

# ネットワーク構造を持つシステムの安定性に対する情報論的解析

— ある種の種間競争システムに対する一考察 —

中村 秀貴      平田 廣則  
Hideki Nakamura    Hironori Hirata

千葉大学  
Chiba University

## 1 はじめに

ネットワークシステムの情報論的解析とは、ネットワークの構造を持つ特徴を情報量で表し、これを用いてネットワークシステムの諸特性を解析しようというものである。生態フローシステムにおける組織化 [1] や補食関係モデルにおける、安定性 [2] などの評価に情報論的指標が有効であることが明かとなっている。本稿では、その一考察として、Lotka-Volterra 方程式に従うある種の種間競争システムを対象とし、情報論的指標を用い、その安定性について考察する。

## 2 ネットワークにおける情報量

ネットワークが持つ情報量として、ノードが持つ情報量  $D_1$  とパスの構造が持つ情報量  $D_2$  を定義する。

ある確率事象系  $S_1 = \{s_i\}$  と、その 2 連鎖対の確率事象系  $S_2 = \{s_i s_j\}$  が与えられ、但し  $(i, j = 1, \dots, n)$ 、それぞれの出現を規定する確率  $p_i$ 、条件付き確率  $p_{ij}$  が与えられている。

確率事象系  $S_1$  のエントロピー  $H_1$  は、

$$H_1 = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (1)$$

$$H_1^{max} = \log n \quad (2)$$

で表される。ここで対数の底は 2 とし、以下同様とする。確率事象系  $S_1$  の各事象が全く無秩序に出現するとき、つまりすべての事象の出現が等確率である場合に、エントロピー  $H_1$  は最大値をとる。

この 2 つのエントロピー  $H_1, H_1^{max}$  を用いることにより、確率事象系  $S_1$  の等確率性からのズ

レを表す情報量  $D_1$  が定義される。

確率事象系  $S_2$  について 2 つの事象間の独立性からのズレを表す情報量  $D_2$  を定義する。2 つの事象が独立 ( $p_{ij} = p_j$ ) であるとしたときのエントロピー  $H^{ind}$  と実際の 2 連鎖対の結合確率のエントロピー  $H^{dep}$  の差で定義される。

$$D_1 = H_1^{max} - H_1 \quad (3)$$

$$D_2 = H^{ind} - H^{dep} \\ = H_1 - H_M \quad (4)$$

ここで、

$$H^{ind} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \log p_i p_j \quad (5)$$

$$H^{dep} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_{ij} \log p_i p_{ij} \quad (6)$$

$$H_M = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_{ij} \log p_{ij} \quad (7)$$

確率事象系  $S_1, S_2$  をそれぞれネットワークのノードとパスの出現を表す確率事象系とすると次のようになる。

$D_1$ : ノードの分布の偏りを表す指標

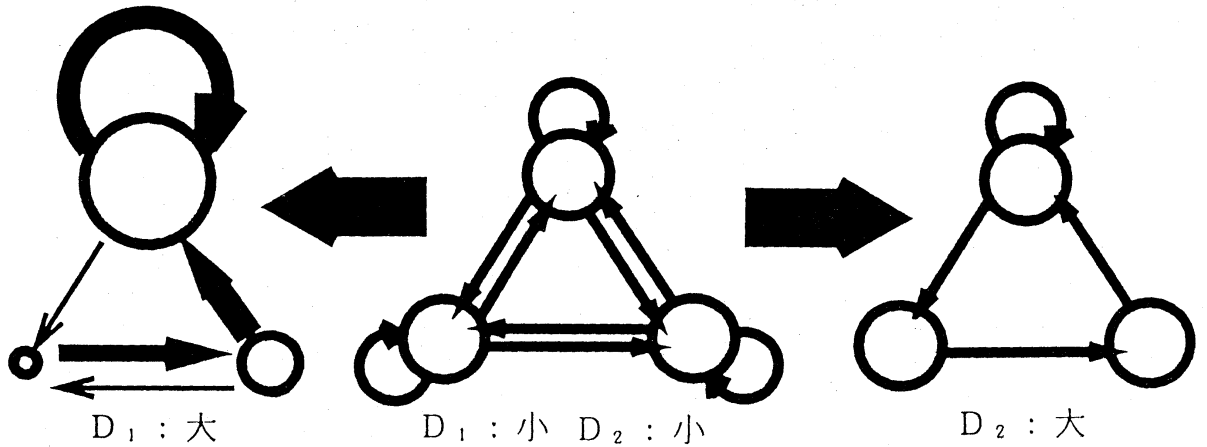
$D_2$ : ノードの分布により、一意に定まる全結合状態のパスの太さ (条件付き確率の大きさ  $p_{ij} = p_j$ ) からの、実際の結合状態の偏りを表す指標

また、ネットワークの全情報量  $TI$  は次式で定義される。

$$TI = D_1 + D_2 \quad (8)$$

$$= H_1^{max} - H_M \quad (9)$$

図 1 に情報量  $D_1, D_2$  の図形的意味を示す。

図 1:  $D_1, D_2$  の概念図

### 3 競争システムへの情報量の適用

#### 3.1 競争システムと影響確率モデル

Lotka-Volterra 方程式に従う、生産者階層における対称競争モデルを対象とし、平衡状態にあるものとする(参照、図 2)。

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \quad (10)$$

$$= 0$$

$a_{ij} = a_{ji} > 0$ : 相互競争係数

$b_i > 0$ : 自己増殖率

$i, j = 1, \dots, n$

相互競争係数  $a_{ij}$  の添え字は個体  $i$  が個体  $j$  から受ける影響を表している。

システムが平衡状態  $x_i^*$  ( $i = 1, \dots, n$ ) にあるとき、個体  $i$  が個体  $j$  から受ける影響の大きさ  $e_{ij} = a_{ij} x_i^* x_j^*$  とする。本稿では、この量に注目して競争システムを影響モデル変換し、競争の関係をネットワークで表す(参照、図 3)。 $e_i$  は個体  $i$  が受ける影響の和を表し、自己増殖量  $b_i x_i^*$  と等しくなる。 $E$  はシステム内に存在する全影響を表す。

$$\begin{aligned} e_{ij} &= a_{ij} x_i^* x_j^* \\ &= a_{ji} x_j^* x_i^* = e_{ji} \quad (11) \\ e_i &= \sum_{j=1}^n e_{ij} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* x_j^* = b_i x_i^* \quad (12)$$

$$E = \sum_{i=1}^n e_i \quad (13)$$

#### 3.2 情報量の適用

前節で定義した影響モデルに対して確率を定義し、情報量を適用する(参照、図 3)。個体  $i$  が個体  $j$  より受ける影響の確率  $p_{ij}$  と個体  $i$  が受ける影響の全システムの影響に対する確率  $p_i$  を

$$p_{ij} = e_{ij}/e_i \quad (14)$$

$$p_i = e_i/E \quad (15)$$

とする。これらの確率を用い情報量  $D_1, D_2$  を計算する。競争モデルにおいて情報量  $D_1, D_2$  は

$D_1$ : 影響を受ける割合の各個体での偏りを表す。  
または、競争力 ( $b_i x_i^*$ ) の偏りを表す。

$D_2$ : 競争関係の簡単さを表す。

という意味を持つ。

## 4 計算機実験

### 4.1 システムの安定性

モデルの安定性は Lotka-Volterra 方程式の平衡点近傍における Jacobian 行列の固有値で判定する。

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (16)$$

$$\text{但し, } A = [-a_{ij}x_i^*], X = (X_1, \dots, X_n)$$

$$X_i = x_i - x_i^*$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

本稿では以下のような2つの意味の安定性について考察する。

(a). あるシステムが実現されたとき、それが安定なシステムに成り易いかどうかを示す指標で、安定度:  $SR[\%]$  とする。ある基本となる競争関係の構造に対しシステムの各係数を乱数で定めることにより十分な数生成する。その中の実現可能なシステムの中で安定であるシステム割合として、安定度:  $SR[\%]$  を定義する。

$$SR = \frac{\text{安定なシステムの数}}{\text{実現可能なシステムの数}} \times 100[\%] \quad (17)$$

ここで、実現可能なシステムとは平衡点の値  $x_i^*$  が全て正であるシステムを指す。

(b). システムが平衡状態からずれたとき、どのくらい速く元の平衡状態に戻るか(収束の速さ)を表す指標で、復帰時間:  $T_R$  とする。復帰時間:  $T_R$  は安定なシステムの Jacobian 行列の実数部最大固有値(安定なシステムの固有値の実数部は全て負)の逆数、つまり収束に最も影響を与えると考えられる時定数とする。

$$T_R = \frac{1}{|(Re\lambda)_{max}|} \quad (18)$$

但し、 $\lambda$  は行列  $A$  の固有値である。

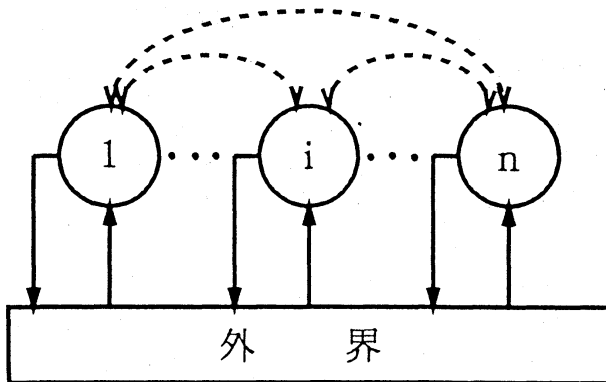


図 2: 種間競争システム

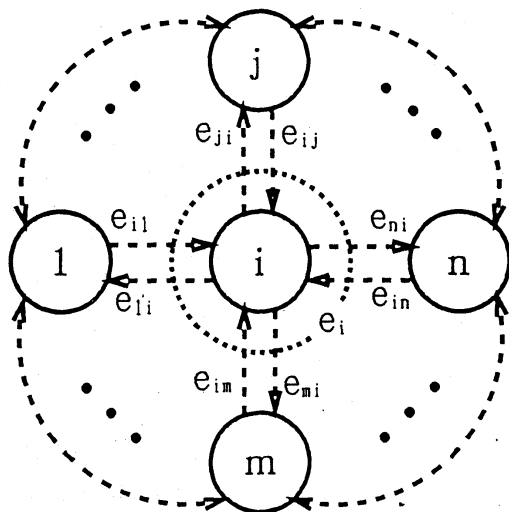


図 3: 影響確率モデル

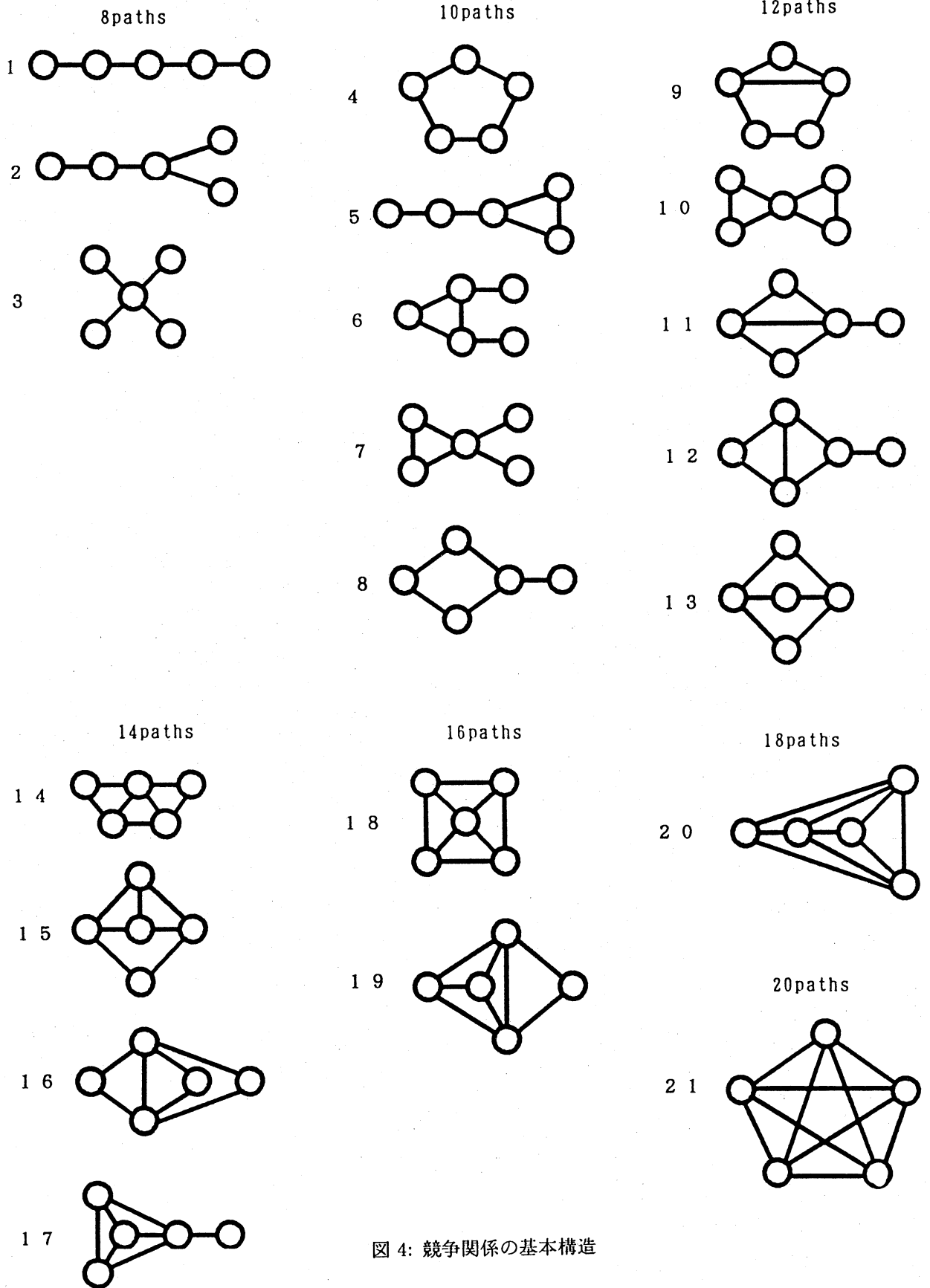


図 4: 競争関係の基本構造

## 4.2 計算機実験

ノード数は5で図4で示した各パターンについて実験を行う。各パターンは相互結合しており、全ノードには自己ループ( $a_{ii}$ )が存在するが、図4では省略する。Lotka-Volterra 方程式の各係数はある範囲の乱数により決める。相互競争係数 $a_{ij}$ は $0 < a_{ij} < 1$ の範囲の乱数である。自己増殖率 $b_i$ は $b_i > 0$ で実験によってその乱数の範囲は異なる。実験のデータは図4のパターンのパスの数(コネクタンス)でグループ分けしたものである。

この計算機実験を行った結果、競争だけのシステムでは安定となる頻度が非常に小さい( $SR < 0.2\%$ )ことを初めに述べておく。

まず、安定度 $SR$ に関する実験の結果及び考察を行う。実現可能なシステムの数 $100,000$ 個になるまで実験を行った。その結果を図5、6に示す。

図5は自己増殖率 $b_i$ が異なる範囲の乱数による結果を重ねて表示したものであり、どの $b_i$ の範囲でもほぼ同じ位置に点が打たれていることが分かる。つまり、安定度 $SR$ は自己増殖率 $b_i$ によらず競争の構造( $TI$ )によることが分かる。

図6は図5の全情報量 $TI$ の内訳( $D_1, D_2$ )を示したもので、 $9 < b_i < 11$ の範囲の乱数の場合の結果である。 $D_1$ :競争力の偏りは $SR$ によらずほぼ一定である。 $D_2$ :競争関係の簡単さは $SR$ と正の相関を持っている。

図5、6から、安定度 $SR$ (安定に成り易さ)は $D_2$ が大きい(競争関係が簡略である)システムほど大きいことが分かり、競争関係の構造が簡単な程安定に成り易い構造であることがいえる。また、安定度 $SR$ に関する指標として $D_2$ (パスの情報量)が質の高い情報を提供すること分かる。

次に、復帰時間 $T_R$ に関する実験の結果及び考察を行う。安定なシステムの数 $200$ 個になるまで実験を行った。その結果を図7、8に示す。

図7は自己増殖率 $b_i$ を $1 < b_i < 2$ と $9 < b_i < 11$ の範囲の乱数にしたときの結果を示したものである。復帰時間 $T_R$ は自己増殖率 $b_i$ に深く影響され、 $b_i$ の大きい方が復帰時間は短くなることが分かる。 $b_i$ が大きいということは自己増殖能力が高いことを示し、そのため元の平衡状態に戻る時間が短くなるものと考えられる。また、この図か

ら競争関係の構造にも復帰時間が影響を受けていることが分かり、負の相関を持つ。

図8は図7の全情報量 $TI$ の内訳( $D_1, D_2$ )を示したもので、 $9 < b_i < 11$ の範囲の乱数のときの結果である。安定度 $SR$ のときと同様で、 $D_1$ :競争力の偏りは $T_R$ によらずほぼ一定である。 $D_2$ :競争関係の簡単さは $T_R$ と負の相関を持っており、 $D_2$ が大きい(競争関係が簡単な)方が復帰時間は短い。この結果は次のように説明できる。悪影響を与え合う関係にある組み合わせが少ない( $D_2$ が小さい)方が、その影響を自己増殖項 $b_i x_i$ で速く減少させると考えられるためである。

図7、8から、安定度 $SR$ のときと同様のことがいえ、復帰時間は $D_2$ が大きい(競争関係が簡略である)システムほど短いことが分かる。また、復帰時間 $T_R$ に関する指標としても $D_2$ (パスの情報量)が質の高い情報を与えてくれることが分かる。

図9は安定なシステムの情報量と不安定なシステムの情報量を比較したものである。この図から、 $D_2$ に関しては、安定、不安定なシステムともほぼ同様な値を持ち、単調に減少している。一方 $D_1$ :競争力の偏りは安定なシステムの方が常に不安定なものを上回っており、競争力に偏りがある方が安定と成り易いことがいえる。

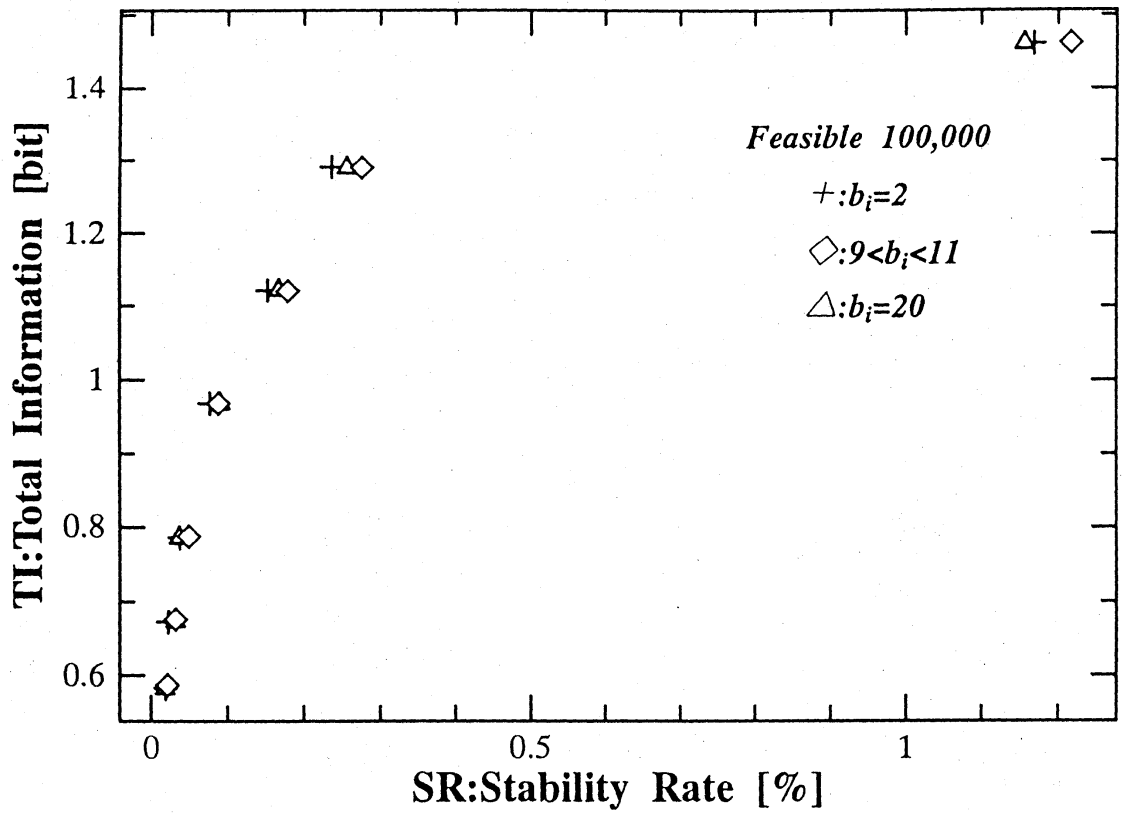


図 5: 様々な  $b_i$  の  $TI - SR$  の関係図

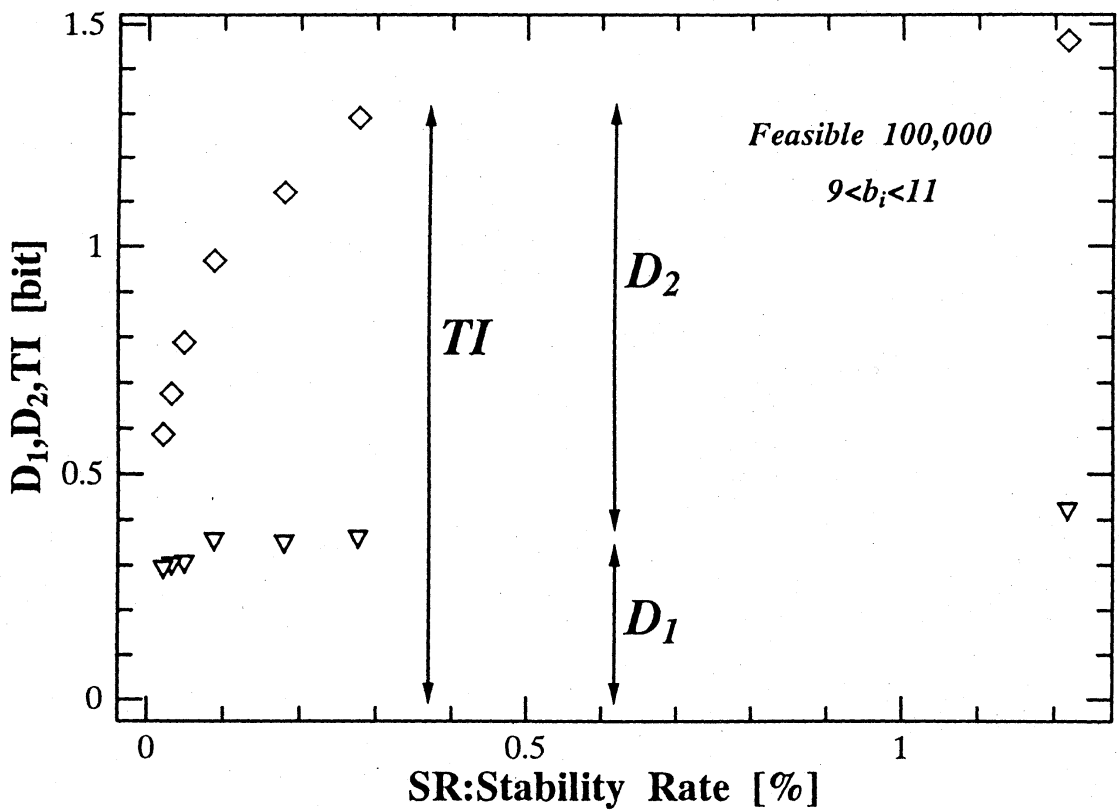


図 6:  $9 < b_i < 11$  のときの  $D_1, D_2, TI - SR$  の関係図

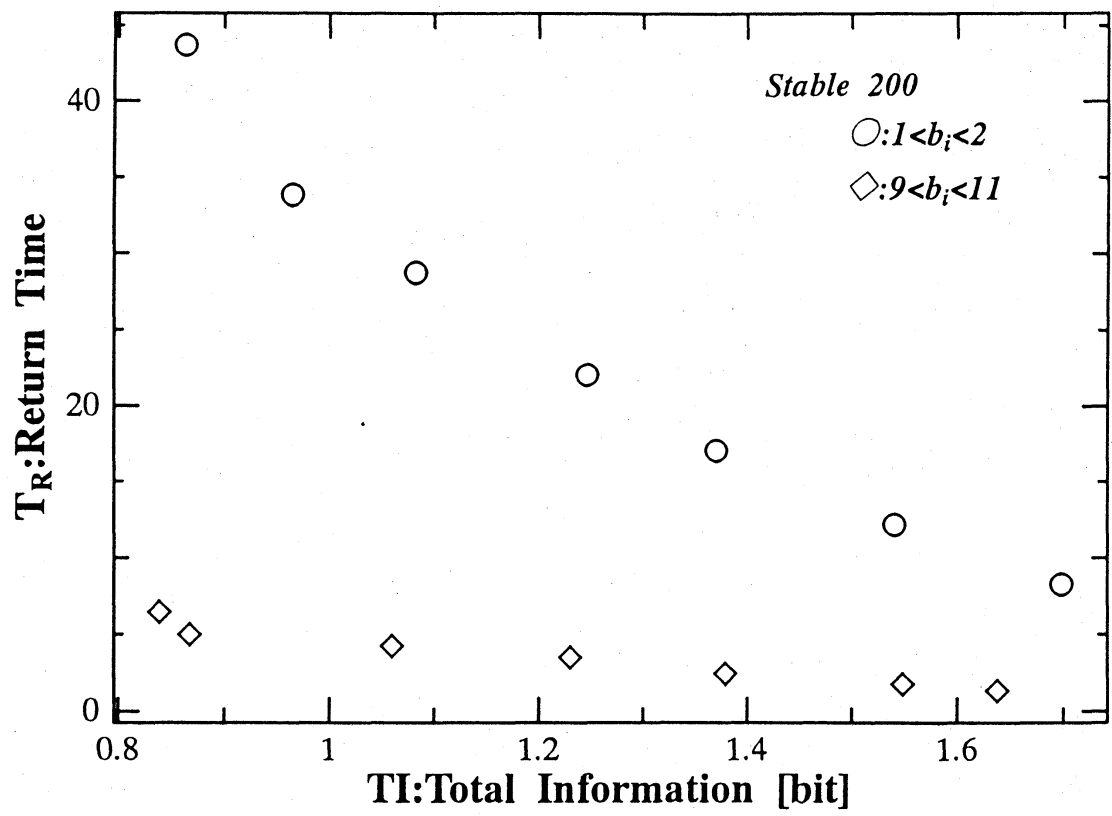


図 7: 異なる  $b_i$  の  $T_R - TI$  の関係図

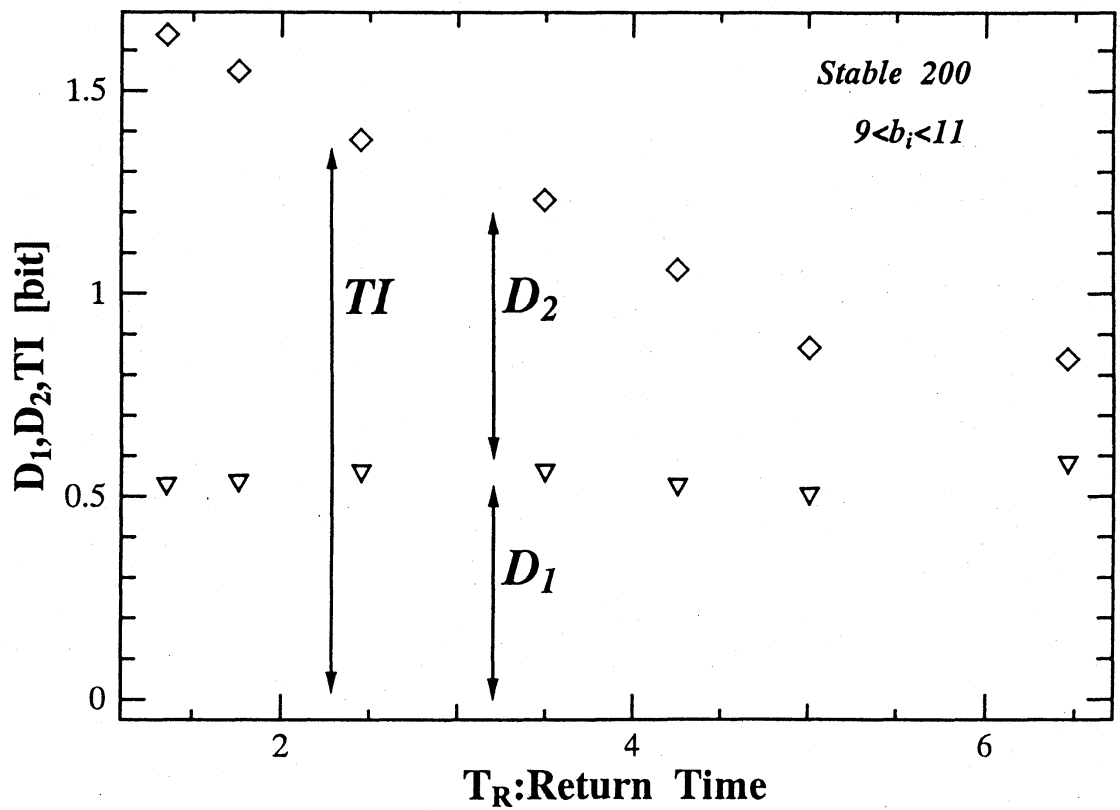


図 8:  $9 < b_i < 11$  のときの  $D_1, D_2, TI - T_R$  の関係図

## 5 おわりに

本稿では情報量を競争関係の構造を表す指標として定義し、対称競争システムの2つの安定性との関係を調べた。その結果、安定に成り易く収束が速いシステムはある程度種間の競争力に偏りがあり ( $D_1$ が不安定なシステムに比べ大きい)、競争関係が簡単である ( $D_2$ が大きい) システムであることが示された。そして、本稿で評価した2つの安定性について情報量を指標として用いることが有用であると思われる。

## 参考文献

- [1] HIRATA H. (1993). Information of Organization in Ecological Systems :Nutrient > Energy > Carbon. *J. theor. Biol.* 162,187-194.
- [2] 平田 廣則:生態フローネットワークの構造評価:安定性の指標, 電気学会論文誌C分冊 vol.112-C, No.10, pp631-636

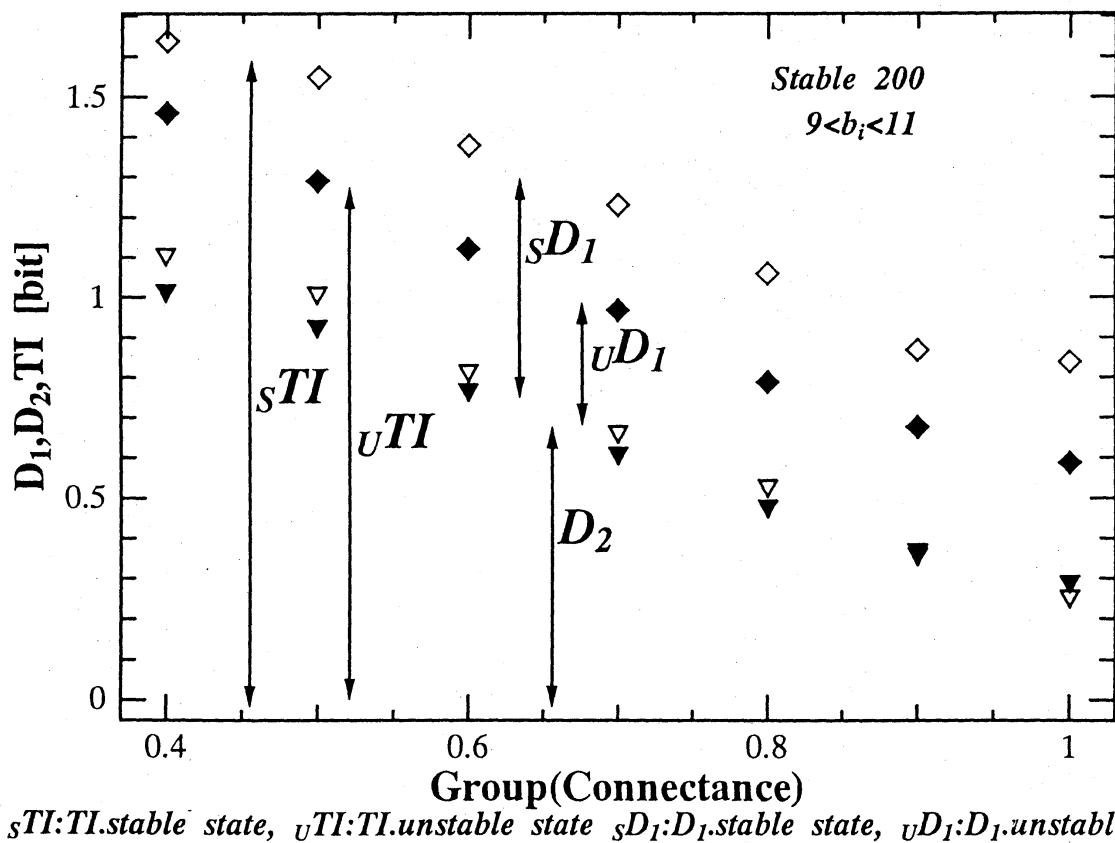


図 9:  $D_1, D_2, TI$ における安定・不安定システムの比較