数理解析研究所講究録
第 869 巻 1994 年 194-204

場の理論におけるルジャンドル変換
— On-shell 展開 と Inversion 法 —

慶大理工・福田礼次郎

I. 作用積分汎関数 と effective action

古典力学では運動方程式を次の様に得ることができる。つまり、ラグランジアン $L(\dot{q},q)$ の時間積分である作用汎関数 $I[q]$ の停留条件を満たす $q(t)$ を求めればよい。

$$I[q]=\int dt\, L(\dot{q},q)\ , \qquad \frac{\delta I[q]}{\delta q(t)}=0 \qquad (1)$$

ここで $\delta/\delta q(t)$ は汎関数微分である。量子論でも、c-数 q を q-数 $\hat{q}$ に置き換えれば (1) 式はそのまま成立するが、q-数方 式をそのまま解くのは、一般には不可能なので、期待値 $\langle\hat{q}\rangle$ に対する方程式を作ることを考える。その為にまず Green's function の生成汎関数 $W[J]$ を

$$\exp iW[J] = \int[dq]\exp i\int_{-\infty}^{\infty}dt\{L(\dot{q},q)+J(t)q(t)\} \qquad (2)$$

によって導入する。ここで $\int[dq]$ は経路積分を表わす。古典力学の作用汎関数 $I[q]$ に対応するものは effective action

と呼ばれ $\Gamma[q]$ と書かれる。これは $W[J]$ から次の様に汎関数ルジャンドル変換で定義される。

$$\Gamma[q] = W[J] - \int_{-\infty}^{\infty} dt\, J(t) \frac{\delta W[J]}{\delta J(t)}, \qquad (3)$$

$$q(t) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(t)} = {}_J\langle 0 | \hat{q}(t) | 0 \rangle_J . \qquad (4)$$

式(4)は q の定義であり、外場 J の存在下での基底状態を $|0\rangle_J$ と表わしてある。$\Gamma[q]$ が作用汎関数に対応するものであることは、次の恒等式から納得できる。

$$\frac{\delta \Gamma[q]}{\delta q(t)} = -J(t) \qquad (5)$$

これはルジャンドル変換の性質からくるものである。人為的に入れた外場 $J(t)$ は probe とも呼ばれ、正しい理論にもどるためには $J(t)=0$ としなければならない。その条件が $\Gamma[q]$ の停留条件

$$\frac{\delta \Gamma[q]}{\delta q(t)} = 0 \qquad (6)$$

と一致して、(6)式が期待値 $q(t)$ に対する運動方程式である。その解の一つを $q^{(0)}(t)$ とおくと

$$q^{(0)}(t) = \langle 0 | \hat{q}(t) | 0 \rangle \qquad (7)$$

と書けるが、$|0\rangle = |0\rangle_{J=0}$ はもともとの理論における基底状態である。普通は $q^{(0)}(t)$ は t にはよらない。そこで $q^{(0)}(t) = q^{(0)}$ と書くことにする。

II On-shell 展開

式(6)から $q^{(0)}$ が決まるという意味で基底状態 $|0\rangle$ を決定できた。それでは励起状態はどうかという問題が次に浮かんでくる。その為やはり古典力学の微小振動論に倣って(6)式の $q^{(0)}$ の近傍の解を

$$q(t) = q^{(0)} + \Delta q(t) \tag{8}$$

とおいて探す。

$$0 = \left.\frac{\delta\Gamma[q]}{\delta q(t)}\right|_{q^{(0)}+\Delta q}$$

$$= \left.\frac{\delta\Gamma[q']}{\delta q(t)}\right|_{q^{(0)}} + \int dt' \left.\frac{\delta^2\Gamma[q]}{\delta q(t)\delta q(t')}\right|_{q^{(0)}} \Delta q(t') + \cdots$$

ここで第一項は $q^{(0)}$ 自身が(6)式の解であるから零, さらに Δq が小さいとすると結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \Gamma^{(2)}(t,t') \, \Delta q(t') = 0 \tag{9}$$

という微小振動モードを決定する方程式を得る。次のような定義式

$$\Gamma^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n) \equiv \left.\frac{\delta^n \Gamma[q]}{\delta q(t_1)\delta q(t_2)\cdots\delta q(t_n)}\right|_{q^{(0)}} \tag{10}$$

を導入した。量子論では(9)式が2点グリーン関数の極を求める式であることはルジャンドル変換からくる恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(t)\,\delta J(t')}\frac{\delta^2 \Gamma[q]}{\delta q(t')\,\delta q(t'')} = -\delta(t-t'')$$

より明らかである。(9)式が我々のOn-shell展開の最低次の式であり、モード決定方程式またはOn-shell方程式と呼ぶことにする。

さてOn-shell展開の高次項は、(9)式で決ったモード間の散乱行列を表わすことが次のようにして判る。良く知られたS行列との関係を見るために量子化された場の理論に移る。最も簡単なKlein-Gordon場 $\varphi(x)$ を扱うことにすると上の議論の $q(t)$ を多成分 $q_i(t)$ に拡張し、i を空間座標 $\mathbf{x}$ と見做して

$$q(t) \to q_i(t) \to q(i,t) \to q(\mathbf{x},t) \equiv \varphi(\mathbf{x},t) = \varphi(x)$$

のように思いなおすだけですべて適用する。例えば、(9)式は

$$\int d^4x'\, \Gamma^{(2)}(x,x')\,\Delta\varphi(x') = 0 \qquad (11)$$

と書ける。さてOn-shell展開の高次項を議論するために、

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)} + \Delta\varphi(x), \qquad (12)$$

$$\Delta\varphi(x) = \Delta\varphi^{(1)}(x) + \Delta\varphi^{(2)}(x) + \Delta\varphi^{(3)}(x) + \cdots \qquad (13)$$

とおいて、$\Delta\varphi^{(n)}(x)$ $(n \geq 2)$ を $\left(\Delta\varphi^{(1)}(x)\right)^n$ のオーダーの量と考える。(12)式を

$$0 = \left.\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi^{(0)}+\Delta\varphi}$$

に代入して、$\Delta\varphi^{(1)}$ の冪で整理し、各の冪ですべて零とするという条件を課す。最低次は $\Delta\varphi^{(1)}$ の一次で (11)式に一致する。

$$\int d^4x' \, \Gamma^{(2)}(x,x') \, \Delta\varphi^{(1)}(x') = 0 \tag{14}$$

$n \geq 2$ に対しては結果は次の様になる。

$$\Delta\varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} W^{(n+1)}(x, x_1, \cdots, x_n) \, W^{(2)-1}(x_1, x_1') \cdots W^{(2)-1}(x_n, x_n')$$
$$\times \Delta\varphi^{(1)}(x_1') \Delta\varphi^{(1)}(x_2') \cdots \Delta\varphi^{(1)}(x_n'). \tag{15}$$

ここで（以下でも）繰り返し現われる変数 $x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots, x_n, x_n'$ についてはすべて全時空で積分することは暗に了解されているものとする。さらに

$$W^{(n+1)}(x, x_1, \cdots, x_n) = \left. \frac{\delta^{n+1} W[J]}{\delta J(x) \delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \tag{16}$$

を導入した。(15)式において $W^{(n+1)}$ の x-channel を除いて、すべての channel は $W^{(2)-1}$ で pole が切り取られ（足切り）、さらに On-shell の wave function $\Delta\varphi^{(1)}$ がくっついている。x-channel は pole を含んでいるし wave function もついていない。さて(15)式は x-channel を除くと LSZ の reduction 公式そのものの形をしている。実際　LSZ の方法を逆にたどってみるとよく判る。その為 $\hat{\phi}(x)$ を Heisenberg 表示での Klein-Gordon 場として、in, out field を次の様に導入する。

$$\hat{\phi}(x) \longrightarrow \sqrt{Z} \, \hat{\phi}_{in(out)}(x), \qquad (x^0 \longrightarrow -\infty\,(+\infty))$$

$$\hat{\phi}_{in(out)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \left[\hat{a}_{in(out)}(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + \hat{a}^{+}_{in(out)}(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x} \right],$$

$$[\hat{a}_{in}(\mathbf{k}), \hat{a}^{+}_{in}(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad (\text{out も同様}),$$

$$k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

さらに n-粒子状態を

$$|1^{(+)(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\tilde{a}^{+}_{in(out)}(k)|0\rangle$$

$$|2^{(+)(-)}\rangle = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \times \tilde{a}^{+}_{in(out)}(k)\,\tilde{a}^{+}_{in(out)}(k')|0\rangle \qquad (17)$$

等で定義する。ここで $\tilde{a}^{+}$ は

$$\tilde{a}_{out}(k) = \tilde{C}^{-}(k)\,\hat{a}_{out}(k),$$
$$\tilde{a}^{+}_{in}(k) = \tilde{C}^{+}(k)\,\hat{a}^{+}_{in}(k), \qquad (18)$$

で定義されるが、$\tilde{C}^{\pm}$ は次のように理解される。(14)式において $\Gamma^{(2)}$ は $x-x'$ の関数であり そのフーリエ変換は p^2 の関数で、(14)式はフーリエ空間では

$$\Gamma^{(2)}(p^2)\,\Delta\varphi^{(1)}(p) = 0 \qquad (19)$$

と書ける。$p^2 = m^2$ で $\Gamma^{(2)}$ が零となったとすると m^2 が粒子(モード)の質量を与えるものである。(19)式の non-trivial な解は $\Delta\varphi^{(1)}(p) \propto \delta(p^2 - m^2)$ の形をしているが この解は、p_0 について見ると $p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ の2つの branch を持っている。

$$\Delta\varphi^{(1)}(p) = 2\pi\left(C^{+}(\boldsymbol{p})\,\theta(p_0) + C^{-}(-\boldsymbol{p})\,\theta(-p_0)\right)\delta(p^2 - m^2)$$

と置いて もとの x-空間へもどると

$$\Delta\varphi^{(1)}(x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\tilde{C}^{+}(k)\,e^{-ik\cdot x} + \tilde{C}^{-}(k)\,e^{ik\cdot x}\right], \qquad (20)$$

$$\tilde{C}^{\pm}(k) = \frac{C^{\pm}(k)}{2k_0}, \qquad (21)$$

と書ける。(18)式の $\tilde{C}^{\pm}(k)$ は このようにして定義されたものである。

さて LSZ を適用した結果

$$\Delta\varphi^{(1)}(x) = \langle 1^{(-)}|\hat{\Phi}(x)|0\rangle + \langle 0|\hat{\Phi}(x)|1^{+}\rangle,$$

$$\Delta\varphi^{(2)}(x) = \langle 2^{(-)}|\hat{\Phi}(x)|0\rangle + \langle 1^{(-)}|\hat{\Phi}(x)|1^{(+)}\rangle + \langle 0|\hat{\Phi}(x)|2^{(+)}\rangle,$$

等が得られる。$\Delta\varphi^{(n)}$についても和をとることができてその結果はコヒーレント状態にまとめ上げることができる。

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi^{(0)} + \Delta\varphi^{(1)}(x) + \Delta\varphi^{(2)}(x) + \cdots\cdots \\ &= \langle\theta^{-}|\hat{\Phi}(x)|\theta^{+}\rangle,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}|\theta^{+(-)}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}|n^{+(-)}\rangle \\ &= \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\tilde{a}^{+}_{in(out)}(k)\right]|0\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

$\Gamma[\varphi]$の値そのものは S-行列要素の生成汎関数となっていることも判る：

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi^{(0)}+\Delta\varphi] &= -i\langle\theta^{+}|\theta^{-}\rangle \\ &= -i\sum\tilde{c}^{-}\tilde{c}^{-}\cdots\tilde{c}^{-}\tilde{c}^{*}_{+}\tilde{c}^{*}_{+}\cdots\tilde{c}^{*}_{+} \\ &\quad\times\langle 0|\hat{a}_{out}\hat{a}_{out}\cdots\hat{a}^{+}_{in}\hat{a}^{+}_{in}\cdots|0\rangle\end{aligned} \tag{24}$$

ここでは簡単のため運動量変数等を省略した。(22)式と(23)式が C_n-shell 展開式の公式である。結局我々は C-数の汎関数 $\Gamma[\varphi]$ から出発して、Fock 空間を構成したことになる。

III Inversion 法.

ルジャンドル変換の最も大切な点は, (4)式を逆に解いて, J を q の汎関数として表わすところにある。このことを利用してルジャンドル変換を拡張したのが Inversion 法である。まず W[J] の定義を拡張する. (2)式の右辺を

$$\int [dq]\ \exp i \int dt\, L(\dot{q}, q, J) \tag{25}$$

と書く。ここで $L(\dot{q}, q, J)$ は任意の J-dependence を許されて居て J=0 とすれば もとの Lagrangian にもどるという条件さえ満たせばよいとする。

$$L(\dot{q}, q, J=0) = L(\dot{q}, q) \tag{26}$$

この拡張されたラグランジアンのもとで任意の量を計算する。この量は別にオペレーターの期待値として書けなくてもよい。実際の計算は摂動によるものであり相互作用定数 g のべき展開となる。計算する量を φ とする;

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} g^n f_n(J) \tag{27}$$

のように書く。$n=\infty$ の項まですべて和がとれれば厳密解を得たことになるがふつうは有限項までしか計算できない。さて (27)式を J について解く つまり invert する。

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} g^n h_n(\varphi) \tag{28}$$

もし (27)式で $n=N$ まで計算してあったとすると (28)式でも $n=N$ まで求めることができる。(28)式で J=0 として φ の値を求めると, (27)式

で $J=0$ として求めたものよりは良い値が得られる。特に対称性が破れた解は (27)式の有限項からは得られないが (28)式の有限項とったもので $J=0$ とした φ の解の中にはちゃんと存在する。これは J について解いたとき、グラフの言葉で言えば、あるクラスの無限個のグラフが自動的に取り込まれることに依る。

特に $O(q)$ をあるオペレーター（q の関数として）として

$$L(\dot{q},q,J) = L(\dot{q},q) + J\,O(q),$$

$$\varphi = O(q)$$

であるときは、上の inversion による方法が ルジャンドル変換の方法に一致することは明らかである。また、ルジャンドル変換後の $\Gamma[\varphi]$ に対するグラフルール等が知られていない場合でも、inversion の方法は有効である。

以上で述べた On-shell 展開と Inversion を両方用いることにより様々な応用が可能である。そのいくつかを以下で述べる。詳細は各々に対応する論文にゆずる。

IV 応用

Onshell 方程式 (14) は普遍的なものであり、到るところ分野を問わず現われる。

(A) N-体束縛態の方程式

外から加える外場 J を

$$J(x)\,\phi(x) + J(x,y)\,\phi(x)\,\phi(y) + \cdots + J(x,y\ldots z)\,\phi(x)\,\phi(y)\cdots\phi(z)$$

とN-体にcoupleさせることにより(14)式が任意のNについてN-体のBS方程式を導くことが示される。なお、任意のNについてのBS方程式はここで初めて得られたものである。(二次の横島のreportを参照)。

特に非相対論的なラグランジアンではN-体のシュレーディンガー方程式と(14)式が一致することも示される。

さらに任意のNについてBS振巾$\Delta\varphi^{(i)}$の規格化もすっきりできて従来のように特別な議論が不用であることも判る。

(B) On-shell BS

外場Jは勝手であるので例えば$J(x,y)$がxとyのchannelについてon-shell因子$(\Box_x+m^2)(\Box_y+m^2)$を含んでいる場合を考えることができる。このとき(14)式はOn-shellの2粒子から束縛状態をつくる方程式となる。おそらくこのとき束縛状態を存在するchannelはunphysicalとなるので解析接続が必要である。このようにして出来上った(14)式はS-行列、正しくはT-行列、のpoleを探す式となっている。

(C) 非摂動的な真空の上での励起モードと散乱

On-shell展開はまず基底状態を決定する。それは非摂動的なものも含まれる。展開の高次はその上に励起されるモード、

これらのモード間の散乱を決定するので QCD の様に真空が非摂動的である場合に好都合である。特に散乱等，どの部分がハドロンの wave function でどの部分が散乱に寄与するかについてはっきりした区別をつけられる。

(D) On-shell 展開の方法は 非相対論の分野 例えば原子の系，固体物理の系 等に応用が広いのであるがここではそれについては述べない。

以上の話の内容は，主に次の文献をまとめたものである。

1) R. Fukuda, M. Komachiya and M. Ukita, Phys. Rev. D38, 3747 (1988).

2) M. Komachiya, M. Ukita and R. Fukuda, Phys. Rev. D42, 2792 (1990)