数理解析研究所講究録
第869巻 1994年 127-136

BRS変換，B場形式そして不定計量

中大理工　西島和彦　(Kazuhiko Nishijima)

中西さんが還暦を迎えられることになりましたが，今まで中西さんのお仕事に触発されることが多くありました。ここでは特に中西さんのお仕事と関連の深かった問題について述べることに致します。

§1. BRS変換

BRS変換については中西・九後・小嶋氏による古典的な仕事があるが，ここでは記号の紹介だけしておく。[1),2)] QCDに対するLagrangianを次の3項の和とする。

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{inv}+\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP}, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{L}_{inv}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}-\bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu+m)\psi, \tag{1.1a}$$

$$\mathcal{L}_{GF}=\partial_\mu B\cdot A_\mu+\frac{\alpha}{2}B\cdot B,\ \text{or}\ \mathcal{L}'_{GF}=-\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2, \tag{1.1b}$$

$$\mathcal{L}_{FP}=i\,\partial_\mu\bar{c}\cdot D_\mu c. \tag{1.1c}$$

BRS変換は，無限小ゲージ関数を c とするか $\bar{c}$ とするかにより2種類のものが現われるが，前者を δ，後者を $\bar{\delta}$ で表わすことにする。1組は次のように与えられる。

$$\delta A_\mu = D_\mu c, \quad \delta \psi = ig(c\cdot T)\psi,$$
$$\delta B = 0, \quad \delta \bar{c} = iB, \quad \delta c = -\frac{1}{2}g(c\times c). \tag{1·2}$$

そしてもう1組は

$$\bar{\delta} A_\mu = D_\mu \bar{c}, \quad \bar{\delta} \psi = ig(\bar{c}\cdot T)\psi,$$
$$\bar{\delta} \bar{B} = 0, \quad \bar{\delta} c = i\bar{B}, \quad \bar{\delta} \bar{c} = -\frac{1}{2}g(\bar{c}\times\bar{c}). \tag{1·3}$$

ただし $\bar{B}$ は，$B+\bar{B}-ig(c\times\bar{c})=0$ により定義される。これ等の変換の生成演算子が BRS charge の Q_B と $\bar{Q}_B$ とであり，また ghost number Q_c も導入される。これ等は何れも hermiticity

$$Q_B^\dagger = Q_B, \quad \bar{Q}_B^\dagger = Q_B, \quad Q_c^\dagger = Q_c \tag{1·4}$$

を満たし，また次の関係を満たす。

$$\delta^2 = \bar{\delta}^2 = \delta\bar{\delta} + \bar{\delta}\delta = 0, \quad (\text{nilpotency}) \tag{1·5}$$

$$Q_B^2 = \bar{Q}_B^2 = Q_B\bar{Q}_B + \bar{Q}_B Q_B = 0, \tag{1·6}$$

$$i[Q_c, Q_B] = Q_B, \quad i[Q_c, \bar{Q}_B] = -\bar{Q}_B. \tag{1·7}$$

後に(1·6)と(1·7)のそれぞれの第一式を組合わせたBRS代数の表現について考察する。

§2. B場形式

補助場Bの重要性については中西さんが繰返し述べておられるのでここではゲージ変換の生成演算子としての側面に限定して考察する。[3] QEDに於けるMaxwell方程式は

$$\partial_\lambda F_{\lambda\mu} = -j_\mu - \partial_\mu B \tag{2·1}$$

と書けるが，特にその時間成分は次のようになる。

$$\mathrm{div}\vec{E} + \dot{B} = j_0. \tag{2.2}$$

ψとの交換子を考えると，$\vec{E}$はequal-timeで可換であるから$\dot{B}$はj_0と同様に大局的ゲージ変換の生成演算子となる。この$\dot{B}$を一般化して，$\Box\Lambda(x)=0$を満たすゲージ変換の生成演算子は，中西さんにより次式で与えられている。

$$Q[\Lambda] = -\int d^3x \left(\Lambda(x)\dot{B}(x) - \dot{\Lambda}(x)B(x)\right). \tag{2.3}$$

そこでQEDにおけるB場と同様な役割を果たすものをQCDで見付けるためにはどうしたら良いか？　それにはQEDで

$$\delta\bar{\delta}A_\mu = i\partial_\mu B \tag{2.4}$$

が成立つことに注目すると，(2.1)は次のように書ける。

$$\partial_\lambda F_{\lambda\mu} = -j_\mu + i\delta\bar{\delta}A_\mu. \tag{2.5}$$

この式は多成分の式と見做せばQCDでも成立つし，かつ

$$\partial_\mu(\delta\bar{\delta}A_\mu)=0. \tag{2.6}$$

この表式がゲージ変換の生成演算子であることから，QEDでは次のWard−高橋恒等式が成立する。

$$\partial_\mu\langle \delta\bar{\delta}A_\mu(x), \psi(y), \bar{\psi}(z)\rangle = ie\left(\delta^4(x-y)-\delta^4(x-z)\right)S_F(y-z). \tag{2.7}$$

これに対応する次式はQCDで"閉じ込め"の議論に応用された。

$$\begin{aligned}&\partial_\lambda\langle \delta\bar{\delta}A^a_\lambda(x), \psi^\alpha(y), \bar{\psi}^\beta(z)\rangle \\ &= igT^a_{\alpha\beta}\left(\delta^4(x-y)-\delta^4(x-z)\right)S_F(y-z),\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&\partial_\lambda\langle \delta\bar{\delta}A^a_\lambda(x), A^b_\mu(y), A^c_\nu(z)\rangle \\ &= g f_{abc}\left(\delta^4(x-y)-\delta^4(x-z)\right)D_{F\mu\nu}(y-z).\end{aligned} \tag{2.9}$$

§3. 不定計量

§1の最後に述べられたBRS代数の表現を求めるためには不定計量が必要となる。詳しくは中西さんの綜合報告[4]を見ていただくことにして、ここでは最少限必要な事項について述べておく。先づ線形ベクトル空間$\mathcal{V}$を考えて、2つのベクトルの内積$\langle \ell | k \rangle$を導入する。$\mathcal{V}$は縮退していないとしてこの中に基底の完全系$\{|e_j\rangle\}$を導入すると、任意のベクトル$|x\rangle$が一意的に次のように展開されるとする。

$$|x\rangle = \sum_j x_j |e_j\rangle . \qquad (3.1)$$

線形演算子Tのこの完全系に関する表現tの定義は

$$T|e_j\rangle = \sum_k |e_k\rangle t_{kj} . \qquad (3.2)$$

また計量行列ηは

$$\eta_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle , \quad \eta^\dagger = \eta . \qquad (3.3)$$

ここで基底の変換

$$|e_j'\rangle = \sum_k |e_k\rangle u_{kj} , \ (\det u \neq 0) \qquad (3.4)$$

を導入すると、tとηとは次のように変換される。

$$t' = u^{-1} t u , \quad \eta' = u^\dagger \eta u . \qquad (3.5)$$

さて行列要素$\langle e_i | T | e_j \rangle = (\eta t)_{ij}$に対し、エルミートの$T$では

$$\eta t = (\eta t)^\dagger = t^\dagger \eta . \qquad (3.6)$$

行列tとベクトル$|x\rangle$との積は次式で定義する。

$$t|x\rangle = \sum_{ij} t_{ij} x_j |e_i\rangle . \qquad (3.7)$$

特に t が T の表現ならば $T|\alpha\rangle = t|\alpha\rangle$ が成立する。後の便利のために列ベクトル $|\alpha)$ と行ベクトル $(\alpha|$ とを導入すると $\langle\alpha|y\rangle = (x, \eta y)$ が成立つことに注意しておく。

§4. BRS代数の表現

Q_B と iQ_c との表現行列を q, n と書くと，エルミート性は

$$\eta q = q^\dagger \eta,\quad \eta n = -n^\dagger \eta. \tag{4.1}$$

そしてBRS代数に対応する関係は

$$[n, q] = q,\quad q^2 = 0,\quad q^{\dagger 2} = 0. \tag{4.2}$$

上の(4.1)と(4.2)を満たす q, n, η の行列表現を求めよう。そのために基底の変換(3.4)を利用して η を標準形に選ぶ。

$$\eta^2 = 1. \tag{4.3}$$

以下ではゲージ理論の結果を利用して次の要請を置く。

要請 1. n の固有値スペクトルはすべての整数よりなる。

そしてこの要請に従って n を対角形に選ぶ。(4.1)より

$$n^\dagger = n,\quad \eta n = -n\eta. \tag{4.4}$$

従って(4.2)より

$$[n, q^\dagger] = -q^\dagger. \tag{4.5}$$

すると次のようなCasimir演算子 Δ が見付かる。

$$\Delta = q^\dagger q + q q^\dagger, \tag{4.6}$$

$$[\Delta, q] = [\Delta, q^\dagger] = [\Delta, n] = [\Delta, \eta] = 0. \tag{4.7}$$

従って Δ の固有値により表現を分類できる。先ず(4.6)から明

らかであるが，△の固有値は正定値であるからλ^2と書くことにする。△とηとの可換性から異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することが示される。すなわち

$$\Delta|\alpha_1\rangle=\lambda_1^2|\alpha_1\rangle,\quad \Delta|\alpha_2\rangle=\lambda_2^2|\alpha_2\rangle,\quad (\lambda_1^2\neq\lambda_2^2) \tag{4.8}$$

$$\longrightarrow \qquad \langle\alpha_1|\alpha_2\rangle=0 \,. \tag{4.9}$$

次に固有値λ^2の値によって2つの表現を導入する。

BRS一重項

固有値λ^2が0となるようなベクトルの集合$\mathcal{V}_S$をBRS一重項空間と呼ぶことにする。

$$\mathcal{V}_S=\{\,|s\rangle \,|\, \mathcal{V}\ni|s\rangle,\ \Delta|s\rangle=0\}. \tag{4.10}$$

(4.6)から明らかなようにこの空間の任意のベクトル$|s\rangle$は

$$q|s\rangle=0,\quad q^\dagger|s\rangle=0 \tag{4.11}$$

を満たすし，ηと△との可換性より$\eta|s\rangle$も$\mathcal{V}_S$に属する。

$$\eta\mathcal{V}_S=\{\,\eta|s\rangle \,|\, \mathcal{V}_S\ni|s\rangle\}=\mathcal{V}_S \,. \tag{4.12}$$

さてηの固有値は(4.3)により±1であるが，(-1)を除くために次の要請を導入する。

要請2．BRS一重項空間は正定値空間である。

しからば$\mathcal{V}_S$の中では$\eta=1$のみが可能であり，(4.4)よりnの固有値をNとするとこの部分空間ではN=0のみが可能であり，従って$\mathcal{V}_S$を特徴付ける性質は

$$q\mathcal{V}_S=q^\dagger\mathcal{V}_S=n\mathcal{V}_S=\{0\},\quad \eta\mathcal{V}_S=\mathcal{V}_S \,. \tag{4.13}$$

BRS二重項

固有値λ^2が0でないベクトルの作る線形空間$\mathcal{V}_D$をBRS二重項空間と呼ぶと，(4.9)を考慮して

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_S \oplus \mathcal{V}_D, \quad \mathcal{V}_S \perp \mathcal{V}_D. \tag{4.14}$$

と書くことになる。更にparent spaceとdaughter spaceとを次のように定義する。

$$\mathcal{V}_p = q^\dagger \mathcal{V}, \quad \mathcal{V}_d = q\mathcal{V}. \tag{4.15}$$

すると$q, q^\dagger$とηとの交換関係より

$$\eta \mathcal{V}_d = \mathcal{V}_p, \quad \eta \mathcal{V}_p = \mathcal{V}_d. \tag{4.16}$$

そこで$\lambda^2 \neq 0$の時に$\Delta|\alpha\rangle = \lambda^2|\alpha\rangle$となる$|\alpha\rangle$を次のように分解する。

$$|\alpha\rangle = q\left(\frac{q^\dagger}{\lambda^2}|\alpha\rangle\right) + q^\dagger\left(\frac{q}{\lambda^2}|\alpha\rangle\right) \equiv |d\rangle + |p\rangle. \tag{4.17}$$

$|d\rangle$は明らかに$\mathcal{V}_d$に属し，$|p\rangle$は$\mathcal{V}_p$に属するから

$$\mathcal{V}_D = \mathcal{V}_d \oplus \mathcal{V}_p. \tag{4.18}$$

また定義から明らかに次の空間は0ベクトルのみからなる。

$$q\mathcal{V}_d = q^\dagger \mathcal{V}_p = \{0\}. \tag{4.18}$$

さてΔとnとは可換であるから$\mathcal{V}_p$のベクトルで

$$\Delta|p\rangle = \lambda^2|p\rangle, \quad n|p\rangle = N|p\rangle \tag{4.19}$$

を満たすベクトルを$|p, N\rangle$と書くことにすると

$$q|p, N\rangle \equiv \lambda|d, N+1\rangle \in \mathcal{V}_d, \tag{4.20}$$

$$q^\dagger|d, N+1\rangle = \lambda|p, N\rangle. \tag{4.21}$$

$|p,N\rangle$と$|d,N+1\rangle$とはBRS二重項を形成することになる。

また(4.4)と(4.16)より次の新らしい二重項を導入できる。

$$\eta|p,N\rangle\equiv|d',-N\rangle,\quad \eta|d,N+1\rangle\equiv|p',-N-1\rangle. \tag{4.22}$$

これがBRS二重項になることは次式が成立するからである。

$$q|p',-N-1\rangle=\lambda|d',-N\rangle,\quad q^{\dagger}|d',-N\rangle=\lambda|p',-N-1\rangle. \tag{4.23}$$

この4つのベクトルがBRS代数の1つの既約表現quartetを与えることになる。図式的には次のようになる。

$$\begin{tikzcd}
|p,N\rangle \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[d, leftrightarrow, "\eta"] & |d,N+1\rangle \arrow[l, shift left, "q^{\dagger}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\eta"] \\
|d',-N\rangle \arrow[r, shift left, "q^{\dagger}"] & |p',-N-1\rangle \arrow[l, shift left, "q"]
\end{tikzcd}$$

さて上の二重項と下の二重項との関係は対称的であるから、以後$N\geqq 0$として$|p\rangle,|d\rangle$を$|p^j\rangle,|d^j\rangle$そして$|p'\rangle,|d'\rangle$を$|p_j\rangle,|d_j\rangle$のように番号を上下に付けて区別する。$\mathcal{V}_d$あるいは$\mathcal{V}_p$に属するベクトルは0ノルムである。例えば$\mathcal{V}_d$に属する$q|x\rangle$というベクトル$|y\rangle$のノルムは

$$\langle y|y\rangle=(x,q^{\dagger}\eta q x)=(x,\eta q^2 x)=0.$$

しかしながら$\mathcal{V}_p$のベクトルと$\mathcal{V}_d$のベクトルとの内積は

$$\langle p^j|d_j\rangle=(p^j,\eta\eta p^j)=(p^j,p^j)>0.$$

そこで右辺が1になるようにp^jを規格化しておけば

$$\langle p^j|d_j\rangle=\langle p^j|Q_B|p_j\rangle=\langle d^j|p_j\rangle=1. \tag{4.24}$$

他のquartetに対してはSchmidtの直交法を用いて

$$\langle p^i | d_j \rangle = \langle p_i | d^j \rangle = \delta_{ij} . \qquad (4.25)$$

ところで△の固有値λ^2は基底の選び方に依存する。すなわち基底の変換(3.4)に対し△の変換は固有値を変えるようなものとなるからである。ただ$\lambda^2=0$, $\lambda^2\neq 0$という性質は不変である。実際上の基底に対しては

$$Q_B | p^i \rangle = \lambda_i | d^i \rangle , \quad Q_B | p_i \rangle = \lambda_i | d_i \rangle \qquad (4.26)$$

であるが，次のように基底を変えてみよう。

$$| \bar{d}^i \rangle = \sqrt{\lambda_i} | d^i \rangle , \quad | \bar{p}^i \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} | p^i \rangle . \qquad (4.27)$$

そして$|\bar{d}_i\rangle$, $|\bar{p}_i\rangle$も同様に定義すると

$$Q_B | \bar{p}^i \rangle = | \bar{d}^i \rangle , \quad Q_B | \bar{p}_i \rangle = | \bar{d}_i \rangle \qquad (4.28)$$

となってλ^2はすべて1となってしまう。ただし$\lambda_i\neq 0$. この変換(4.27)は(4.25)を変えない変換である。従って$\mathcal{V}$内での基底の組を次のような標準形に選べる。

1) $\mathcal{V}_S$での基底の組$\{|s_i\rangle\}$

$$\langle s_i | s_j \rangle = \delta_{ij} , \qquad Q_B | s_i \rangle = 0 . \qquad (4.29)$$

2) $\mathcal{V}_D$での基底の組 $\{ |d_i\rangle, |d^i\rangle, |p_i\rangle, |p^i\rangle \}$

$$\langle p_i | d^j \rangle = \langle p^i | d_j \rangle = \delta_{ij} , \quad \text{他はすべて } 0. \qquad (4.30)$$

$$Q_B | p^i \rangle = | d^i \rangle , \quad Q_B | p_i \rangle = | d_i \rangle . \qquad (4.31)$$

さて$\mathcal{V}_S$, $\mathcal{V}_p$という空間は基底の選び方に依存する。しかし$\mathcal{V}_d$と次式で定義される$\mathcal{V}_{phys}$は基底の選び方に依らぬ。

$$\mathcal{V}_{phys} = \mathcal{V}_S \oplus \mathcal{V}_d . \qquad (4.32)$$

すなわち$\mathcal{V}_d$と$\mathcal{V}_{phys}$は基底を用いずに定義できるからで、

$$\mathcal{V}_d = \{ Q_B|\alpha\rangle \mid \mathcal{V} \ni |\alpha\rangle \}, \tag{4.33}$$

$$\mathcal{V}_{phys} = \{ |\alpha\rangle \mid \mathcal{V} \ni |\alpha\rangle,\ Q_B|\alpha\rangle = 0 \}. \tag{4.34}$$

$\mathcal{V}_d$はQ_B-coboundary, $\mathcal{V}_{phys}$はQ_B-cocycleであり、また

$$\mathcal{H}_{phys} = \mathcal{V}_{phys} / \mathcal{V}_d \tag{4.35}$$

はQ_B-cohomologyである。実際に基底を変えることにより$\mathcal{V}_s$には$\mathcal{V}_d$が、$\mathcal{V}_p$には$\mathcal{V}_s$と$\mathcal{V}_d$とが混ってくることが示せる。[5] また$\mathcal{V}_s$に対する射影演算子$P(\mathcal{V}_s)$を

$$P(\mathcal{V}_s) = \sum_i |s_i\rangle\langle s_i| \tag{4.36}$$

で定義すれば、$|f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{V}_{phys}$に対して次式が示せる。

$$\langle f|g\rangle = \langle f|P(\mathcal{V}_s)|g\rangle. \tag{4.37}$$

文献

1) N.Nakanishi and I.Ojima,"Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity",World Scientific(1990), Singapore.

2) T.Kugo and I.Ojima,Prog. Theor.Phys.Suppl.No.66(1979)1.

3) K.Nishijima,Prog.Theor.Phys.74(1985)889.

4) N.Nakanishi,Prog.Theor.Phys.Suppl.No.51(1972)1.

5) K.Nishijima,Prog.Theor.Phys.80(1988)897,905.