数とみなせる.

さて, 有理関数  $f(\lambda; t)$  の Laurent 展開  $f(\lambda; t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \lambda^{-k-1}$  で定まる Markov パラメータ  $\{h_k\}$  について,

$$h_0 = 1, \quad h_k(t) = \sum_{j=1}^n r_j^2(t) \lambda_j^k \quad (16)$$

であるから, Moser の力学系は

$$\frac{dh_k}{dt} = 2h_1 h_k - 2h_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

と書かれる. これは, Kac-van Moerbeke 系 [5] を適当な境界条件のもとで変形したものに一致する. さらに, 独立変数を  $s = -2t \in \mathcal{R}$  として, 新しい変数の系列  $\{g_k\}$  を

$$\frac{d \log g}{ds} = h_1, \quad g > 0, \quad \frac{g_k}{g} = h_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (18)$$

により導入する. この結果, 有限非周期戸田方程式は無有限連立線形系

$$\frac{dg_k}{ds} = g_{k+1}, \quad (19)$$

に帰着する. これは, Moser による線形化と異なる結果である.

Markov パラメータから定まる Hankel 行列  $H_k$  に対して  $gH_k$  を  $W_k$  とかき,  $W_k$  の行列式を  $\tau_k$  とおく. すなわち,

$$W_k = \begin{pmatrix} g & g_1 & \dots & g_{k-1} \\ g_1 & g_2 & \dots & g_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k-1} & g_k & \dots & g_{2k-2} \end{pmatrix}, \quad \tau_k = \det W_k. \quad (20)$$

系列  $\{g_k\}$  が線形化された戸田方程式  $dg_k/ds = g_{k+1}$  を満たせば,  $\tau_k$  は対称な Wronsky 行列式

$$\tau_k = \det \begin{pmatrix} g & \partial g & \dots & \partial^{k-1}g \\ \partial g & \partial^2 g & \dots & \partial^k g \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial^{k-1}g & \partial^k g & \dots & \partial^{2k-2}g \end{pmatrix}, \quad (21)$$

で表される, ただし,  $\partial = d/ds$ . 関数  $\tau_k = \tau_k(s)$  は有限非周期戸田方程式に対するタウ関数とみなせ, 戸田方程式の一般解は

$$g(s) = \sum_{j=1}^n \exp(c_{1j}s + c_{2j}), \quad c_{1j} \neq c_{1k} \quad (22)$$

で与えられる. また, (12) より  $s \rightarrow \infty$  のときの  $\tau_k$  の漸近的な挙動として

$$\frac{\tau_k(s)}{g(s)^k} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{k-1} \\ \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^{k-1} & \lambda_n^k & \dots & \lambda_n^{2k-2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

を示すことができる. 戸田方程式のタウ関数  $f_k$  は通常, 従属変数  $x_k$  の変換

$$\exp(x_k - x_{k+1}) - 1 = \partial^2 \log f_k \quad (24)$$

として導入される [6] が, ここでは有理関数の Markov パラメータを経由してタウ関数  $\tau_k$  が得られたことになる.  $f(\lambda; s)$  が連結成分  $\text{Rat}^n(n)$  の有理関数であることの帰結として次を証明できる.

**定理 1** 自由度  $n$  の有限非周期戸田方程式のタウ関数  $\tau_k(s)$  はランク  $n$  の全正 (totally positive) な Hankel 行列の行列式である, すなわち,

$$\begin{aligned} \tau_k(s) &> 0, & \text{for } k = 1, \dots, n, \\ \tau_k(s) &= 0, & \text{for } k = n+1, \dots. \end{aligned} \quad (25)$$

以下では有限非周期戸田方程式のタウ関数の応用を議論する. まず, 対称な Wronsky 行列式で表示されるタウ関数をもつソリトン方程式との関わりを考えよう. 例え

ば,  $\tau_k$  が,  $\partial_x g = \partial^2 g$  なる変数  $x$  にも依存するとき,  $\tau_k = \tau_k(s, x)$  は浅い水の表面波を記述する Broer-Kaup 系 [7]

$$\partial_x u = \partial(\partial u + 2uv), \quad \partial_x v = \partial(v^2 + 2u - \partial v) \quad (26)$$

の  $k$ -ソリトンに対応するタウ関数に一致する. 定理 1 より, 戸田方程式は Broer-Kaup 系の  $N$ -ソリトン ( $N \geq n+1$ ) のタウ関数の零点, すなわち, ソリトンの極の運動を記述することがわかる. また, 変数を複素化し,  $i\partial_t g = \partial^2 g$  とすれば,  $\tau_k = \tau_k(s, t)$  は深い水の表面波等を表す coupled nonlinear Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u = \partial^2 u + 2u^2 v, \quad -i\partial_t v = \partial^2 v + 2uv^2 \quad (27)$$

のタウ関数である. このように, 三次形式で表示可能な場合や多成分系に限る事情かもしれないが, いくつかのソリトン方程式のソリトン解の挙動が, 完全積分可能な常微分方程式である有限非周期戸田方程式によって特徴づけられることが示された. 一方, よく知られているように, Benjamin-Ono 方程式のソリトン解の極の運動は Calogero-Moser 系によって統制される. これらの事例は非線形偏微分系の特殊解の極と可積分な常微分系とのより一般的な関連を示唆していると考えられる. さらに, 可積分な勾配系による反応拡散系など散逸系の記述も可能になると予想される. これは「非線形可積分系の応用解析」の次の研究テーマのひとつとなる.

有限非周期戸田方程式のタウ関数の第 2 の応用は情報空間の幾何学に関するものである. 定理 1 の  $\tau_k > 0$ , ( $k = 1, \dots, n$ ), は Hankel 行列  $W_n$  が正定値であることを意味する. これより逆に, 有限非周期戸田方程式が正定値 Hankel 行列の空間

$$\text{Hank}_+(n) = \{W_n | W_n : \text{正定値かつ Hankel}\} \quad (28)$$

上で  $dg_k/ds = g_{k+1}$  と線形化されることが導かれる. 最近, 情報空間の微分幾何学において平均を 0 とする多変数の正規分布族のパラメータ空間, すなわち, 共分散行列を表す正定値行列の空間  $\text{PD}(n)$  が研究されている [8] が,  $\text{Hank}_+(n)$  は双対平坦な構造をもつ  $\text{PD}(n)$  の部分空間である. 実際,  $\text{Hank}_+(n)$  の  $\nabla$ -affine 座標,  $\nabla^*$ -affine 座標はそれぞれ  $W_n, -W_n^{-1}$  で与えられる. 従って,

定理 2 自由度  $n$  の有限非周期戸田方程式は  $\text{Hank}_+(n)$  上の  $\nabla$ -線形な力学系である.

また、ソリトン解の計算でたびたび登場するタウ関数の対数は  $\text{Hank}_+(n)$  の双対ポテンシャルのひとつ  $\psi(W_n)$  と

$$\psi(W_n) = -\log \tau_n(s) \quad (29)$$

の関係にある。既に明らかになっている確率分布族のパラメータ空間上の可積分な勾配系の存在 [9] と合わせて、異質に見える情報空間と可積分系は本質的なところで互いに結びついていると考えられる。これも「非線形可積分系の応用解析」の立場から研究を深めるべき問題である。

## 2 連分数展開による有理関数空間の分割

文献 [4] において実係数  $n$ - 次有理関数の空間  $\text{Rat}(n)$  の任意の連結成分  $\text{Rat}^{\ell}(n)$  上に戸田方程式を拡張した完全積分可能系 (cyclic Toda hierarchy) が導入された。cyclic Toda hierarchy の Lax 表示には Jacobi 行列の代りに Hessenberg 行列が現れ、レベル集合は円筒と微分同相となるなど、通常の戸田方程式にない特徴をもっている。ここでは、有理関数の連分数展開とこの力学系の定める 1- パラメータ流の関連について考察する。文献 [2, 3] において有限非周期戸田方程式に対する連分数展開によるアプローチがあるが、本節の議論とは直接の関係はない。

有理関数  $f(\lambda) = q(\lambda)/p(\lambda)$  において分母は  $\lambda$  について  $n$  次、分子は高々  $n-1$  であることに注意し、Euclid の互除法

$$r_j(\lambda) = c_{j+1}s_{j+1}(\lambda)r_{j+1}(\lambda) + r_{j+2}(\lambda), \quad r_0(\lambda) = p(\lambda), \quad r_1(\lambda) = q(\lambda) \quad (30)$$

により、 $\deg r_j(\lambda) > \deg r_{j+1}(\lambda)$  なる多項式列  $\{r_j(\lambda)\}$ 、および、モニックな多項式列  $\{s_j(\lambda)\}$  を定める。ここに、 $c_j$  はゼロでない定数である。Euclid の互除法は必ず有限

回で停止し,  $f(\lambda)$  の連分数展開

$$f(\lambda) = \frac{d_1}{s_1(\lambda) + \frac{d_2}{s_2(\lambda) + \frac{d_3}{s_3(\lambda) + \dots + \frac{d_k}{s_k(\lambda)}}}} \quad (31)$$

を得る, ただし,  $d_1 = c_1^{-1}$ ,  $d_{j+1} = c_j^{-1}c_{j+1}^{-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k-1$ . 連結成分  $\text{Rat}^\ell(n)$  の有理関数は  $k$  および多項式  $s_j(\lambda)$  の次数  $\alpha_j$ , 定数  $d_j$  の符号  $\beta_j$  によって互いに識別されることになる. そこで,

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad \alpha_j = \deg s_j, \\ \beta &= (\beta_1, \dots, \beta_k), \quad \beta_j = \text{sgn } d_j \end{aligned} \quad (32)$$

なる多重添字を準備し,  $\text{Rat}^\ell(n)$  の有理関数のうち同じ  $\alpha, \beta$  をもつもの全体を  $C_\beta^\alpha$  とかく. 明らかに,  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = n$ .  $\text{Rat}(n)$  を添字  $\alpha, \beta$  について

$$\text{Rat}(n) = \bigcup_{(\alpha, \beta)} C_\beta^\alpha \quad (33)$$

と分割する. 例えば,  $\text{Rat}(2)$  の各連結成分は合計 6 個の部分集合により

$$\begin{aligned} \text{Rat}^{-2}(2) &= C_{(-1, -1)}^{(1, 1)}, \quad \text{Rat}^2(2) = C_{(1, -1)}^{(1, 1)}, \\ \text{Rat}^0(2) &= C_{(-1, 1)}^{(1, 1)} \cup C_{(1, 1)}^{(1, 1)} \cup C_{(1)}^{(2)} \cup C_{(-1)}^{(2)} \end{aligned} \quad (34)$$

と表される. 同様に,  $\text{Rat}(3)$ ,  $\text{Rat}(4)$  はそれぞれ 18, 54 個に分割される. 文献 [10] に  $a_j(t) \geq 0$  の意味で拡張した有限非周期戸田方程式の解のレベル集合が凸多面体となることとともに, 凸多面体の CW 分割 (一種の胞体分割) の記述があるが, 本節の議論との関係は現時点では明らかでない.

ここでは, 具体例として  $\text{Rat}(2)$  の有理関数

$$f(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2 - 1} \quad (35)$$

をとりあげ, [4] の cyclic Toda hierarchy の流れが  $\text{Rat}^0(2)$  の各部分集合  $C_\beta^\alpha$  をどのように結び付けるかを調べよう. 行列の指数関数の計算により  $\text{Rat}^0(2)$  上の  $t = t_2$  流は

$$f(\lambda; t) = \frac{2\sinh t}{\lambda - \coth t + \frac{1 - \coth^2 t}{\lambda + \coth t}} \quad (36)$$

となる.  $\text{Rat}^2(2)$  上の通常の戸田方程式の流れと比較されたい. 明らかに

$$f(\lambda; t) \in \begin{cases} C_{(1,1)}^{(1,1)}, & \text{for } t > 0, \\ C_{(1)}^{(2)}, & \text{for } t = 0, \\ C_{(-1,1)}^{(1,1)}, & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (37)$$

だから, この 1-パラメータ流は三つの部分空間にまたがることになる.

一方, 制御理論で重用されている出力フィードバックによって上の有理関数は

$$f(\lambda; k) = \frac{2}{\lambda^2 + 2k - 1} \quad (38)$$

に移される. ゆえに, いかなるフィードバックゲイン  $k \in \mathcal{R}$  をとっても有理関数は  $C_{(1)}^{(2)}$  を抜け出すことはできない. 有理関数のゼロ点の軌跡を記述する cyclic Toda hierarchy の流れを極の移動を表すフィードバックと相補的に使用することで, システムの実現や同定などの非線形問題へのこれまでにないルートからのアタックが可能になるものと期待される.

### 3 確率 Lax 表示とランダム衝突モデル

「非線形可積分系の応用解析」の今後有望な研究テーマのひとつに確率微分方程式がある. もちろんここでは方程式が厳密に解けるという意味で「可積分」という言葉を用いようという訳ではない. exact かつ explicit に取り扱うことの可能な非線形力学系の理論の構築を目標としたものである. 「可積分系」という表現はもはや暫定的なものに過ぎない. 確率系, 差分系, そして散逸系, これまで可積分系とは一応区別されてきた体系を, exact かつ explicit の視点から再構成したいと考えている.

確率系を可積分系の視点から捉えようとした試みの端緒は Itoh[11], および Nakamura[12] にある. 後者においてニューラルネットにおけるある種の学習の方程式 (確率差分方程式) が考察され, 入力変数の確率分布に関する平均化学習方程式が 1 節に登場した Moser の力学系の一般化に変形可能で, 完全積分可能な Hamilton 系となることが示されている. ここでは, Itoh[11] が提出した 2 体・4 体衝突の確率モデルに関連して, 確率微分方程式の確率 Lax 表示の概念を導入する.

2 体衝突の確率モデルとは種  $i, i = 1, \dots, 2s+1$ , の相互作用として, 種  $i$  の粒子と種  $j$  の粒子が衝突し, 種  $i$  または種  $j$  の 2 粒子に変化する過程を Markov 連鎖として記述したものである. 詳しい衝突規則は [11] に述べられている. さらに, 離散的な確率モデルを連続化したものとして Ito 型確率微分方程式

$$dP_i = c_1 P_i \left( \sum_{j=1}^s P_{i-j} - \sum_{j=1}^s P_{i+j} \right) dt + \sum_{j=1}^{2s+1} \sqrt{c_2 P_i P_j} \cdot db_{ij} \quad (39)$$

が導出されている. ここに,  $P_i = P_i(t)$  は状態  $i$  をとる確率で周期的条件  $P_j = P_{2s+1+j}$  が課されている. また,  $b_{ij} = b_{ij}(t)$  は平均 0 分散  $t$  の互いに独立な 1 次元の Wiener 過程で条件

$$b_{ij}(t) + b_{ji}(t) = 0 \quad (40)$$

を満たすものとする. もし定数  $c_1$  が 0 であれば確率微分方程式は集団遺伝学における Wright-Fisher モデルとなる. 定数  $c_2$  は粒子の総数  $n$  の逆数で, 粒子数無限大の極限で方程式 (39) は決定論的になり, 巡回型の Lotka-Volterra 系 (可積分系) に近づく. この確率微分方程式が可積分系の確率モデルであると考えられる由縁は, 以下の通り.  $I_r$  をこの Lotka-Volterra 系の保存量とする. Wright-Fisher ドリフト項の付加により  $I_r$  は散逸するが, 興味深いことに, 指数関数的に散逸する様子が条件付期待値を用いて

$$E[I_r(t_1 + t_2) | I_r(t_1)] = I_r(t_1) \exp \left\{ - \binom{2r+1}{2} c_2 t_2 \right\} \quad (41)$$

と記述されている [11].

2 体衝突の確率モデルの Stratonovich 版

$$dP_i = c_1 P_i \left( \sum_{j=1}^s P_{i-j} - \sum_{j=1}^s P_{i+j} \right) dt + \sum_{j=1}^{2s+1} \sqrt{c_2 P_i P_j} \circ db_{ij}, \quad (42)$$

を考えよう。この場合 Wright-Fisher ドリフト項は  $y_j^2 = P_j$  で定まる奇数次元の球面  $\sum_{j=1}^{2s+1} y_j^2 = 1$  上の Brown 運動とみなせる [13]。行列  $L, A, dB$  を

$$\begin{aligned}
 L &= \begin{pmatrix} P_1 & \sqrt{P_1 P_2} & \cdots & \sqrt{P_1 P_m} \\ \sqrt{P_2 P_1} & P_2 & \cdots & \sqrt{P_2 P_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{P_m P_1} & \sqrt{P_m P_2} & \cdots & P_m \end{pmatrix}, \\
 A &= M - M^T, \\
 M &= \frac{c_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{P_1 P_2} & \cdots & -\sqrt{P_1 P_{s+1}} & \sqrt{P_1 P_{s+2}} & \cdots & \sqrt{P_1 P_m} \\ & 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \sqrt{P_s P_m} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & -\sqrt{P_{s+1} P_m} \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & -\sqrt{P_{2s} P_m} \\ 0 & & \cdots & & & & 0 \end{pmatrix}, \\
 dB &= \frac{\sqrt{c_2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & db_{12} & \cdots & db_{1m} \\ db_{21} & 0 & \cdots & db_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ db_{m1} & db_{m2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (43)
 \end{aligned}$$

と定める。条件 (40) より行列  $dB$  は歪対称である。  $m = 2s + 1$  として次が示される。

**定理 3** Stratonovich 型確率微分方程式 (42) は

$$dL = [A, L]dt + [dB, L] \quad (44)$$

と表される。

これを確率微分方程式の「確率 Lax 表示」と呼ぶことにする。  $dL$  のトレースが 0 であることから、

$$\sum_{i=1}^m dP_i(t) = 0 \quad (45)$$

が従う。また、  $c_2 = 0$  のとき Lotka-Volterra 系の Lax 表示  $dL/dt = [A, L]$  を得る。これは既知の Lax 表示 [14] とは異なる。

次に、4体衝突の確率モデルを論じる。4体衝突モデルとは、四つの種が二つずつの組となって相互作用を行うもので、例えば、種  $i, j, k, l$  が組  $(i, j), (k, l)$  となり衝突を起こす。その後で、 $i$  と  $j$  または  $k$  と  $l$  だけからなる二つの組を経て四つの種に戻るといふものである。4体衝突モデルは Ito 型確率微分方程式

$$dP_i = c_1 P_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} P_j - \sum_{j,k=1}^m a_{jk} P_j P_k \right) dt + \sum_{j=1}^m \sqrt{c_2 P_i P_j} \cdot db_{ij} \quad (46)$$

によって近似される [11]。これは  $n \rightarrow \infty$ , すなわち、 $c_2 \rightarrow 0$  のとき集団遺伝学の基礎方程式である Fisher の方程式（自然淘汰の方程式）に帰着する。

4体衝突に関しては Stratonovich 型確率微分方程式

$$dP_i = c_1 P_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} P_j - \sum_{j,k=1}^m a_{jk} P_j P_k \right) dt + \sum_{j=1}^m \sqrt{c_2 P_i P_j} \circ db_{ij} \quad (47)$$

を考えよう。対角行列  $D$  を

$$D = \frac{c_1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k} P_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^m a_{2k} P_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{mk} P_k \end{pmatrix} \quad (48)$$

で定めると、4体衝突の Stratonovich 型確率微分方程式もやはり確率 Lax 表示をもつ。

定理 4 Stratonovich 型確率微分方程式 (47) は

$$dL = [[D, L], L]dt + [dB, L] \quad (49)$$

と同値である。

定理 4 の系として Fisher の基礎方程式の Lax 表示  $dL/dt = [[D, L], L]$  を得る。さらに、 $a_{ij} = c_1^{-1} \lambda_i \delta_{ij}$  であれば Fisher の基礎方程式は線形計画法における Karmarkar の内点アルゴリズムを連続化した力学系に一致する [11]。この力学系の可積分系としての側面は文献 [15] で論じられている。また、情報空間の幾何学に基づく Fisher の基礎方程式の解析は [16] で考察されている。特に、Karmarkar の力学系を勾配系として表現する際に [15] で用いた計量は、[16] によると Shahshahani 計量（木村資生の最大値原理の幾何学化）に一致する。

本節で導入した確率 Lax 表示の概念は多くの可積分系の確率モデル化とその確率解析を行う際に有用となると考えられる。

#### 4 Lotka-Volterra 方程式の差分化について

全節のはじめに述べたように、差分系は「非線形可積分系の応用解析」の重要な今後の研究の方向である。ここでも「可積分」という表現は作業仮説に過ぎないことに注意する。主な研究の流れとしては、まず、可積分な差分力学系の一般論の構築を目指した広田良吾氏に代表される視点がある。この理論的な基礎は 1980 年前後に発見されたいわゆる広田・三輪の双一次差分方程式 [6] にあり、代数構造を保存する差分化ということができる。密接に関連するが、離散 Painlevé 性に注目した差分化の試みも有力である（梶原・薩摩・太田氏）。また、一方では、差分化の定める写像の可換性に力点を置く考え方があり、Hamilton 系に対するシンプレクティック数値積分法や Hamilton 関数を保存する Greenspan 流の差分化（石森勇次氏）もある。さらに、QR アルゴリズムや Karmarkar アルゴリズム [15] 等の優れた収束性と数値安定性や数列の加速法の背後に可積分な力学系があることもわかってきている。現状は幾通りものアタック地点から各自頂上を目指す繚乱期の様相といえよう。もちろん頂上はひとつとは限らない。

そこで、本節では巡回型の Lotka-Volterra 系を取り上げ、いくつかの差分化とその計算機シミュレーションを比較してみることにする。プログラミングは橋本太郎（同志社大電子工 M1）によるものである。3 種間の巡回捕食関係を記述する Lotka-Volterra 系

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1(P_2 - P_3), \quad \frac{dP_2}{dt} = P_2(P_3 - P_1), \quad \frac{dP_3}{dt} = P_3(P_1 - P_2) \quad (50)$$

を考える。ここに各  $P_j \geq 0$  は時刻  $t$  における種  $j$  の占める割合である。この場合の Lotka-Volterra 系は、文献 [11] で解説されているように、保存量

$$I_1 = P_1 + P_2 + P_3 = 1, \quad I_2 = P_1 P_2 P_3 \quad (51)$$

をもつ。  $P_3 = 0$  の場合、  $I_1 = 1$  を用いて  $P_2$  を消去しロジスティック（兵站）方程式

$dP_1/dt = P_1(1 - P_1)$  を得る. この方程式は可積分であるにも関わらず, その Euler の前進差分は, 差分ステップを大きくとれば, 典型的なカオス力学系となることが知られている. このことから, もとの方程式の性質を保つ差分化の重要性は明らかであろう.

さて,  $P_j > 0$  の場合に  $I_1 = 1$  によって  $P_3$  を消去し,  $q = P_1, p = P_2$  とかくと, 自由度 2 の力学系

$$\frac{dq}{dt} = q(q + 2p - 1), \quad \frac{dp}{dt} = -p(2q + p - 1) \quad (52)$$

を得る. この方程式の Euler 差分は

$$q_{t+1} = q_t + \delta q_t(q_t + 2p_t - 1), \quad p_{t+1} = p_t - \delta p_t(2q_t + p_t - 1), \quad (53)$$

ただし,  $\delta$  は差分ステップである. 平衡点は  $(p, q) = (1/3, 1/3)$  である. ここで,

$$H_t = p_t q_t (1 - p_t - q_t) \quad (54)$$

とおく. これは連続系の保存量  $I_2$  に対応する量である. しかしながら,

**補題 1** Euler 差分のもとで,  $H_{t+1} \leq H_t$

だから, Euler 差分は  $I_2$  を保存しない. 証明では,  $p, q, r = 1 - p - q$  について不等式  $p^2 + q^2 + r^2 \geq pq + qr + rp$ , および,  $(p - q)(q - r)(r - p) \leq 0$  を用いる.  $H_t$  は単調非増加だから, Euler の差分化の描く軌道は周期的な真の解から徐々に外れていくことがわかる.

図 1 は  $(p, q)$  平面の  $0 < p, 0 < q, p + q < 1$  なる領域に Euler 差分の結果をプロットしたものである. 初期値は  $(p, q) = (0.6, 0.2)$ , 差分ステップを  $\delta = 0.1$  としている. 内側の実線部が真の解を表す.

次に, 3 種の Lotka-Volterra 系を別の角度からみよう. 保存量  $I_1$  を用いて変数を一つ減らした力学系 (52) は, さらに保存量  $I_2$  をもつ. 注意深くみると, 実は,

**補題 2** 3 種の Lotka-Volterra 系は完全積分可能な Hamilton 系である.

すなわち, 力学系 (52) は関数  $H(p, q) = I_2 = pq(1 - p - q)$  について

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (55)$$

と表すことができる. 従来, Lotka-Volterra 系の Hamilton 関数として  $I_1$  を選ぶ方法が知られていた [17]. Hamilton 系については, 特有の差分法が開発されてきたが, こ

ここでは、主にシンプレクティック数値積分法に注目する。文献 [17] で解説された一般論に従って (55) を差分化すると

$$q_{t+1} = q_t + \delta q_{t+1}(q_{t+1} + 2p_t - 1), \quad p_{t+1} = p_t - \delta p_t(2q_{t+1} + p_t - 1) \quad (56)$$

となる。右辺に  $q_{t+1}$  が現れ implicit scheme となっている。シミュレーションの結果では差分ステップに依らず周期性が保たれる。ただし、Hamilton 関数  $H_t$  は保存されない。

図 2, 図 3 はシンプレクティック数値積分法の結果である。図 2 のように、差分ステップが  $\delta = 0.1$  であれば、計算回数に依らず真の解を十分にトレースしている。しかし、差分ステップを大きくすると軌道はゆがみはじめる。図 3 では  $\delta = 1$  としている。円に近い太線がシンプレクティックな軌道である。初期値はいずれも図 1 と同じく  $(p, q) = (0.6, 0.2)$  である。

Hamilton 系特有の方法として、この他 Greenspan 等による Hamilton 関数を保存する差分化がある。ここでは、差分化の結果のみを記す。

$$\begin{aligned} q_{t+1} &= q_t + \delta \{q_{t+1}^2 + q_t^2 + (q_{t+1} + q_t)(p_{t+1} + p_t - 1)\}, \\ p_{t+1} &= p_t - \delta \{p_{t+1}^2 + p_t^2 + (p_{t+1} + p_t)(q_{t+1} + q_t - 1)\}. \end{aligned} \quad (57)$$

最後に、広田 scheme を考察する。一般の Lotka-Volterra 系についての [18] の結果を今の場合にかき下すと

$$\frac{P_{1t+1}}{P_{1t}} = \frac{1 + \delta P_{2t}}{1 + \delta P_{3t+1}}, \quad \frac{P_{2t+1}}{P_{2t}} = \frac{1 + \delta P_{3t}}{1 + \delta P_{1t+1}}, \quad \frac{P_{3t+1}}{P_{3t}} = \frac{1 + \delta P_{1t}}{1 + \delta P_{2t+1}} \quad (58)$$

となる。つぎの補題は基本的である。

**補題 3** 差分 Lotka-Volterra 系 (58) は差分ステップ  $\delta$  に依存する保存量

$$I_{1\delta} = P_{1t} + P_{2t} + P_{3t} + \delta(P_{1t}P_{2t} + P_{2t}P_{3t} + P_{3t}P_{1t}) \quad (59)$$

をもつ。

極限  $\delta \rightarrow 0$  で  $I_{1\delta}$  は連続系の保存量 (全確率)  $I_1 = 1$  に移行する。言い替えれば、広田の差分方程式は連続系の保存量を保存しないことになる。  $I_{1\delta}$  を用いて変数  $P_{3t}$  を

消去すると差分方程式

$$\begin{aligned} q_{t+1} \frac{1 + \delta I_{1\delta} - \delta^2 q_{t+1} p_{t+1}}{1 + \delta(q_{t+1} + p_{t+1})} &= q_t(1 + \delta p_t), \\ p_{t+1}(1 + \delta q_{t+1}) &= p_t \frac{1 + \delta I_{1\delta} - \delta^2 q_t p_t}{1 + \delta(q_t + p_t)} \end{aligned} \quad (60)$$

を得る。この差分方程式は連続系の Hamilton 関数  $H_t$  をも保存しない。従って、 $\delta$  が大きくなると連続系の軌道からずれはじめる。しかしながら、極めて数値安定性に優れている。

図4, 図5, 図6は広田 scheme を扱っている。初期値はいずれも  $(p, q) = (0.6, 0.2)$  としている。図4は差分ステップが  $\delta = 0.1$ , 図5は  $\delta = 1$ , いずれも真の解をほぼトレースしている。しかし、周期性は壊れないものの、差分ステップを  $\delta = 4$  くらいまで大きくすると軌道にずれが目立ちはじめる。ずれの程度は初期値に依存するが、計算回数による変化は現れない。著しい数値安定性を示す例として、図6では  $\delta = 100$  の場合を扱っている。連続系の軌道の内側に3点で接する差分系の軌道がプロットされている。以上の結果、広田の差分方程式が差分可積分系と呼ぶべき構造を有すること、同時に、差分可積分系が連続系の軌道をトレースするものではないことがわかる。

連続系の可積分性を特徴づける性質に、代数構造に加えて十分な数の対称性、保存量、特殊解、Lax 表示、Bäcklund 変換、Painlevé 性などがあるが差分可積分系を統制する概念は一体何であろうか。差分 Hamilton 系はいかに導入されるべきであろうか。差分可積分系の数値安定性はアルゴリズム開発の指針とならないだろうか。差分可積分系をめぐる応用解析が明らかにすべき課題は数多い。

Lotka-Volterra 系は種の捕食関係や競合を表す数理生物学の方程式で、これ自身、本来の2体衝突モデルの連続時間極限である [11]。従って、ここで考察したシンプレクティック数値積分法や広田 scheme のような implicit scheme は数理生物学者にとってはなじみ難いものかもしれない。Euler 差分で差分ステップを十分小さくとれば問題は回避されるとも考えられる。しかしながら、種々の差分化の方法を比較検討する上で、また、全節で論じた可積分系の確率モデルの観点からも「非線形可積分系の応用解析」の重要な突破口であろう。3種の Lotka-Volterra 系であっても、保存量のない場合には、本質的にカオスが生じるという結果もある [19]。これは Lotka-Volterra 系が散逸系との接点でもあることを物語っている。

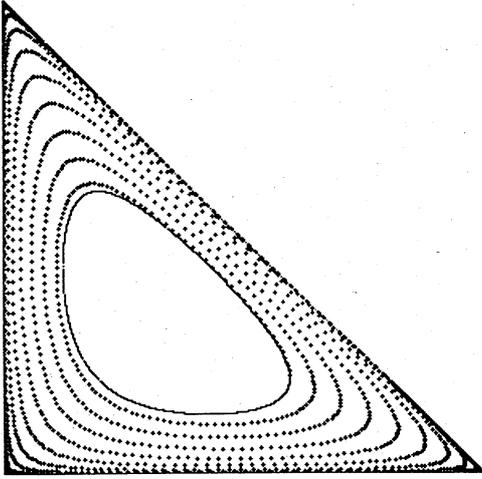


図1: Euler  $\delta=0.1$

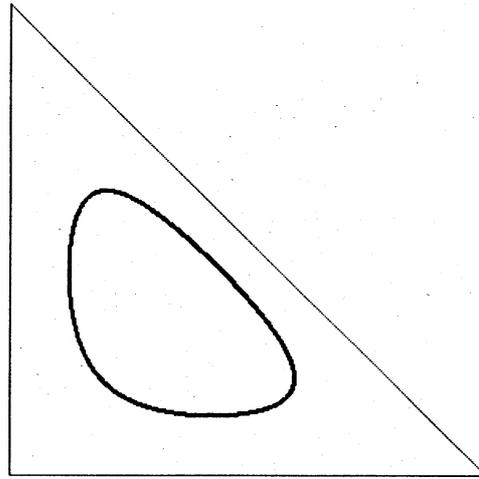


図2: シンプレクティック  $\delta=0.1$

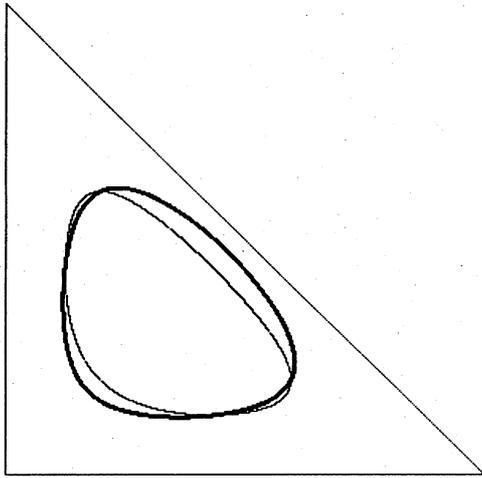


図3: シンプレクティック  $\delta=1$

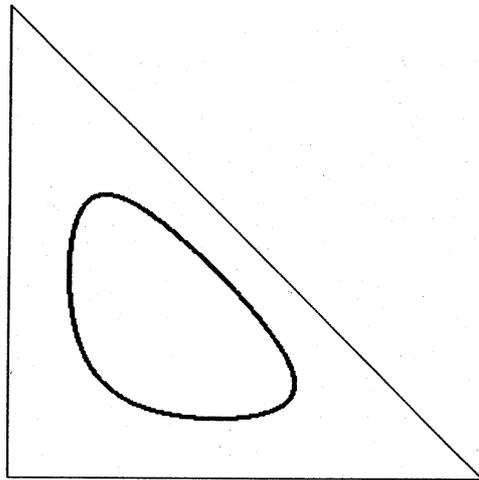


図4: 広田スキーム  $\delta=0.1$

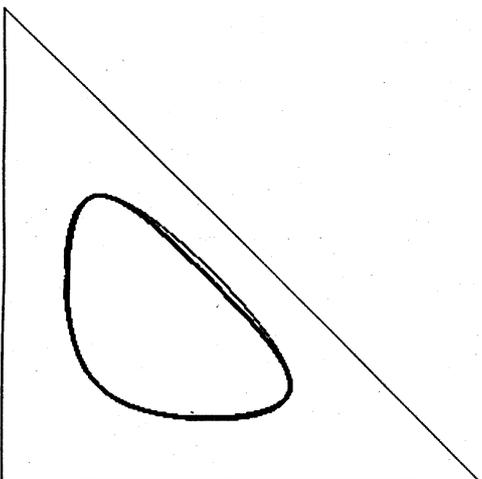


図5: 広田スキーム  $\delta=1$

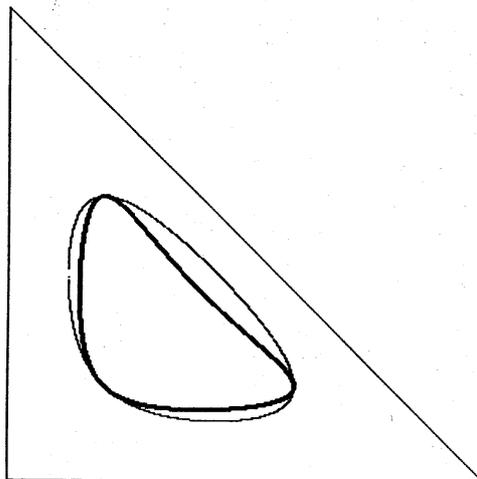


図6: 広田スキーム  $\delta=100$

## 6 おわりに

「非線形可積分系の応用解析」とは Applied Analysis Based on Nonlinear Integrable Systems の意味で, 非線形可積分系の理論の有用性の検証と可積分系の新しい版図の獲得をめざした試みである. 本稿では 1994 年初頭における現状の一端を解説した. 1993 年までのあゆみについては解説 [20] およびその文献を参照されたい. 以上により, 「非線形可積分系の応用解析」は数理科学の非線形問題への可積分系に基づくアプローチという第 1 段階を経て, 確率系, 差分系, 散逸系を含む非線形力学系全般に到達したと考える. この方向への研究がさらに加速され大きな流れとなって 21 世紀の数学的解析の有用な方法論となることを願う.

## 参考文献

- [1] Gantmacher, F.R.; The Theory of Matrices Vol. 2, Chelsea, 1959.
- [2] 戸田盛和; 非線形格子力学, 岩波書店, 1978.
- [3] Moser, J.; Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential - An integrable system, Lec. Notes in Phys. Vol. 38, Springer-Verlag, 1975, 467-497.
- [4] Nakamura, Y.; Geometry of rational functions and nonlinear integrable systems, *SIAM J. Math. Anal.* 22 (1991), 1744-1754; The level manifold of a generalized Toda equation hierarchy, *Trans. Amer. Math. Soc.* 333(1992), 83-94.
- [5] Kac, M. and van Moerbeke, P.; On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda equations, *Adv. in Math.* 16(1975), 160-169.
- [6] 広田良吾; 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992.

- [7] Satsuma, J., Kajiwara, K., Matsukidaira, J. and Hietarinta, J.; Solutions of the Broer-Kaup system through its trilinear form, *J. Phys. Soc. Japan* 61(1992), 3096-3102.
- [8] Ohara, A., Suda, N. and Amari, S.; Dualistic differential geometry of positive definite matrices and its application to optimizations and matrix completion problems, in: Proc. MTNS-93 (to appear).
- [9] Nakamura, Y.; Completely integrable gradient systems on the manifolds of Gaussian and multinomial distributions, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 10(1993), 179-189, Gradient systems associated with probability distributions, *ibid.* 11(1994), 21-30.
- [10] Tomei, C.; The topology of isospectral manifolds of tridiagonal matrices, *Duke Math. J.* 51(1984), 981-996.
- [11] Itoh, Y.; Stochastic model of an integrable nonlinear system, *J. Phys. Soc. Japan* 62(1993), 1826-1828; 非線型可積分系の確率モデル, 統計数理研共同研究レポート 48(1993), 99-117.
- [12] Nakamura, Y.; Neurodynamics and nonlinear integrable systems of Lax type, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 11(1994), 11-20.
- [13] 丸山貴志子, 伊藤栄明; ライト・フィッシャーモデルの確率微分方程式 —伊藤型方程式とストラトノヴィッチ型方程式—, 統計数理 39(1991), 47-52.
- [14] Bogoyavlensky, O.I.; Integrable discretizations of the KdV equation, *Phys. Lett. A* 134(1983), 34-38.
- [15] Nakamura, Y.; Lax pair and fixed point analysis of Karmarkar's scaling trajectory for linear programming, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 11(1994), 1-9.
- [16] 江口真透; 情報幾何と数理, 統計数理研共同研究レポート 48(1993), 125-132.

- [17] 吉田春夫; ハミルトン力学系のためのシンプレクティック数値積分法, 非線形の数理, 朝倉書店, (分担執筆, 近刊).
- [18] Tujimoto, S., Hirota, R. and Oishi, S.; An extension and discretization of Volterra equations I, Techn. Rep. of IEICE, NLP 92-90(1993), 1-3.
- [19] Arneodo, A., Coulet, P. and Tresser, C.; Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations, *Phys. Lett. A* 79(1980), 259-263.
- [20] 中村佳正; 非線形可積分系の応用解析の試み —力学的対称性による非線形問題へのアプローチ—, 計測と制御 31(1992), 872-877; 非線形可積分系の応用解析の展開, 応用数理 2(1992), 330-342; 非線形可積分系の応用解析の進展 —ニューロダイナミクスにおける可積分系の視点—, 数理解析研講究録 822(1993), 1-13; 非線形問題としての情報空間 —非線形可積分系の応用解析から—, 数理科学 366(1993), 16-20; 有理関数の空間と非線形可積分系, 非線形の数理, 朝倉書店, (分担執筆, 近刊).