

1次元可逆セル・オートマトンにおける一斉射撃問題について

今井 克暢, 森田 憲一

Katsunobu IMAI and Kenich MORITA

広島大学 工学部

{imai,morita}@ke.sys.hiroshima-u.ac.jp

1 はじめに

Myhill によって提示された1次元セル・オートマトンの一斉射撃問題 [1] は, 任意の有限の長さ n の1次元3近傍セル・オートマトンの左端のセルからの信号により, すべてのセルを同時刻に特別の状態(射撃状態)にする問題である. Minsky と McCarthy は, $3n$ ステップで射撃状態になる同期解を示し, その後, 後藤が $2n-2$ ステップで同期する最小時間解を得た. 現在は Mazoyer[6] による6状態の最小時間解が知られている. また, 一斉射撃問題は, 1次元の場合だけでなく, 単一のセルからの信号で全体を同期する問題として, 2次元の一斉射撃問題 [5] など, 各種のバリエーションについても考察されている. 本研究では, 1次元可逆セル・オートマトンにおける一斉射撃問題について考察した. 一般に可逆セル・オートマトンでは, 信号を生成, 消滅させる処理に大きな制約が伴うため, 複数のセル間の同期動作を行うことは難しい場合が多い. そこで, 可逆セル・オートマトンにおいて一斉射撃解が果たして存在するのかという問題を研究した. その結果, 射撃状態が単一の状態となる従来の射撃解の条件を満たす解は構成できないことがわかった. そこで, 可逆という制約の下での一斉射撃解の満たすべき条件として, 複数の発火状態を許すものを定義し, その条件を満たす $3n$ 時間解を与えた. その際, 可逆セル・オートマトンの設計を容易にするために分割セル・オートマトン(PCA)[7]を用いた. ここでは, 可逆PCAにおいて, 一斉射撃がどのように行われるかをわかりやすく示すために, まず540状態の解を与えた. 次に可逆PCAによる99状態解を示した. なお, 本研究においては, 同期させるセルが, 無限長の1次元セル・オートマトン中に埋め込まれた形での定式化を行った.

2 諸定義と一斉射撃解条件

2.1 1次元セル・オートマトンの定義

決定性1次元セル・オートマトン(CA)は

$$A = (\mathbf{Z}, Q, N, \varphi_A, \#)$$

で定義される. ただし,

- \mathbf{Z} は全整数の集合,
- Q は各セルの状態の空でない有限集合,
- $N = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ は近傍ベクトルで, $x_i \in \mathbf{Z}$, k は自然数,
- $\varphi_A : Q^k \rightarrow Q$ は局所写像,
- $\# \in Q$ は静止状態で, $\varphi_A(\#, \#, \dots, \#) = \#$,

である. A の状相 c は $c : \mathbf{Z} \rightarrow Q$ なる写像で, Q 上のすべての状相の集合 $\text{Conf}(Q)$ は,

$$\text{Conf}(Q) = \{c | c : \mathbf{Z} \rightarrow Q\}$$

で表される. 大域写像 $\Phi_A : \text{Conf}(Q) \rightarrow \text{Conf}(Q)$ は

$$\forall x \in \mathbf{Z}, \Phi_A(c)(x) = \varphi_A(c(x+x_1), \dots, c(x+x_k))$$

で定義される. すなわち, ある状相 c に対して, Φ_A を適用した次の時刻の状相は $\Phi_A(c)$ となる. また, k ステップ後の状相は $\Phi_A^k(c)$ と表すことにする. 可逆CAとは大域写像 Φ_A が単射であるようなCAである. なお, $N = (-1, 0, 1)$ であるようなCAを1次元3近傍CAと呼ぶことにする.

2.2 1次元CAに対する標準的な一斉射撃解条件

ここではまず一斉射撃解の標準的な定義を述べる. これは通常の(非可逆)CAに対して用いられている一斉射撃解条件である.

一斉射撃解条件 I: 1次元3近傍CA $A = (\mathbf{Z}, Q, (-1, 0, 1), \varphi_A, \#)$ において, 相異なる3つの状態 $g, s, f \in Q - \{\#\}$ が存在し, つぎの1,2を満たす. (g は general(将軍), s は soldier(兵士), f は firing state(射撃状態)を表す.)

1. $\varphi_A(\#, s, s) = s, \varphi_A(s, s, s) = s, \varphi_A(s, s, \#) = s$.
2. $c_s^{(n)}$ を次のような状相とする.

$$c_s^{(n)}(x) = \begin{cases} g & x = 1 \\ s & x = 2, \dots, n \\ \# & x \leq 0, x \geq n+1 \end{cases}$$

このとき、ある関数 $t_f: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{Z}_+$ (\mathbf{Z}_+ は正の整数) が存在し、

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{Z}_+ \forall x \in \mathbf{Z} \\ ((1 \leq x \leq n \Rightarrow \Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) = f) \\ \wedge ((x < 1 \vee x > n) \Rightarrow \Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) = \#)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbf{Z}_+ \\ (0 \leq i < t_f(n) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbf{Z}, (\Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) \neq f)). \end{aligned}$$

が成り立つ。

A が上の条件を満たす CA であるとき、 t_f は同期ステップ数を表し、これを **射撃時間関数** と呼ぶ。 t_f は $t_f(n) \geq 2n - 2$ を満たすことがわかっている。また、 $c_s^{(n)}$ を **初期状態**、 $c_f^{(n)} = \Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})$ を **射撃状態** と呼ぶ。

2.3 可逆 CA と一斉射撃解条件 I

一斉射撃解条件 I は、射撃状態では n 個のセルすべてが単一の射撃状態 f になることを要求している。可逆 CA ではこのような一斉射撃解は得られないことが証明できる。

定理 2.1 一斉射撃解条件 I を満たす 1 次元 3 近傍可逆 CA は存在しない。

この定理の証明には Richardson [4] による次の結果を用いる。

命題 2.1 A を任意の CA とする。 A の大域写像 Φ_A が単射なら、 $\Phi_{A'} = \Phi_A^{-1}$ となる大域写像 $\Phi_{A'}$ を持つ CA A' が存在する。

定理 2.1 の証明：一斉射撃解条件 I を満たす 1 次元 CA $A = (\mathbf{Z}, Q, (-1, 0, 1), \varphi_A, \#)$ で、可逆であるものが存在すると仮定する。命題 2.1 より次のような A' で $\Phi_{A'} = \Phi_A^{-1}$ となるものが存在する。

$$A' = (\mathbf{Z}, Q, N_p, \varphi_{A'}, \#)$$

ただし、 $N_p = (x_1, x_2, \dots, x_p), x_i \in \mathbf{Z}$ で、 $|x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_p|$ としておく。ここで、 A' における

$c_f^{(n)}$ から $c_s^{(n)}$ への遷移の過程を考える。ただし、 n は $|x_p|$ にくらべて十分に大きいとする。 $\varphi_{A'}$ による遷移は $|x_p| + 1$ 以上離れたセルとは独立であり、 $t = 1$ における状態 $\Phi_{A'}(c_f^{(n)})$ の座標 x ($|x_p| + 1 \leq x \leq n - |x_p|$) のセルはすべて状態 $\varphi_{A'}(f, \dots, f)$ になる。つまり、ある $f^{(1)} \in Q - \{f\}$ に対して

$$\Phi_{A'}(c_f^{(n)})(x) = f^{(1)} \quad \text{if } |x_p| + 1 \leq x \leq n - |x_p|$$

となる。同様に $t = k$ においては、ある $f^{(k)} \in Q - \{f\}$ に対して

$$\Phi_{A'}(c_f^{(n)})(x) = f^{(k)} \quad \text{if } k|x_p| + 1 \leq x \leq n - k|x_p|$$

となる。ここで、 $f^{(k)}$ は $f^{(k)} \neq f$ であるだけでなく、 $f^{(k)} \neq f^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k-1$ でなければならない。もしも、 $\exists i, 1 \leq i \leq k-1, f^{(k)} = f^{(i)}$ とすると、

$$\Phi_{A'}^k(c_f^{(n)})(x) = f^{(i)} \quad \text{if } k|x_p| + 1 \leq x \leq n - k|x_p| \quad (1)$$

となるが、 $k|x_p| + 1 \leq x \leq n - k|x_p|$ でのセルの状態は、 $t = i$ における $i|x_p| + 1 \leq x \leq n - i|x_p|$ での状態と同一になる。しかし、 $t = i$ の状態は Φ_A によって i ステップ後に c_f に遷移するので、 $t = k - i$ において $k|x_p| + i + 1 \leq x \leq n - k|x_p| - i$ のセルが状態 f でなければならないことになり矛盾する。よって、 $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ はすべて異なる状態でなければならない。

ところが n は任意に大きくでき、 $t_f(n) \geq 2n - 2$ であることから、 k も (1) と $k < t_f(n)$ とを満たす限りにおいて、任意に大きな値にできるが、 Q の要素の数は有限であるため $f^{(i)}$ すべてを異なる状態にすることはできず、矛盾が生じる。

以上より、一斉射撃解条件 I を満たす可逆 CA は存在しない。□

2.4 可逆 CA に対する一斉射撃解条件

可逆 CA においては単一の射撃状態の解を構成できないため、複数の状態からなる射撃状態集合 $F \subset Q$ を考え、 $t = t_f(n)$ において、各セルの状態が F の要素になっていれば同期したと考えることにする。また、同期させる n 個のセルだけでなく、その外側のセルの状態の変更も許すことにする。すなわち一斉射撃解条件 I を次のように緩和し、これを満たす可逆 CA を構成する問題を考える。

一斉射撃解条件 II: 1 次元 3 近傍 CA $A = (\mathbf{Z}, Q, (-1, 0, 1), \varphi_A, \#)$ において、相異なる 2 つの状態 $g, s \in Q - \{\#\}$ と状態集合 $F \subset Q - \{\#, g, s\}$ が存在し、つぎの 1, 2 を満たす。

$$1. \varphi_A(\#, s, s) = s, \varphi_A(s, s, s) = s, \\ \varphi_A(s, s, \#) = s.$$

2. $c_s^{(n)}$ を次のような状相とする.

$$c_s^{(n)}(x) = \begin{cases} g & x = 1 \\ s & x = 2, \dots, n \\ \# & x \leq 0, x \geq n+1 \end{cases}$$

このとき, ある関数 $t_f: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{Z}_+$ が存在し,

$$\forall n \in \mathbf{Z}_+ \forall x \in \mathbf{Z}$$

$$((1 \leq x \leq n \Rightarrow \Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) \in F) \\ \wedge ((x < 1 \vee x > n) \Rightarrow \Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) \notin F)),$$

$$\forall i \in \mathbf{Z}_+ (0 \leq i < t_f(n) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbf{Z}, (\Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) \notin F)).$$

が成り立つ.

3 可逆 CA による一斉射撃解の構成

3.1 分割セル・オートマトンの定義

可逆空間における一斉射撃解の定義に基づいて解を構成するにあたっては, 分割セル・オートマトン (PCA) を用いた. まず, PCA の定義を示す.

1次元3近傍 PCA P は1次元 CA のサブクラスとみなすことができ,

$$P = (\mathbf{Z}, L, C, R, \varphi_P, (\#, \#, \#))$$

であらわされ,

- \mathbf{Z} は全整数の集合,
- L, C, R はそれぞれ3分割した各セルの左, 中央, 右パーティションの状態の空でない有限集合,
- $\varphi_P: R \times C \times L \rightarrow L \times C \times R$ は局所関数.
- $(\#, \#, \#) \in L \times C \times R$ は静止状態で $\varphi_P(\#, \#, \#) = (\#, \#, \#)$.

である. P の状相 c は $c: \mathbf{Z} \rightarrow L \times C \times R$ なる写像で, $L \times C \times R$ 上のすべての状相の集合 $\text{Conf}(L \times C \times R)$ は,

$$\text{Conf}(L \times C \times R) = \{c | c: \mathbf{Z} \rightarrow L \times C \times R\}$$

で表される. 大域関数

$$\Phi_P: \text{Conf}(L \times C \times R) \rightarrow \text{Conf}(L \times C \times R)$$

は, $L \times C \times R$ から L, C, R をとりだす射影関数をそれぞれ, $LEFT, CENTER, RIGHT$ とすると,

$$\forall x \in \mathbf{Z}, \Phi_P(c)(x) = \varphi_P(RIGHT(c(x-1)), \\ CENTER(c(x)), \\ LEFT(c(x+1)))$$

で定義される. P が可逆であるための必要十分条件は, φ_P が1対1写像であることが示されているので [7] 容易に可逆な CA を設計することができる.

3.2 可逆 PCA による 3n 時間解 (540 状態)

可逆 PCA による 540 状態 (L, C, R の各状態集合の要素が 6,15,6) の一斉射撃解を次に示す.

PCA による一斉射撃解 1 (540 状態)

- $P_1 = (\mathbf{Z}, L_1, C_1, R_1, \varphi_{P_1}, (\#, \#, \#)),$
 $C_1 = \{\#, g, s, t, c, \bar{g}, \bar{g}, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{d}, \bar{f}, \bar{f}\}$
 $L_1 = R_1 = \{\#, +, *, -, /, =\}.$
- General を $(\#, g, \#)$, soldier を $(\#, s, \#)$ とする. すなわち, 初期状相は,

$$c_s^{(n)}(x) = \begin{cases} (\#, g, \#) & x = 1 \\ (\#, s, \#) & x = 2, \dots, n \\ (\#, \#, \#) & x \leq 0, x \geq n+1 \end{cases}$$

となる.

- 射撃状態集合 F_1 を

$$F_1 = \{(\#, \bar{f}, \#), (\#, \bar{f}, \#), (+, \bar{f}, \#), \\ (\#, \bar{f}, +), (\#, \bar{f}, -), (-, \bar{f}, \#), \\ (-, \bar{f}, \#), (\#, \bar{f}, -), (-, \bar{f}, -), \\ (-, \bar{f}, -), (-, \bar{f}, +), (+, \bar{f}, -), \\ (+, \bar{f}, -), (-, \bar{f}, +)\}$$

とする.

- 局所関数 φ_{P_1} は表 1 に示す.

$n=9$ のときのコンフィギュレーションの遷移を図 1 に示した.

次に, 解 1 が一斉射撃解条件 II に適合する解であることを示す. PCA P_1 を通常の CA とみなしたとき (それを A_1 とする), 一斉射撃解条件 II の 1 は

$$\varphi_{A_1}((\#, \#, \#), (\#, s, \#), (\#, s, \#)) = (\#, s, \#) \\ \varphi_{A_1}((\#, s, \#), (\#, s, \#), (\#, \#, \#)) = (\#, s, \#) \\ \varphi_{A_1}((\#, s, \#), (\#, s, \#), (\#, s, \#)) = (\#, s, \#)$$

t = 0	g	s	s	s	s	s	s	s	s	s		
t = 1	g*	s	s	s	s	s	s	s	s	s		
t = 2	g	a+	s	s	s	s	s	s	s	s		
t = 3	g	h	t+	s	s	s	s	s	s	s		
t = 4	g	s	t	t+	s	s	s	s	s	s		
t = 5	g	s	a	t	t+	s	s	s	s	s		
t = 6	g	s	h	t	t	t+	s	s	s	s		
t = 7	g	s	s	t	t	t	t+	s	s	s		
t = 8	g	s	s	a	t	t	t	t+	s	s		
t = 9	g	s	s	h	t	t	t	t	t+	s		
t = 10	g	s	s	s	t	t	t	t	t	t+		
t = 11	g	s	s	s	a	t	t	t	t	t+	s	
t = 12	g	s	s	s	h	t	t	t	t	t+	s	
t = 13	g	s	s	s	s	t	t	t	t	t	t+	s
t = 14	g	s	s	s	s	g	s	s	s	s	s	
t = 15	g	s	s	s	s	g*	g*	s	s	s	s	
t = 16	g	s	s	a	g	g	a+	s	s	s	s	
t = 17	g	s	t	h	g	g	h	t	t	t	t+	s
t = 18	g	t	t	s	g	g	s	t	t	t	t+	s
t = 19	g	t	a	s	g	g	s	a	t	t	t	t+
t = 20	g	s	h	s	g	g	s	h	t	t	t	t+
t = 21	g	s	s	s	g	g	s	s	g*	g*	s	
t = 22	g	a	g	a	g	g	a	g	a	g	a	a+
t = 23	g	h	g	h	g	g	h	g	h	g	h	h+
t = 24	g	g*	g*	g*	g*	g	g*	g*	g*	g*	g*	g*
t = 25	d	g	d	g	d	d	g	d	g	d	g	d
t = 26	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f

図 1: Synchronization of 9 cells by the 540-state reversible PCA P_1 .

になるが、PCA の局所関数 φ_{P_1} の遷移規則では、 $\varphi_P(\#, s, \#) = (\#, s, \#)$ が成り立つので条件 1 が満たされる。さらに P_1 の可逆性は φ_{P_1} が一対一であることからわかる (計算機で調べることによって確認した)。

次に、解 1 が一斉射撃解条件 II の 2 を満たすものであることの概略を説明する。

一斉射撃解 1 (540 状態) の概説

解 1 は Minsky の $3n$ 時間解を元としている。この解法は、まず n 個のセルの中央のセルを見いだす。そして、そのセルが新たに general と同様の働きをすることにより、両側の各 $n/2$ 個のセルを同期させる問題に分解する。この分割を順次繰り返し、最終的に単一のセルの射撃に帰着して全体の同期をとるものである。{1} のルールによって $x = 1$ の general の状態にあるセルから速度 1 と $1/3$ の信号を出力する。1 と $1/3$ の重畳した信号は “*” で表す。C パーティションは状態シンボルのベクトル記号の向きによって信号の進行方向を保持している。さらに、soldier セルと、信号を出力し終えた general セルの静止状態を

ルール {2} で定義する。

信号は soldier 状態のセルを順に伝わるが、{3} は soldier セルが、速度 1 と $1/3$ の信号を受け、次のセルに伝えるルールである。これを、1 の信号は、soldier セルが {4} によって、 $1/3$ の信号は {5} によって、さらに右の soldier セルに伝達する。速度 1 と $1/3$ の信号の伝達は、それぞれ R パーティションに “+”, “-” 状態を定義することによって実現した。速度 1 の信号は到達したが、まだ $1/3$ の信号は到達していない soldier セルは、C パーティションが状態 “t” に変化することでそれを記憶する。速度 1 の信号の “壁” による反射は {6} による。標準的な 1 次元 3 近傍 CA と異なり、PCA の場合には、C パーティションの状態を隣のセルに伝達するために 2 ステップを必要とするので、soldier セルと、 “壁” である静止状態のセルを判別するためには、静止状態のセルの L パーティションを書き換えずに信号を反射することはできない。ここで、解条件 II における条件の緩和の必要がある。

反射した速度 1 の信号は、ちょうど中央の $n/2$ の

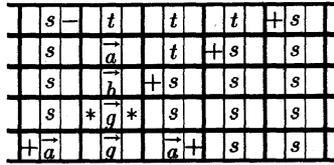


図 2: Collision of the verocity 1 and 1/3 signals in P_1 (when $n - 1$ is odd).

位置にあるセルで、速度 1/3 の信号と衝突する。このことから、衝突点のセルが中央のセルであることを知ることができる。この衝突点における処理はルール {7} で処理される。可逆的であるためには、衝突時にどちら側から速度 1 の信号が来たのかを保持し続けねばならない。そのため、信号の衝突によって生成される新たな general の状態の C パーティションを 2 状態用意し、ベクトルの向きで表現している。また、衝突は n の奇偶によって衝突の位相が異なる。さらに、2 分割した両方の soldier セルの数が同一になるようにしなければならない。そのため、新たな“壁”としての general セルの数を soldier セルの数が $2k + 1$ のときは 1、 $2k + 2$ のときは 2 とする。

Soldier の数が $2k + 1$ の場合は、図 2 に示す位相で衝突する。この場合は、新たに general になるセルは \vec{g} のみで、同期信号を出力した後は、このセルが両側の soldier セルからの信号を反射する“壁”としても働く。

Soldier の数が $2k + 2$ の場合は、図 1 の $t = 13$ のコンフィグレーションに示される位相で衝突する。この場合、general セルは \vec{g}, \vec{g} の 2 つになる。状態 g となった衝突点のセルは、左側にも general を生成するため同時に L パーティションにそのことを知らせる信号を “=” として、出力する。 n がいかなる値を取っても、これ以外の位相での衝突はないため、場合分けはこの 2 つだけになる。ここで、衝突点の左隣のセルがその信号を受け \vec{g} に遷移するが、可逆 CA では、生成した信号を痕跡なしに消去することは不可能であるため、この信号の位相を保持するために {8} によって、 \vec{g}, \vec{g} 間を速度 1 の信号を伝え続ける。これは、最終的に射撃状態にいたるまで消去できない。

以上のルールにより順次分割が進み、射撃状態の直前には n 個のセルすべてが general の状態となり、全体のコンフィグレーションは、C パーティションが

- “壁”として機能している \vec{g} か \vec{g} 、隣り合う (\vec{g}, \vec{g}) の組。
- general として “*” を L または R パーティシヨ

ンに出力している \vec{g} か \vec{g}

のセルが交互に並んだものになる。標準的な 1 次元 3 近傍 CA では、この状態から 1 ステップ後に射撃状態にすることができるが、PCA では、C パーティションの状態を次のステップで隣接セルに伝えることはできないため、general として “*” を出力したセルが、隣接セルがすでに“壁”であることを知るためには 2 ステップ必要である。そのため、general から直接信号を受け取った“壁”として機能しているセルは自分自身の C パーティションを、1 ステップ後に射撃状態に遷移する射撃準備状態 (シンボル “d” で表す) とし、隣接する general セルに対し、射撃状態に遷移させる信号 “/” を L,R パーティションに出力する。以上がルール {9} である。次のステップで、{10} のルールによって、最終的にすべてのセルが射撃状態集合 F に含まれる状態になる。

以上のルールの他に、ひとつのセルが複数の処理にかかわる場合のルール {11} が必要である。

長さ n のセルにおける最初の信号の衝突までの時間は、約 $3n/2$ ステップなので、 $t_f(n)$ は、

$$t_f(n) \approx \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}n \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4}n \right) + \dots = 3n$$

となり、約 $3n$ ステップ後に射撃状態になる。また、解 1 では、 (\vec{g}, \vec{g}) 間の “=” による信号など可逆性を維持するために導入された信号がセル空間全体に散逸せず、 $c_s^{(n)}(x), x = 1, \dots, n$ の近傍にとどまっている。一般に、可逆でない CA を可逆化する場合、“ゴミ情報”を散逸させてしまうが、ここで構成したような可逆 CA を、ゴミを散逸させない可逆 CA と呼ぶ。

3.3 可逆 PCA による $3n$ 時間解 (99 状態)

さらに可逆 PCA による 99 状態 (L, C, R の各要素が 3,11,3) の一斉射撃解を構成した。

一斉射撃解 2 (99 状態)

- $P_2 = (\mathbb{Z}, L_2, C_2, R_2, \varphi_{P_2}, (\#, \#, \#))$,
 $C_2 = \{\#, t, \vec{s}, \vec{s}, \vec{e}, \vec{e}, u, \vec{w}, \vec{w}, v, f\}$,
 $L_2 = R_2 = \{\#, +, *\}$,
- General を $(+, \vec{s}, *)$, soldier を $(\#, \vec{s}, \#)$, 静止状態を $(\#, \#, \#)$ とする。初期状態は、

$$c_s^{(n)}(x) = \begin{cases} (+, \vec{s}, *) & x = 1 \\ (\#, \vec{s}, \#) & x = 2, \dots, n \\ (\#, \#, \#) & x \leq 0, x \geq n + 1. \end{cases}$$

表 1: Transition list of 540-state reversible PCA P_1 .

{1}	$(\#, \bar{g}, \#) \rightarrow (\#, \bar{g}, *)$,			
{2}	$(\#, \#, \#) \rightarrow (\#, \#, \#)$, $(\#, s, \#) \rightarrow (\#, s, \#)$, $(\#, t, \#) \rightarrow (\#, t, \#)$, $(\#, \bar{g}, \#) \rightarrow (\#, \bar{g}, \#)$,			
{3}	$(*, s, \#) \rightarrow (\#, \bar{a}, +)$, $(\#, s, *) \rightarrow (+, \bar{a}, \#)$,			
{4}	$(+, s, \#) \rightarrow (\#, \bar{t}, +)$, $(\#, s, +) \rightarrow (+, \bar{t}, \#)$,			
{5}	$(\#, \bar{a}, \#) \rightarrow (\#, \bar{b}, \#)$, $(\#, \bar{a}, \#) \rightarrow (\#, \bar{b}, \#)$, $(\#, \bar{b}, \#) \rightarrow (\#, s, -)$, $(\#, \bar{b}, \#) \rightarrow (-, s, \#)$,			
	$(-, t, \#) \rightarrow (\#, \bar{a}, \#)$, $(\#, t, -) \rightarrow (\#, \bar{a}, \#)$,			
{6}	$(+, \#, \#) \rightarrow (+, \#, \#)$, $(\#, \bar{t}, +) \rightarrow (+, s, \#)$, $(+, t, \#) \rightarrow (\#, s, +)$, $(\#, \bar{g}, +) \rightarrow (\#, \bar{g}, +)$,			
	$(+, \bar{g}, \#) \rightarrow (+, \bar{g}, \#)$, $(+, \bar{g}, \#) \rightarrow (+, \bar{g}, \#)$,			
{7}	$(-, t, +) \rightarrow (=, \bar{g}, \#)$, $(+, t, -) \rightarrow (\#, c, =)$, $(=, s, \#) \rightarrow (=, \bar{g}, *)$, $(\#, s, =) \rightarrow (*, \bar{g}, =)$,			
	$(\#, \bar{b}, +) \rightarrow (*, \bar{g}, *)$, $(+, \bar{b}, \#) \rightarrow (*, \bar{g}, *)$, $(\#, c, \#) \rightarrow (*, \bar{g}, \#)$,			
{8}	$(=, \bar{g}, \#) \rightarrow (=, \bar{g}, \#)$, $(\#, \bar{g}, =) \rightarrow (\#, \bar{g}, =)$,			
{9}	$(\#, \bar{g}, *) \rightarrow (\#, \bar{d}, /)$, $(*, \bar{g}, \#) \rightarrow (/ , \bar{d}, \#)$, $(*, \bar{g}, \#) \rightarrow (/ , \bar{d}, \#)$, $(\#, \bar{g}, *) \rightarrow (\#, \bar{d}, /)$,			
	$(*, \bar{g}, *) \rightarrow (/ , \bar{d}, /)$, $(*, \bar{g}, *) \rightarrow (/ , \bar{d}, /)$, $(*, \bar{g}, +) \rightarrow (/ , \bar{d}, +)$, $(+, \bar{g}, *) \rightarrow (+, \bar{d}, /)$,			
	$(=, \bar{g}, *) \rightarrow (=, \bar{d}, /)$, $(*, \bar{g}, =) \rightarrow (/ , \bar{d}, =)$, $(*, \#, \#) \rightarrow (/ , \#, \#)$, $(\#, \#, *) \rightarrow (\#, \#, /)$,			
{10}	$(\#, \bar{d}, \#) \rightarrow (\#, \bar{f}, \#)$, $(\#, \bar{d}, \#) \rightarrow (\#, \bar{f}, \#)$, $(=, \bar{d}, \#) \rightarrow (=, \bar{f}, \#)$, $(\#, \bar{d}, =) \rightarrow (\#, \bar{f}, =)$,			
	$(\#, \bar{g}, /) \rightarrow (\#, \bar{f}, /)$, $(/ , \bar{g}, \#) \rightarrow (/ , \bar{f}, \#)$, $(/ , \bar{g}, \#) \rightarrow (/ , \bar{f}, \#)$, $(\#, \bar{g}, /) \rightarrow (\#, \bar{f}, /)$,			
	$(/ , \bar{g}, /) \rightarrow (/ , \bar{f}, /)$, $(/ , \bar{g}, /) \rightarrow (/ , \bar{f}, /)$, $(/ , \bar{g}, +) \rightarrow (/ , \bar{f}, +)$, $(+, \bar{g}, /) \rightarrow (+, \bar{f}, /)$,			
	$(+, \bar{g}, /) \rightarrow (+, \bar{f}, /)$, $(/ , \bar{g}, +) \rightarrow (/ , \bar{f}, +)$, $(=, \bar{g}, /) \rightarrow (=, \bar{f}, /)$, $(/ , \bar{g}, =) \rightarrow (/ , \bar{f}, =)$,			
{11}	$(+, \bar{g}, +) \rightarrow (+, \bar{g}, +)$, $(+, \bar{g}, +) \rightarrow (+, \bar{g}, +)$, $(=, \bar{g}, +) \rightarrow (=, \bar{g}, +)$, $(+, \bar{g}, =) \rightarrow (+, \bar{g}, =)$,			

● 射撃状態集合

$$F_2 = \{(\#, \bar{f}, +), (+, \bar{f}, \#), (*, \bar{f}, +), \\ (+, \bar{f}, *), (\#, \bar{f}, \#), (+, \bar{f}, +), \\ (*, \bar{f}, \#), (\#, \bar{f}, *)\}.$$

● 局所関数 φ_{P_2} の遷移は表 2 に示す。

解 2 の $n = 9$ のときのコンフィグレーションの遷移を図 3 に示す。

4 おわりに

可逆セル空間における一斉射撃解を定義し、Minsky の $3n$ 時間解を元に可逆 PCA による解を構成した。ここでは 99 状態の解を示したが、状態数をどれだけ減らせるかという問題は今後の課題である。この構成法と同様の方法により、 $1/7$ の速度の信号を重ねて出力することにより、全体のセルを 4 分割し、 $(7/3)n$ 時間解を構成することが出来ることがわかってる。さらに、より遅い速度の信号を順次用いることにより、 $(2 + \varepsilon)n$ 時間解を可逆 CA で構成することが可能であると思われるが、 $2n$ 最小時間解の構成は“ゴミ”の散逸を許したとしても実現することが出来るかどうかは明らかではない。

一般に可逆 CA において、同期動作を行わせることは難しいが、この同期解を用いて、別の可逆 CA の

動作を可逆性を崩さずに同期動作させることが考えられる。複数の可逆 CA のルールのトランザクションとその可逆性の関係なども、興味深い問題であると思われる。

参考文献

- [1] Moore, E.F.: The firing squad synchronization problem, in *Sequential machines* (ed. E. F. Moore) Addison-Wesley, Reading MA, pp.213-214 (1964).
- [2] Waksman, A.: An optimum solution to the firing squad synchronization problem, *Inform. and Control*, **9**, pp.66-78 (1966).
- [3] Balzer, R.: An 8-states minimal time solution to the firing squad synchronization problem, *Inform. and Control*, **10**, pp.22-42 (1967).
- [4] Richardson, D.: Tessellations with local transformations, *J. Comput. Syst. Sci.*, **6**, pp.373-388 (1972).
- [5] Kobayashi, K.: The firing squad synchronization problem for two-dimensional arrays, *Inform. and Control*, **34**, pp.177-197 (1977).
- [6] Mazoyer, J.: A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem, *Theoretical Computer Science*, **50**, pp.183-238 (1987).
- [7] Morita, K., Harao, M.: Computation universality of one-dimensional reversible (injective) cellular automata, *Trans. IEICE*, **E72**, pp.758-762 (1989).

表 2: Transition table of 99-state reversible PCA P_2 (\overleftarrow{s} and \overleftarrow{w} are symmetric with \overrightarrow{s} and \overrightarrow{w} .)

#	#	*	+	\overleftarrow{s}	#	*	+	\overrightarrow{t}	#	*	+
#	###	*##	+##	#	# \overleftarrow{s} #	* \overleftarrow{t} +	* \overleftarrow{u} +	#	# \overrightarrow{t} #	* \overrightarrow{s} #	+ \overrightarrow{t} #
*	##*			*		+ \overleftarrow{e} +	# \overleftarrow{w} +	*	# \overrightarrow{s} *		* \overrightarrow{s} *
+	##+			+		# \overleftarrow{e} +	+ \overleftarrow{w} +	+	# \overrightarrow{t} +	* \overrightarrow{s} *	# \overrightarrow{u} #

\overleftarrow{u}	#	*	+	\overleftarrow{v}	#	*	+	\overleftarrow{w}	#	*	+
#	# \overleftarrow{v} #	# \overleftarrow{s} *	# \overleftarrow{s} +	#	* \overleftarrow{v} *	# \overleftarrow{v} +	# \overleftarrow{s} +	#	# \overleftarrow{w} #	# \overleftarrow{w} *	# \overleftarrow{f} +
*	* \overleftarrow{s} #			*	+ \overleftarrow{v} #			*		* \overleftarrow{w} *	
+	+ \overleftarrow{s} #			+	+ \overleftarrow{s} #			+	+ \overleftarrow{w} #	+ \overleftarrow{w} *	* \overleftarrow{f} +

\overleftarrow{e}	#	*	+	\overleftarrow{e}	#	*	+
#	# \overleftarrow{f} #			#	+ \overleftarrow{f} +		# \overleftarrow{f} *
*				*			
+	* \overleftarrow{f} #			+			

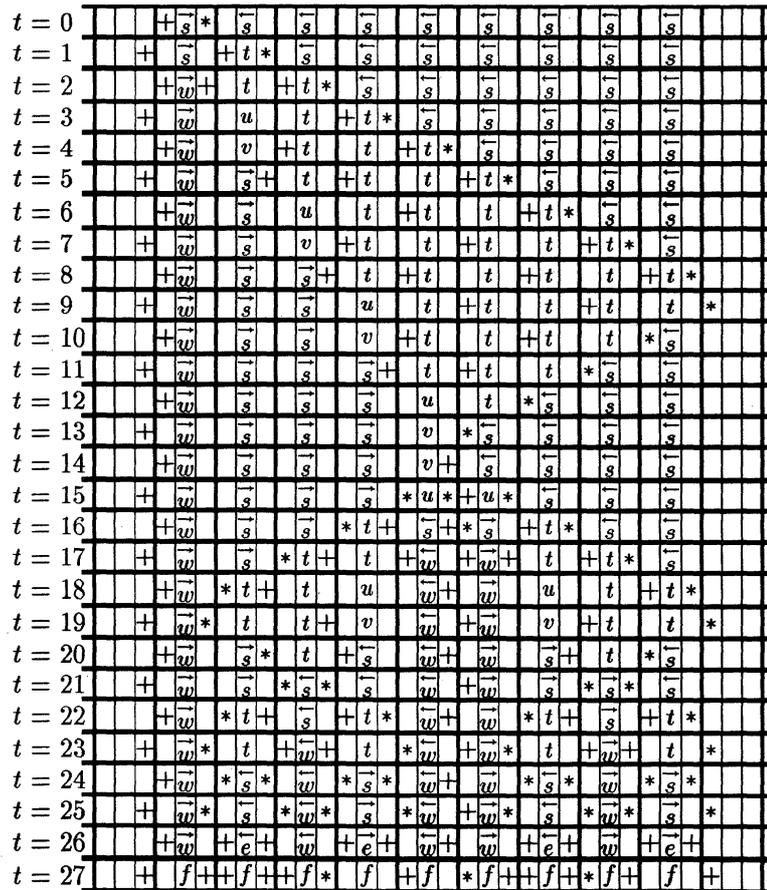


图 3: Synchronization of 9 cells by the 99-state reversible PCA P_2 .