

非線形ダイナミクスとしての生物リズムの数理  
— 結合振動子の周辺 —

龍谷大学理工学部 森田善久

## 1 序

自然界の様々な分野で振動現象が観測される。生物の世界でも個体数の周期的な増減や、光合成のリズム、睡眠覚醒や体温変化で代表されるサーカディアンリズム（概日リズム）などが知られている。このような現象の数理的なメカニズムを理解するため非線形振動子を用いたモデルによる研究が古くからなされており、多くの重要な成果をあげている ([5], [18])。ここでいう非線形振動子とは、数学的な言葉を用いると安定なリミットサイクルをもつ微分方程式のことを意味する。特に現象として興味あるのは、複数個の振動子が相互作用するような系である。このような系では振動の同期、位相の引き込み、非同期な振動、カオティックな振動、また結合によって振動が止まってしまう現象 (oscillation deth) などの重要な現象が観察される。ここでは複数個の振動子が弱い相互作用をしている結合振動子モデルをとりあげ、同期現象、引き込み現象、oscillation deth および同期が壊れる構造を数学的に考察してみよう。

§2 でよく現れる非線形振動子の例をとりあげる。§3 では結合が弱い場合に、漸近的には振動子の運動が位相のダイナミクスによって記述されることを示しそのダイナミクスを記述する方程式を導く。また振動の同期、位相の引き込み現象をその方程式の解の構造から説明する (参考文献 [4], [6], [18], [9])。§4 では 2 振動子の分岐問題を標準系を用いて議論する (参考文献 [8])。§5 では “oscillation deth” の現象を取り上げ解説する (参考文献 [2])。

## 2 非線形振動子 - 例 -

この節では色々な分野に現れる代表的な非線形振動子の例を示そう。現象を定性的に理解するためには、現象を忠実にモデル化したものより数学的に扱い易い方が好まれる。ここでは単純なモデルに絞って紹介する。

i) Van-der-Pol 振動子：

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (\dot{\phantom{x}} = d/dt, \ddot{\phantom{x}} = d^2/dt^2) \quad (1)$$

有名な方程式である。 $\mu > 0$  のとき安定なリミットサイクルをもち  $\mu \rightarrow 0$  のとき  $x^2 + \dot{x}^2 \rightarrow 2$ 。また  $\mu \gg 1$  のとき弛緩振動 (relaxation oscillation) が生じる。 $y = \dot{x} - \mu(x - x^3/3)$  とおくと

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(x - \frac{1}{3}x^3) + y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (2)$$

と書き直される。また

$$x = X/\sqrt{\mu}, \quad y = Y/\sqrt{\mu}$$

とスケーリングすると

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu X + Y - \frac{1}{3}X^3 \\ \dot{Y} = -X \end{cases} \quad (3)$$

となり、この系 (3) は  $\mu = 0$  で Hopf 分岐する。すなわち  $\mu = 0$  で  $(X, Y) = (0, 0)$  から周期解が分岐する。

ii) Prey-Predator 系：

つぎの餌生物 (prey) と捕食者 (predator) の間の個体数の増減を表す系を考えよう。

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{m_1 xy}{\alpha + x} \\ \dot{y} = \frac{m_2 xy}{\alpha + x} - \gamma y \end{cases} \quad (4)$$

ここで  $x, y$  はそれぞれ餌生物と捕食者の個体数をあらわし、 $r, K, m_1, m_2, \alpha, \gamma$  は正のパラメータである。(モデルの意味から  $m_1 > m_2$  である。)

$$u = x/\alpha, \quad v = m_1 y/\alpha m_2, \quad s = m_2 t, \quad b = \gamma/m_2, \quad a = r/m_2$$

とおくと方程式 (4) は

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = a \left(1 - \frac{u}{K}\right) u - \frac{uv}{1+u} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{uv}{1+u} - bv \end{cases} \quad (5)$$

と書き直せる。この方程式は平衡解  $(u, v) = (0, 0), (K, 0)$  を常にもつ。さらに  $0 < b < 1, K > b/(1-b)$  のとき正の平衡解として

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{1-b} \left( b, a - \frac{ab}{K(1-b)} \right)$$

が存在する。この  $(\bar{u}, \bar{v})$  で方程式 (5) を線形化した時のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} ab\left(1 - \frac{1+b}{K(1-b)}\right) & -b \\ a\left(1 - b - \frac{b}{K}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

となる。簡単な計算により  $K < (1+b)/(1-b)$  でこの平衡解は安定で、 $K > (1+b)/(1-b)$  では不安定である。 $K = (1+b)/(1-b)$  で Hopf 分岐が起こっており、 $K > (1+b)/(1-b)$  で安定なリミットサイクルが存在する。

### iii) Brusselator :

有名な B-Z 反応を始めとして、化学反応に振動現象があることがよく知られている。一般には反応は色々な過程を含んでいるので、数学的にモデル化すると複雑な方程式になる。Prigogine らは自己触媒的な反応過程を表現する単純化した 2 変数のモデル方程式を提出した。このモデルは Brusselator とよばれ次のように書かれる。

$$\begin{cases} \dot{X} = A - (B+1)X + X^2Y \\ \dot{Y} = BX - X^2Y \end{cases} \quad (6)$$

ここで  $A, B$  は正のパラメータで、 $X, Y$  は反応の途中で生じる自己触媒的な働きをする化学物質の濃度を表す。この方程式は平衡点  $(X, Y) = (A, B/A)$  をもち  $B$  を増加させたとき、 $B = 1 + A^2$  で不安定化する。このとき Hopf 分岐が起こり  $B > 1 + A^2$  で安定な周期解が存在する。

### iv) 時間遅れのある振動子モデル :

Hutchinson は個体数の振動を記述するモデルとして、ロジスティック方程式の密度効果を表す項に時間遅れをいれた次の方程式を考えた。

$$\dot{x} = \alpha \left(1 - \frac{x(t-r)}{K}\right) x(t) \quad (7)$$

$y(t) = x(rt)/K, a = \alpha r$  と置き換えると

$$\dot{y} = a(1 - y(t-1))y(t) \quad (8)$$

外見は単純な方程式であるが、この方程式の解の成す力学系は無限次元の相空間で意味をもち、数学的な扱いは厄介である。平衡解  $y = 1$  は  $a = \pi/2$  で不安定化し  $a > \pi/2$  で安定な周期解が存在する。

### 3 結合振動子の位相ダイナミクス

結合振動子は電気回路モデル、数理生態学や(生)化学反応におけるコンパートメントモデル、ニューロのネットワークモデルなど幅広い分野に現れ研究されている。ここでは次のように書き表せる場合を扱う。

$$\dot{\mathbf{u}}_k = F(\mathbf{u}_k) + G_k(\nu, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) \quad (k = 1, \dots, N) \quad (9)$$

ここで方程式

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^m \quad (m \geq 2) \quad (10)$$

は周期  $T$  の漸近安定な周期解  $\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$  (相空間ではリミットサイクル) をもち結合を与える項  $G_k$  は

$$G_k(\nu, \cdot) \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow 0)$$

を満たしているとする。すなわち  $\nu = 0$  の極限では相互作用がないので  $N$  個の振動子が独立に運動している。以下では  $\nu \geq 0$  としよう。方程式(10)の相空間のリミットサイクル上における位置は  $\theta$  を一つのパラメータにして  $\mathbf{u} = \mathbf{p}(\theta)$  と表せるから、リミットサイクル上の運動は位相 (phase) の運動方程式

$$\dot{\theta} = 1$$

でもって記述される。ただし  $\theta$  と  $\theta + 2mT$  ( $T$ : 整数) は同一視されている。方程式(9)で  $\nu = 0$  の場合には、振動子間の相互作用がないので、それぞれの位相を  $\theta_k$  とするとその運動は  $n$  次元トーラス

$$T^N := \{(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) = (\mathbf{p}(\theta_1), \dots, \mathbf{p}(\theta_N)) \mid 0 \leq \theta_j < T \quad (j = 1, \dots, N)\}$$

における運動として

$$\dot{\theta}_k = 1 \quad (k = 1, \dots, N)$$

と表せる。十分小さな  $\nu$  に対しては、結合による効果は摂動とみなせるので漸近安定な  $N$  次元トーラス  $T^N(\nu)$  で

$$T^N(\nu) \rightarrow T^N \quad (\nu \rightarrow 0)$$

を満たすものが存在し、その上のダイナミクス (phase dynamics) は

$$\dot{\theta}_k = 1 + g_k(\nu, \theta_1, \dots, \theta_N) \quad (k = 1, \dots, N)$$

でもって記述される。ここで  $g_k(\nu, \dots)$  は各  $\theta_j$  について  $T$  周期をもち  $g_k(0, \dots) = 0$  である。

拡散的な結合の振動子系について具体的に上述の位相のダイナミクスを表す方程式を書き表してみよう。次の方程式系を考える。

$$\dot{\mathbf{u}}_k = F(\mathbf{u}_k) + \nu B_k \mathbf{u}_k + \nu D(\mathbf{u}_{k-1} - 2\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k+1}) \quad (k = 1, \dots, N) \quad (11)$$

ただし  $B_k, D$  は  $n \times n$  の行列で、

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_N, \quad \mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u}_1 \quad (12)$$

を仮定しておく。力学系の不変多様体の理論を用いてトーラス上の方程式を導くと

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_k = & 1 + \nu \{ \langle B_k \mathbf{p}(\theta_k), \mathbf{q}(\theta_k) \rangle \\ & + \langle D \mathbf{p}(\theta_{k-1}), \mathbf{q}(\theta_k) \rangle - 2 \langle D \mathbf{p}(\theta_k), \mathbf{q}(\theta_k) \rangle + \langle D \mathbf{p}(\theta_{k+1}), \mathbf{q}(\theta_k) \rangle \} + O(\nu^2) \end{aligned}$$

が得られる。ここで  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbf{R}^m$  の内積を表し、 $\theta_0 = \theta_N, \theta_{N+1} = \theta_1 \pmod{T}$ 。また  $\mathbf{q}(t)$  は次の線形系の周期解で  $\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t) \rangle \equiv 1$  と正規化されている：

$$\dot{\mathbf{q}} = - \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p}(t)) \right)^T \mathbf{q}$$

さらに平均化法により上の方程式を変換すると

$$\dot{\theta}_k = 1 + \nu \{ \gamma_k + h(-\theta_k + \theta_{k-1}) - 2h(0) + h(\theta_{k+1} - \theta_k) \} + O(\nu^2)$$

ただし

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T \langle B_k \mathbf{p}(\theta), \mathbf{q}(\theta) \rangle d\theta$$

関数  $h(\cdot)$  は

$$h(\phi) := \frac{1}{T} \int_0^T \langle D\mathbf{p}(\theta + \phi), \mathbf{q}(\theta) \rangle d\theta$$

で与えられる。こうして

$$\phi_k := \theta_{k+1} - \theta_k, \quad \omega_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k, \quad H_e(\phi) := \frac{h(\phi) + h(-\phi)}{2}, \quad H_o(\phi) := \frac{h(\phi) - h(-\phi)}{2}$$

とおき  $O(\nu^2)$  の項を無視すれば

$$\begin{cases} \dot{\phi}_k = \nu \{ \omega_k + H_e(\phi_{k+1}) - H_e(\phi_{k-1}) + H_o(\phi_{k+1}) - 2H_o(\phi_k) + H_o(\phi_{k-1}) \} & (k = 1, \dots, N-1) \\ \phi_N = \phi_0 = -\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \pmod{T} \end{cases} \quad (13)$$

という  $\phi_k$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) について閉じた方程式系を得る。

さて以下では

$$H_e(\phi) = \alpha \cos \phi, \quad H_o(\phi) = \beta \sin \phi$$

とにおいて、ダイナミックスの構造を調べてみよう。まず  $N = 2$  すなわち (11) が

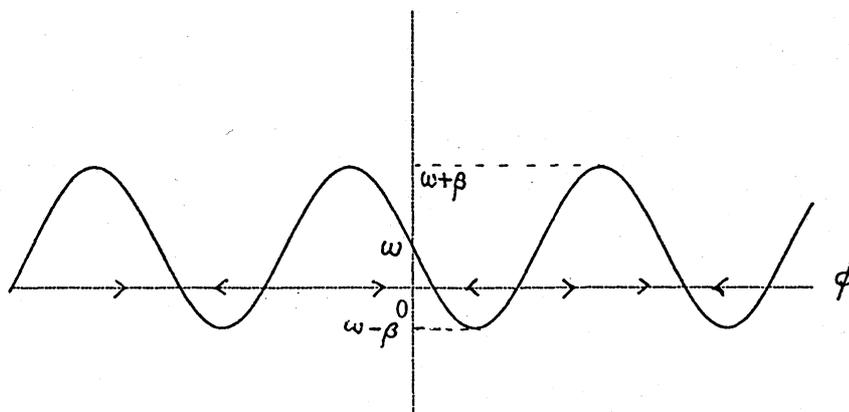
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_1 = F(\mathbf{u}_1) + \nu B_1 \mathbf{u}_1 + \nu D(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \\ \dot{\mathbf{u}}_2 = F(\mathbf{u}_2) + \nu B_2 \mathbf{u}_2 + \nu D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \end{cases}$$

という形の 2 振動子の結合系に相当する場合を考えよう。  $\phi = \theta_2 - \theta_1$  に関する方程式は

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \omega - \beta \sin \phi, \quad \tau = \nu t \quad (14)$$

となる。この方程式の安定 (不安定) な平衡点は元の方程式の安定 (不安定) な周期解に対応する。簡単のため  $\beta > 0$  とする。以下のことがすぐわかる。

- i)  $\omega < \beta$  : 安定な平衡点と不安定な平衡点を一つずつもつ
- ii)  $\omega > \beta$  : 平衡点は存在せず周期的な運動をする

Figure 1:  $\omega < \beta$  の場合のダイナミクス

i) のケースは引き込みが起こっている状態を表し、位相がロックされながら2つの振動子が同じ周期で運動している。また ii) のケースは振動数の差が大きくなりすぎて引き込みが壊れ位相がドリフト (phase drift) している状態を表している。 $\omega = \beta$  はそれらの状態の分岐点 (接線分岐点) である。 $\omega < \beta$  の場合の (14) のダイナミクスの図をあげておく。次に  $N$  が3以上の場合を考える。 $\omega_k$  が全て小さい場合には2振動子の場合と同様に引き込みが起こり周期的な運動が観察されることが予想される。しかし個数が増えてくると安定な状態が複数個共存し、ダイナミクスの全体的な構造を明示するのは困難である。ここでは  $\omega_k = 0 (k = 1, \dots, N-1)$  の場合について、対称性を持った解の存在と安定性を例示しよう。方程式は

$$\begin{cases} \frac{d\phi_k}{dt} = \alpha(\cos \phi_{k+1} - \cos \phi_{k-1}) + \beta(\sin \phi_{k+1} - 2\sin \phi_k + \sin \phi_{k-1}) \\ \phi_N = \phi_0 = -\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j \pmod{T} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, N-1) \quad (15)$$

となるから各  $l = 0, 1, \dots, N-1$  に対して

$$\phi_k = \frac{2l\pi}{N} \quad (k = 1, \dots, N)$$

という一様な値をとる平衡点が存在することが容易にわかる。これはもとの方程式でみると

$$u_k \approx p(\theta_k) = p\left(\theta_1 + \frac{2(k-1)\ell\pi}{N}\right) \quad (k = 1, \dots, N-1)$$

という位相がロックした周期運動を表す解を表している。(  $l \neq 0$  のときこの解は周期進行波解になっており、サークル的に結合された振動子間を周期的な進行波が伝わる解を表現している。) さてこの解の安定性を調べよう。線形化安定性解析から次の結果が得られる。

$$\sigma := \beta \cos\left(\frac{2\ell\pi}{N}\right) \quad (16)$$

とおく。 $\sigma > 0$  なら安定で  $\sigma < 0$  なら不安定である。すなわち

- i)  $\beta > 0$  のとき  $l < N/4$  または  $l > 3N/4$  な  $l$  に対して安定で  $N/4 < l < 3N/4$  なる  $l$  に対しては不安定になる。
- ii)  $\beta < 0$  のとき  $N/4 < l < 3N/4$  なる  $l$  に対しては安定で  $l < N/4$  または  $l > 3N/4$  な  $l$  に対して不安定である。

( $l = N/4$  に対しては中立安定な状態になっており、無視した  $O(\nu^2)$  の項がその安定性を決定する。) このことから同位相解すなわち  $\theta_1 = \theta_2 \cdots = \theta_N$  ( $\phi_k = 0, k = 1, \dots, N-1$ ) は  $\beta > 0$  のとき安定で  $\beta < 0$  のとき不安定である。また  $N \geq 5$  なら、安定な同位相解 ( $\beta > 0$  の場合) と安定な位相のずれた解が共存している。

## 4 2 振動子の分岐構造

前節で結合が弱い場合には、位相のダイナミックスを記述する方程式を導き同期現象やそれが壊れる様子を調べた。この場合の「結合の弱さ」は各振動子もっている引き込み領域 (basin) に対する相対的なものである。結合の強さと振動子の引き込み領域、または振動子の振幅 (amplitude) の間のバランスによって生じるダイナミックスの性質を議論するためには、位相のダイナミックスだけでは不十分である。この節では Hopf 分岐する振動子を結合させて、分岐点の近くで与えられる標準系を通じてその構造をみてみよう。まずパラメータを含む振動子を表す方程式

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mu, \mathbf{u}) \quad (17)$$

を考えよう。ここで  $F(\mu, 0) = 0$  とし  $\partial F / \partial \mathbf{u}(0, 0)$  は共役な固有値  $\pm i\omega$  をもつとする。また他の固有値の実部は全て負としておく。このとき Hopf 分岐とその標準系の理論から、 $(\mu, \mathbf{u}) = (0, 0)$  の近傍でのダイナミックスを記述する方程式として

$$\dot{z} = i\omega z + \mu\alpha z - \beta|z|^2 z + (\text{高次の項}) \quad (18)$$

を得る。ここで  $z = x + iy$  と方程式は複素表現されているが、(18) は実 2 変数の常微分方程式系である。また、 $\alpha, \beta$  は  $F$  から決まる複素定数である。 $\mu$  を増加させたとき、固有値は虚軸を実部が負の領域から正の領域に正の速度で横切るとする。このとき  $\text{Re}\alpha > 0$  で、 $\text{Re}\beta > 0 (< 0)$  なら分岐は “super critical (sub critical)” に起こる。実際  $\text{Re}\alpha > 0$  かつ  $\text{Re}\beta > 0$  なら、 $(\text{Re}\alpha)\mu$  および  $\sqrt{\text{Re}\beta}z$  を改めて  $\mu, z$  とそれぞれおくとそれに対応して係数  $\alpha, \beta$  は

$$\alpha = 1 + ia, \quad \beta = 1 + ib \quad (19)$$

という形になる。簡単な計算から (18) は高次の項を無視すると周期解

$$z = \sqrt{\mu} \exp\{i(\omega + \mu(a - b))t\} \quad (20)$$

をもっていることがわかる。(高次の項がある場合にも  $\mu \ll 1$  なら (20) を第 1 次近似とする周期解が存在する。)

次に結合系を考えよう。結合は拡散的で対称な場合を考えると

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_1 = F(\mu, \mathbf{u}_1) + \nu D(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \\ \dot{\mathbf{u}}_2 = F(\mu, \mathbf{u}_2) + \nu D(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \end{cases} \quad (21)$$

$(\mu, \nu, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (0, 0, 0, 0)$  における標準系は

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega z_1 + \mu\alpha z_1 - \beta|z_1|^2 z_1 + \nu\gamma(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 = i\omega z_2 + \mu\alpha z_2 - \beta|z_2|^2 z_2 + \nu\gamma(z_1 - z_2) \end{cases} \quad (22)$$

となる。ただし  $\gamma$  は行列  $D$  と関数  $F$  から決まる複素係数で、 $z_1, z_2 = O(\epsilon)$ ,  $\mu, \nu = O(\epsilon^2)$  とし高次の項は無視した。以下では  $\alpha, \beta$  は (19) としておく。また

$$\nu\gamma = c_1 + ic_2 \quad (c_1 \geq 0) \quad (23)$$

とおくことにする。容易にわかることであるが、(22) は同位相解 (in-phase solution)

$$z_1 = z_2 = \sqrt{\mu} e^{i(\omega + \mu(a-b))t}$$

と反位相解 (anti-phase solution)

$$z_1 = -z_2 = \sqrt{\mu - 2c_1} e^{i(\omega - 2c_2 + \mu(a-b))t} \quad (\mu > 2c_1)$$

をもつ。線形化安定性解析からこれらの周期解の安定性を調べることができる。

i)  $\text{Re}\{\bar{\beta}\nu\gamma\} = c_1 + bc_2 > 0$ :

このとき同位相解は常に安定である。また反位相解の安定な領域は

$$3c_1^2 + c_2^2 + 2bc_1c_2 - \mu(c_1 + bc_2) > 0, \quad 4c_1 < \mu$$

が満たされるパラメータ領域である。

$$3c_1^2 + c_2^2 + 2bc_1c_2 - \mu(c_1 + bc_2) = 0$$

は pitchfork 型の分岐が起こる分岐集合を与える。実際反位相解から一組の周期解 (180 度ではないが位相のずれた周期解) が分岐する。また

$$4c_1 = \mu, \quad 3c_1^2 + c_2^2 + 2bc_1c_2 - \mu(c_1 + bc_2) > 0$$

は反位相解から Hopf 分岐が起こる分岐集合で、不変なトーラスが現れる。

ii)  $c_1 + bc_2 < 0$ :

同位相解は

$$c_1^2 + c_2^2 + \mu(c_1 + bc_2) < 0$$

で不安定になる。実際

$$c_1^2 + c_2^2 + \mu(c_1 + bc_2) = 0$$

は pitchfork 型の分岐集合になっており、位相のずれた一組の対称な周期解が出現する。反位相解は  $2c_1 < \mu < 4c_1$  で不安定で

$$4c_1 < \mu$$

の範囲で安定になる。 $4c_1 = \mu$  は反位相解から Hopf 分岐が起こる分岐点集合である。

方程式 (22) の 2 次分岐あるいは 3 次分岐解の構造を数学的に完全に明らかにするのは難しい。(2 次分岐する周期解に限ればその構造は明らかになっている (文献 [7]).) (22) で  $\mu$  を適当に固定し  $b = 2, c_2 = 1$  とおいた場合の Aronson et al. による分岐ダイアグラムの図を示す。横軸は  $c_2$  で縦軸は  $\max|z_1|$  である。図中の  $SI, UI$  はそれぞれ安定、不安定な同位相解、 $SA, UA$  は安定、不安定な asymmetric 周期解、 $ST, UT$  はトーラス上の安定、不安定な phase-trapping 解、 $SO, UO$  は安定、不安定な反位相解を表す。(計算は "AUTO" による。)

さて §2 であげた具体的な方程式を結合した系について、その標準系を決定してみよう。まず Van-der-Pol 振動子の結合系

$$\ddot{x}_j - \mu(1 - x_j^2)\dot{x}_j + x_j = \nu d_1(x_i - x_j) + \nu d_2(\dot{x}_i - \dot{x}_j) \quad (j = 1, 2, i \neq j)$$

を考える。 $u_j = \sqrt{\mu}x_j, v_j = \sqrt{\mu}\dot{x}_j$  とおいて  $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)$  の方程式に書き直し標準系を計算すると

$$\alpha = 1 \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{1}{2}(d_2 + id_1)$$

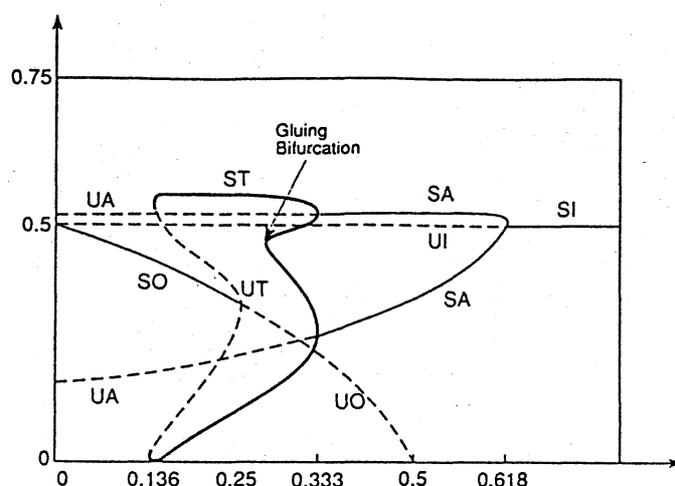


Figure 2: Aronson et al. による分岐ダイアグラム

となる。これは上の i) のケースに相当する。次に Prey-Predator 系の場合を考えよう。

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \left(1 - \frac{u_j}{K}\right) - \frac{u_j v_j}{1+u_j} \\ \frac{u_j v_j}{1+u_j} - b v_j \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i - u_j \\ v_i - v_j \end{pmatrix}$$

$K = (1+b)/(1-b) + \mu$  において標準系を計算すればいいが、 $\beta$  の係数を決めるのが大変である。しかし今の場合  $\gamma$  は実になることがすぐチェックできるので i) のケースになっていることが自動的にわかる。最後に Brusselator を、上の Prey-Predator 系のように結合を決める行列が対角行列で与えられるように結合する。Hopf 分岐点の近くで標準系をもとめるとその係数は

$$\beta = 1 + i \frac{4A^4 - 7A^2 + 4}{3A(A^2 + 2)}, \quad \gamma = \frac{d_1 + d_2}{2} - iA \frac{d_1 - d_2}{2}$$

となり、 $A$  と  $d_1, d_2$  のとりかたによって i) と ii) の場合を実現することができる。

## 5 Oscillation deth

§2 でみたように、振動数の違う2つの振動子を結合させると、その振動数の差が小さいときには振動数の同期（引き込み）が生じ、位相がロックされた状態 (phase locking) で2つの振動子は振動する。また振動数の差が大きくなると同期が壊れ、位相差が周期的に増加したり減少したりする (phase drift) 運動を観察した。この現象はもとの振動子の振幅に比べて振動数の差が小さい場合におこる。それでは振動数の差がもっと大きくなり、振幅に影響を与えるような場合にはどんな現象が生じるであろうか。Bar-Eli(1985) は次の形の結合振動子を考えた。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_1 = F_1(\mathbf{u}_1) + \nu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \\ \dot{\mathbf{u}}_2 = F_2(\mathbf{u}_2) + \nu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \end{cases} \quad (24)$$

具体的な  $F_j$  を色々与え、数値実験を試みた。その結果最初に述べた phase locking した解や phase drift 解以外に、適当なパラメータ値に対し振動が止まって安定な定数定常解に落ち着く現象を発見した。Aronson et. al [2] にならって §2 で扱った2振動子の標準系についてこの現象を観察してみよう。方程式

$$\dot{\mathbf{u}}_j = F_j(\mu, \mathbf{u}_j) \quad (j = 1, 2)$$

の標準系が（高次の項を無視したとき）

$$\dot{z}_j = i\omega z_j + \mu(1 + ia_j)z_j - (1 + b_j)|z_j|^2 z_j \quad (j = 1, 2)$$

と与えられるとする。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_1 = F_1(\mu, \mathbf{u}_1) + \nu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \\ \dot{\mathbf{u}}_2 = F_2(\mu, \mathbf{u}_2) + \nu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \end{cases}$$

を考えるとその標準系は

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega z_1 + \mu(1 + ia_1)z_1 - (1 + b_1)|z_1|^2 z_1 + \nu(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 = i\omega z_2 + \mu(1 + ia_2)z_2 - (1 + b_2)|z_2|^2 z_2 + \nu(z_1 - z_2) \end{cases} \quad (25)$$

簡単のため  $b_1 = b_2 = 0$  とする。

$$w_j = \epsilon z_j e^{i\omega t}, \quad \mu \rightarrow \epsilon^2 \mu, \quad \nu \rightarrow \epsilon^2 \nu, \quad \epsilon^2 t \rightarrow t$$

と変換すると

$$\dot{w}_j = \mu(1 + ia_j)w_j - |w_j|^2 w_j + \nu(w_k - w_j) \quad (j = 1, 2, k \neq j) \quad (26)$$

ここで  $\mu = 1$  とし、 $\Delta = a_2 - a_1$  とおく。 $(w_1, w_2) = (0, 0)$  におけるこの方程式の線形化安定性を調べると、

$$|\Delta| > 2, \quad 1 < \nu < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\Delta^2\right)$$

の範囲で安定なことがわかる。例えば  $\nu > 1$  を固定し  $|\Delta|$  を増加させると振動状態から静止状態  $((w_1, w_2) = (0, 0))$  に移行する。また  $\Delta$  を  $|\Delta| > 2$  の範囲で固定し  $\nu$  を増加させたときにもこのような静止状態への移行が観測される。 $\Delta > 2$  で固定し横軸に  $\nu$ 、縦軸に  $\max|w_1|$  をとった分岐図をあげておく。図中の  $R^+$  は安定な位相がロックされた解を表す。

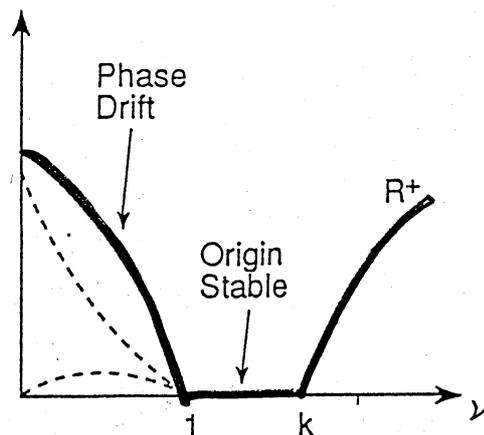


Figure 3: Oscillation death が出現する分岐ダイアグラム

## References

- [1] J. C. Alexander and G. Auchmuty, *Global bifurcations of phase-locked oscillators*, Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 93 (1986) 253-270.
- [2] D. G. Aronson, G. B. Ermentrout and N. Kopell, *Amplitude Response of Coupled Oscillators*, Physica D, vol. 41 (1990) 403-449.
- [3] P. Ashwin and J. W. Swift, *The dynamics of  $n$  weakly coupled identical oscillators*, J. Nonlinear Sci. vol. 2 (1992) 69-108.
- [4] G. B. Ermentrout and N. Koppel, *Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators*, SIAM J. Math. Anal. vol. 15 (1984) 215-237.
- [5] M. Kawato and R. Suzuki, *Two coupled neural oscillators as a model of the circadian pacemakers*, J. Theor. Biol., vol. 86 (1980) 547-575.
- [6] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer 1984.
- [7] Y. Morita, *A secondary bifurcation problem of weakly coupled oscillators with time delay*, Japan J. Appl. Math. vol. 3 (1985) 223-247.
- [8] Y. Morita, *A periodic wave and its stability to a circular chain of weakly coupled oscillators*, SIAM J. Math. Anal. vol. 18 (1987) 1681-1698.
- [9] Y. Morita, *Reaction-Diffusion Systems in Nonconvex Domains: Invariant Manifolds and Reduced Form*, J. Dyn. Diff. Eqs. vol. 2 (1990) 69-115.
- [10] J. C. Neu, *Coupled chemical oscillators*, SIAM J. Appl. Math. vol. 37 (1979) 307-315.
- [11] J. C. Neu, *Large populations of coupled chemical oscillators*, SIAM J. Appl. Math. vol. 38 (1980) 305-316.
- [12] R. H. Rand and P. J. Holmes, *Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled Van der Pol oscillators*, Int. J. Non-Linear Mechanics, vol. 15 (1980) 387-399.

- [13] O. E. Rössler, *Chemical turbulence: Chaos in a simple reaction-diffusion system*, Z. Naturforsch, vol. 31a (1976) 1168.
- [14] A. Sherman and J. Rinzel, *Model for synchronization of  $\beta$ -cells by gap junction coupling*, Biophysical Journal, vol 59 (1991) 547-559.
- [15] A. Sherman and J. Rinzel, *Novel Rythmogenic Effects of Weak Electrotonic Coupling in Neuronal Models*, preprint.
- [16] I. Schreiber, M. Holodniok, M. Kubíček and M. Marek, *Periodic and aperiodic regimes in coupled dissipative chemical oscillators*, J. Statistical Physics, vol. 43 (1986) 489-519.
- [17] K. Y. Tsang, R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, *Dynamics of a globally coupled oscillator array*, Physica D, vol. 48 (1991) 102-112.
- [18] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*, Springer-Verlag, Biomathematics Vol. 8 (1980).

## TITLE

### Biological Rhythm and Dynamics of Coupled Oscillators

Yoshihisa Morita

Department of Applied Mathematics and Informatics  
Faculty of Science and Technology  
Ryukoku University, Ohtsu 520-21, Japan

## Abstract

Nonlinear oscillators model biological rhythm and coupling of such nonlinear oscillators induces interesting phenomena such as synchronization, phase-locking, oscillation deth etc. The dynamics and bifurcation structure of coupled oscillators are shown together with mathematical methods the analysis.