

N 体 BS 方程式の導出とその散乱

慶大理工 横島 智 (Satoshi Yokojima)
 小町谷 昌宏 (Masahiro Komachiya)
 福田 礼次郎 (Reijirou Fukuda)

On-shell 展開の方法により、 N 体の束縛状態方程式を導き、さらに、その束縛状態間の散乱を調べる。

まず一章で、話の元になる N 体の束縛状態方程式を導く。それは

$$(c_{N,N}^{N-1})^{-1} \Delta \phi_N^{(1)'} = 0 \tag{1}$$

という非常にコンパクトな形になる。ここに、 $c_{N,N}^{N-1}$ は、図 1 にあるように、下の N は左右の propagator の足の本数、上の $(N-1)$ が Legendre 変換の回数を表し、点線のように切った時、常に N 本以上の propagator が走っているグラフ全ての和で与えられる。

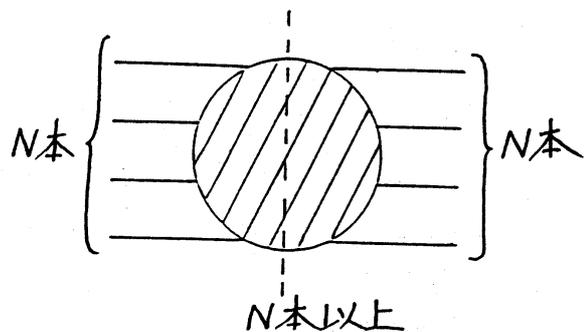


図1. $c_{N,N}^{N-1}$ のグラフ

さて、(1) 式で要求されるものは、 $c_{N,N}^{N-1}$ ではなく、その inverse である。そこで、二章では $(c_{N,N}^{N-1})^{-1}$ の表式を一般の N に対して求める [1]。さらに、こうして得られた束縛状態同士の散乱の表式には、ある種のルールがあることも分かったので、三章ではそのことについて簡単に見ていく。

1. N 体の束縛状態方程式

連結 Green 関数の生成母関数 $W[J_1, \dots, J_N]$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned} & \exp(iW[J_1, \dots, J_N]) \\ & \equiv \int [d\varphi] \exp i \left\{ \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x)) + \sum_{i=1}^N \int d^4x_1 \cdots d^4x_i J_i(x_1, \dots, x_i) \right. \\ & \quad \left. \times (\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_i) - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_i) \rangle_{J=0}) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに \mathcal{L} は Lagrangian 密度でエルミートスカラーボゾン場 $\varphi(x)$ により書いているものとする。また、probe として J を 1 体から N 体まで全部一度に入れてしまう。(真空期待値を引いているのは後の便宜のため。) このような probe の入れ方をしている理由は、boson においては 1 体から N 体まで全ての channel が couple してしまうため、decouple する必要があるからである。この W に対する Legendre 変換は、

$$\Gamma[\phi_1, \dots, \phi_N] = W[J_1, \dots, J_N] - \sum_{i=1}^N J_i \phi_i \quad (3)$$

$$\phi_i \equiv \phi_i(x_1, \dots, x_i) = \frac{\delta W[J_1, \dots, J_N]}{\delta J_i(x_1, \dots, x_i)} \quad (4)$$

となり、この有効作用 $\Gamma[\phi_1, \dots, \phi_N]$ に対して on-shell 展開の方法を用いることにより、次のような N 体までの channel が couple した束縛状態方程式が得られる。

$$\sum_{k=1}^N \frac{\delta^2 \Gamma_N}{\delta \phi_j \delta \phi_k} \Big|_{\phi_l = \phi_l^{(0)} \quad (l=1, \dots, N)} \Delta \phi_k = 0 \quad (5)$$

ここに $\phi_l^{(0)}(x_1, \dots, x_l) = \langle 0 | T \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_l) | 0 \rangle_{J=0}$ である。以下この章の主題は $\delta^2 \Gamma / \delta \phi_j \delta \phi_k$ の具体的表式を求め、channel を decouple することである。今、 $N \geq 5$ に対して $\Gamma[\phi_1, \dots, \phi_N]$ の一般表式は知られていない。だが、(5) 式で必要な情報は Γ のうち $(\phi_i - \phi_i^{(0)})$ の 2 次の係数だけである。ここで、Legendre 変換の性質として

$$\sum_{j=1}^N \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \frac{\delta^2 W}{\delta J_j \delta J_k} = -\delta_{i,k} \quad (6)$$

という恒等式が成立するので、(5)式は W のうち、 J_i の 2 次の係数だけで決まる。唯、 $N \times N$ 行列の逆行列が必要なので、次のような逐次 Legendre 変換を導入する。

$$\Gamma_0[J_1, \dots, J_N] \equiv W[J_1, \dots, J_N] \quad (7)$$

$$\phi_{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1}) \equiv \frac{\delta \Gamma_i[\phi_1, \dots, \phi_i, J_{i+1}, \dots, J_N]}{\delta J_{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1})} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_{i+1}[\phi_1, \dots, \phi_{i+1}, J_{i+2}, \dots, J_N] \\ & \equiv \Gamma_i[\phi_1, \dots, \phi_i, J_{i+1}, \dots, J_N] - J_{i+1} \phi_{i+1} \end{aligned} \quad (9)$$

N 回 Legendre 変換を行うことによって得られる $\Gamma_N[\phi_1, \dots, \phi_N]$ は $\Gamma[\phi_1, \dots, \phi_N]$ と同じものを与えるので (3)、(4) 式の代わりに (7)~(9) 式を使って議論を進められる。以下 2 次の係数のみに注目し、積分記号を省略すると、

$$\begin{aligned} & \Gamma_i[\phi_1, \dots, \phi_i, J_{i+1}, \dots, J_N] \\ & = \frac{1}{2}(\phi_1, \dots, \phi_i, J_{i+1}, \dots, J_N) \begin{pmatrix} a_{1,1}^i \cdots a_{1,i}^i & b_{1,i+1}^i & \cdots & b_{1,N}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1}^i \cdots a_{i,i}^i & b_{i,i+1}^i & \cdots & b_{i,N}^i \\ b_{i+1,1}^i \cdots b_{i+1,i}^i & c_{i+1,i+1}^i & \cdots & c_{i+1,N}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N,1}^i \cdots b_{N,i}^i & c_{N,i+1}^i & \cdots & c_{N,N}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ J_{i+1} \\ \vdots \\ J_N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $\phi\phi$ の係数を a 、 ϕJ の係数を b 、 JJ の係数を c と書き、係数 a, b, c の上添字の i は Legendre 変換が i 回行われたことを示す目印としてつけた。さて、(8)、(9) 式より、 Γ_i および Γ_{i+1} の 2 次の係数 a^i, b^i, c^i と $a^{i+1}, b^{i+1}, c^{i+1}$ は Legendre 変換により結びつき、係数間の上添字 i に関する漸化式が次のように与えられる。

$$a_{j,k}^{i+1} = a_{j,k}^i - b_{j,i+1}^i (c_{i+1,i+1}^i)^{-1} b_{i+1,k}^i \quad (1 \leq j, k \leq i) \quad (11)$$

$$a_{j,i+1}^{i+1} = a_{i+1,j}^{i+1} = b_{j,i+1}^i (c_{i+1,i+1}^i)^{-1} \quad (1 \leq j \leq i) \quad (12)$$

$$a_{i+1,i+1}^{i+1} = -(c_{i+1,i+1}^i)^{-1} \quad (13)$$

$$b_{j,k}^{i+1} = b_{j,k}^i - b_{j,i+1}^i (c_{i+1,i+1}^i)^{-1} c_{i+1,k}^i \quad (1 \leq j \leq i, \quad i+2 \leq k \leq N) \quad (14)$$

$$b_{i+1,j}^{i+1} = (c_{i+1,i+1}^i)^{-1} c_{i+1,j}^i \quad (i+2 \leq j \leq N) \quad (15)$$

$$c_{j,k}^{i+1} = c_{j,k}^i - c_{j,i+1}^i (c_{i+1,i+1}^i)^{-1} c_{i+1,k}^i \quad (i+2 \leq j, k \leq N) \quad (16)$$

(16) 式は束縛状態方程式の解釈に、(14)、(15) 式も散乱を議論する際用いる。これら漸化式は具体的に解くことが出来、 Γ_N の係数 a^N が次のように求められる。

$$\Gamma_N[\phi_1, \dots, \phi_N] = -\frac{1}{2} \phi B^t C B \phi \quad (17)$$

ここで ϕ はベクトル、 B, C は行列を表し、 $(\phi)_i \equiv \phi_i$, $(C)_{i,j} \equiv (c_{i,i}^{i-1})^{-1} \delta_{i,j}$,

$$(B)_{i,j} \equiv \begin{cases} -b_{i,j}^{i-1} & (i > j) \\ I_i^0 & (i = j) \\ 0 & (i < j) \end{cases} \quad (18)$$

$I_i^0 \equiv \prod_{k=1}^i \delta^4(x_k - y_k)$ である。このとき、新しい変数 ϕ'_i を

$$\phi'_i = \sum_{j=1}^N (B)_{i,j} \phi_j \quad (19)$$

として導入すると (17) 式は、

$$\Gamma_N[\phi'_1, \dots, \phi'_N] = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi'_i (c_{i,i}^{i-1})^{-1} \phi'_i \quad (20)$$

となり Γ_N は ϕ に関して対角化された。これと (5) 式から、(1) 式のように channel の分離された N 体の束縛状態方程式が与えられる。ここで、まだ $c_{N,N}^{N-1}$ がどのようなものか分かっていなかった。実はこれは図 1 のように、左右に N 本の propagator の足が出ていて、点線部分を切ったとき N 本以上の propagator が走っているグラフ全ての和になる。

これには、図 2 のように $c_{j,k}^i$ が左側に j 本、右側に k 本の propagator の足を持ち、点線部分を切ったとき $(i+1)$ 本以上の propagator が走っているグラフ全ての和となることを示せば良いが、それは (16) 式の上添字 i についての数学的帰納法を用いることにより出来る。このようなグラフ的説明は $b_{j,k}^i$ についても出来る。

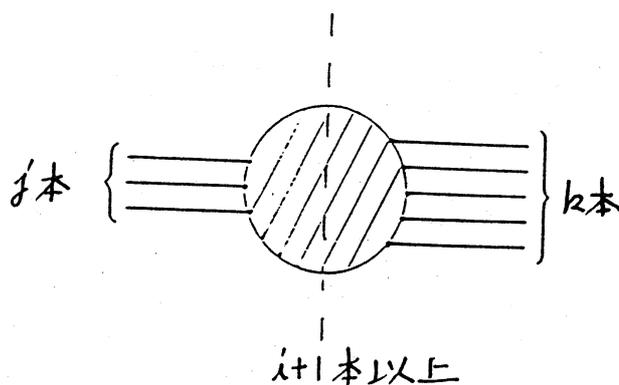


図 2. $c_{j,k}^i$ のグラフ

2. $(c_{N,N}^{N-1})^{-1}$ の表式

$c_{N,N}^{N-1}$ の具体的表式は求められたが、方程式 (1) には $(c_{N,N}^{N-1})^{-1}$ が出てくるので、これを求めなければならない。表式は一般の N に対して求められるが、分かりやすいよう $N = 1, 2, 3$ の場合をまず示し、さらに、 $N \geq 4$ で事情が複雑になることを見ていく。

$N = 1$ の場合、 $c_{1,1}^0$ は太線の propagator であり、従って bear propagator $\Delta_{F_{bare}}$ および 1 粒子既約な 2 点関数 Σ を使って

$$\begin{aligned} c_{1,1}^0 &= i\Delta_{F_{bare}} + i\Delta_{F_{bare}} \Sigma \Delta_{F_{bare}} + i\Delta_{F_{bare}} \Sigma \Delta_{F_{bare}} \Sigma \Delta_{F_{bare}} + \dots \\ &= i\Delta_{F_{bare}} + \Delta_{F_{bare}} \Sigma c_{1,1}^0 \end{aligned} \quad (21)$$

書ける。これより

$$(c_{1,1}^0)^{-1} = \frac{1}{i} \{ \Delta_{F_{bare}}^{-1} - \Sigma \} \quad (22)$$

方程式は x 表示で次のように modified Klein-Goldon 方程式になる。

$$i(\square_x + m^2)\Delta\phi'_1(x) - \int d^4z \Sigma(x,z)\Delta\phi'_1(z) = 0 \quad (23)$$

$N = 2$ の場合、 $c_{2,2}^1$ は 2 本以上の propagator が走っているグラフの和であるから、太線の propagator Δ_F 、2 粒子既約な 4 点関数 V_2 、symmetrize された単位行列 I_2 を使えば

$$\begin{aligned} c_{2,2}^1 &= (2i\Delta_F\Delta_F + i\Delta_F\Delta_F V_2\Delta_F\Delta_F + \frac{1}{2!}i\Delta_F\Delta_F V_2\Delta_F\Delta_F V_2\Delta_F\Delta_F + \dots)I_2 \\ &= i\Delta_F\Delta_F 2!I_2 + \frac{1}{2!}\Delta_F\Delta_F V_2 c_{2,2}^1 \end{aligned} \quad (24)$$

と書ける。これから

$$(c_{2,2}^1)^{-1} = \frac{1}{2!i} \left\{ \Delta_F^{-1}\Delta_F^{-1} - \frac{1}{2!}V_2 \right\} I_2 \quad (25)$$

方程式は x 表示で次のようにいわゆる 2 体の BS 方程式になる。

$$\int d^4y_1 d^4y_2 \left\{ \Delta_F^{-1}(x_1 - y_1)\Delta_F^{-1}(x_2 - y_2) - \frac{1}{2!}V_2(x_1, x_2; y_1, y_2) \right\} \Delta\phi_2(y_1, y_2) = 0 \quad (26)$$

$N \leq 3$ では kernel として N 粒子既約的なものをとってくるだけでその kernel K の繰り返しとして次のように $c_{N,N}^{N-1}$ を書くことができる。

$$\begin{aligned} c_{N,N}^{N-1} &= (A_0 + A_0 K A_0 + A_0 K A_0 K A_0 + A_0 K A_0 K A_0 K A_0 + \dots) N! I_N \quad (27) \\ &= A_0 N! I_N + A_0 K c_{N,N}^{N-1} \end{aligned}$$

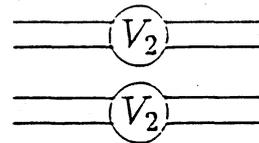
ここで $A_0 = (\Delta_F)^N$ である。これより

$$(c_{N,N}^{N-1})^{-1} = \frac{1}{N!} (A_0^{-1} - K) I_N \quad (28)$$

例えば、3体の場合3粒子既約な6点関数 V_3 および、外足の入れ換えで topological に異なるものについて和を取ることを意味する P を使い kernel K を $3!K = V_3 + P[V_2\Delta_F^{-1}]$ と書けばよい。

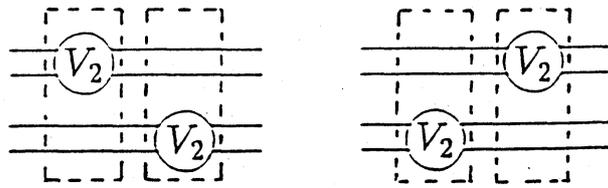
ところが4体の場合 combinatorics が複雑になり、さきの K を naive に拡張し $4!K = V_4 + P[V_3\Delta_F^{-1}] + P[V_2\Delta_F^{-1}\Delta_F^{-1}]$ と取ったのでは問題が生じる。

例えば、 $c_{4,4}^3$ には、図 3(a) のようなグラフがあるが、このグラフは (27) 式右辺では $A_0KA_0KA_0$ により出てくる。



(a)

ところが、この $A_0KA_0KA_0$ は図 3(b) にあるように、(i) V_2 が上2本にあるものが左側の K に、 V_2 が下2本にあるものが右側の K に入っている場合と、



(b)

(ii) V_2 が下2本にあるものが左側の K に、 V_2 が上2本にあるものが右側の K に入っている場合との、

図3. V_2 の2次のグラフ。直線は太線の propagator を表す。

(i)(ii)2つの場合があり、同じグラフが2度出てしまう。つまり図 3(a) のグラフは (27) 式右辺では正しい重みの倍の重みで出てしまう。この困難を乗り越えるには、 K を次のように修正すればよい。

$$4!K = V_4 + P[V_3\Delta_F^{-1}] + P[V_2\Delta_F^{-1}\Delta_F^{-1}] - P[V_2V_2] \quad (29)$$

この K を使えば (27) 式右辺は左辺と等号で結ばれる。このことはあるグラフ中に出てくる V_i の数が k 個ある時、これを V_i の k 次のグラフと呼ぶなら、この k に関する数学的帰納法を用いて示すことが出来る。この話はそのまま一般の K の場合に拡張出来、結果は次のように与えられる。

$$(c_{N,N}^{N-1})^{-1} = \frac{1}{N!i} \left\{ (\Delta_F^{-1})^N + \sum_{\{k, \alpha_k\}} \frac{1}{N!} P \left[(-1)^k V_{\alpha_1} V_{\alpha_2} \cdots V_{\alpha_k} (\Delta_F^{-1})^{N - \sum_{j=1}^k \alpha_j} \right] \right\} I_N \quad (30)$$

ここで V_i は i 粒子から i 粒子のグラフで i 粒子既約なグラフ全ての和のことであり、和は $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq N$ かつ各 i に対して $2 \leq \alpha_i \leq N$ を満たす全ての V_i の組み合わせにわたって取ることを意味する。(30) 式を (1) 式に代入してやれば、 N 体の束縛状態方程式が得られる。

さて、非相対論では、 N 体の方程式は Fermi sea がない場合、 N 体の Schrödinger 方程式になるはずである。一方、 V を potential に対応させると、(30) 式は V_i に関して non-linear であり、potential に関して linear な方程式である非相対論における N 体の Schrödinger 方程式との対応が気になる。しかし、非相対論の極限を取り、probe の N 個の座標についている N 個の時間座標を全て一致させる同時刻 projection という操作をおこなってやると、potential に関して non-linear と見えた (30) 式が、potential について linear な形になることが示せ、Schrödinger 方程式が与えられる。

3. 束縛状態間の散乱

今度は、(1) 式を解いてその解が与えられたとして、その束縛状態間の散乱はどのように与えられるかを見ていく。そのために、(1) 式のように channel が分離された方程式が出てきたのは、(19) 式のように行列 B を用い ϕ を ϕ' に変数変換したからだということに注目する。この変換は元の probe にまで立ち戻ると、 J_j について $J_j = \sum_{k=1}^N J'_k (B)_{kj}$ のように B で変換したと考えることが出来る。最初にこの probe を入れてやれば、 Γ の ϕ の 2 次は初めから対角化された形で与えられる。このとき散乱は on-shell 展開の高次として

次のように与えられる。

$$\Delta\phi_{i_i}^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{i_k, i'_k=1(k=1, \dots, n)}^N [W_{i, i_1, \dots, i_n}^{(n+1)} (B)_{i, i_1} (B)_{i_1, i_1} (c_{i_1, i_1}^{i_1-1})^{-1} \dots (B)_{i_n, i_n} (c_{i_n, i_n}^{i_n-1})^{-1}] \times \Delta\phi_{i_1}^{(1)} \dots \Delta\phi_{i_n}^{(1)} \quad (31)$$

ここに出てくる $W^{(n+1)}$ は W を $J_i, J_{i_1}, \dots, J_{i_n}$ で汎関数微分したものを表しそこに B が $(n+1)$ 個ついたものは、次のように変形できる。

$$\sum_{i_j(j=1, \dots, k)}^N W_{i_1, \dots, i_k}^{(k)} (B)_{i_1, i_1} \dots (B)_{i_k, i_k} = \begin{cases} c_{i_1, \dots, i_k}^{i_1-1, \dots, i_k-1} & (i_l \leq \sum_{m \neq l}^k i_m \quad l=1, \dots, k) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (32)$$

つまり、 c の下付きの index について三角不等式とでも呼ぶべきものが出て、それを満たさないものは 0 となり、残ったものを $c_{i_1, \dots, i_k}^{i_1-1, \dots, i_k-1}$ と書くことにした。この証明は、(6) 式および B 行列の逆行列の表式 (漸化式によって求められる) 等を使うことにより求めることが出来る。さて、 $c_{i_1, \dots, i_k}^{i_1-1, \dots, i_k-1}$ はあるグラフルールを満たすのだが、それを一般の場合について書いても分かりにくいので、例として decay の場合を見てみよう。

$c_{i_1, \dots, i_k}^{i_1-1, \dots, i_k-1}$ は図 4 のように i_1 本の propagator の足が出ている側から見ると i_1 本以上の propagator が走っており、同様のことが i_2, i_3 本の propagator の足が出ている側から見た時にも言える。そのような 3 つの条件を満たすグラフ全ての和で与えられる。

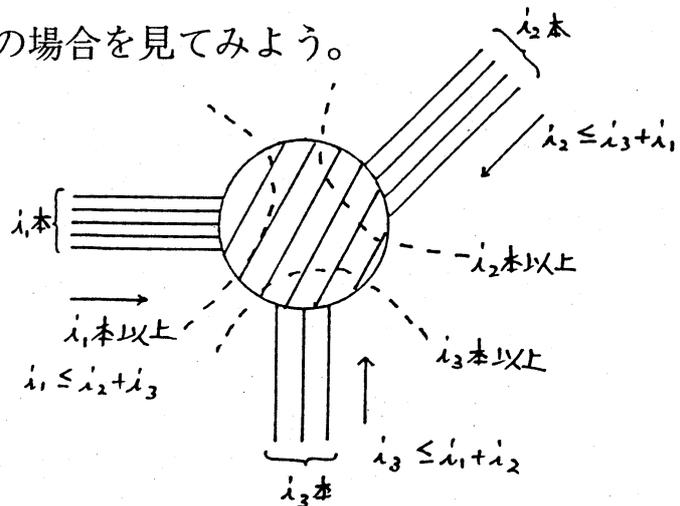


図 5. $c_{i_1, i_2, i_3}^{i_1-1, i_2-1, i_3-1}$ のグラフルール

このようなルールが出てくるのは、グラフのうちで波動関数に取り込まれるものは、Legendre 変換で取り入れてしまったからだと考えられる。実際

の decay あるいは散乱現象で、このことがどう効いてくるかは面白い問題で、研究中である。

ここまでグラフで考えてということをやってきたわけだが、それは取りも直さず真空期待値 $\phi^{(0)}$ として摂動を入れたものを考えることになり、対称性の破れのない場合にのみ適用可能であった。しかしながら、original な Lagrangian に vertex として $-\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x_1, \dots, x_i)}\Big|_{\phi=\phi^{(0)}} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_i)$ を加えておくと、対称性の破れた場合にも、今までの議論をそのまま使うことが出来る。

4. まとめ

- N 体の束縛状態方程式は (1) 式のように書ける。ここに出てくる $c_{N,N}^{N-1}$ は図 1 のようなグラフの和で与えられる。
- $c_{N,N}^{N-1}$ の inverse は (30) 式のように i 粒子既約なグラフの non-linear な形で与えられる。
- こうして求められた束縛状態同士の散乱には、三角不等式とでも呼ぶべきルールがある。これは波動関数の中に入れるべきグラフを入れてしまったあとでは、不等式を満たさないようなものは残らないことからきている。

Reference

- [1] S. Yokojima, M. Komachiya and R. Fukuda, "Derivation of a Bethe-Salpeter type N -body bound state equation", to appear in Nucl. Phys. B