

Long-range Stark scattering

北海道大学理学部 小澤 徹 (Tohru Ozawa)

一様静電場の影響で原子のエネルギー準位にずれが生じることを発見者に因んでシュタルク効果という。その系はハミルトニアン $H = -(1/2)\Delta + E \cdot x + V$ によって支配される。ここで Δ は n 次元ラプラシアン、 E は \mathbb{R}^n の定ベクトル、 x は位置作用素、 V は \mathbb{R}^n 上の実数値関数による掛算作用素であり対応する函数と同一視する。定ベクトル E が電場に対応し、 $E \neq 0$ の場合掛算作用素 $E \cdot x$ は上にも下にも非有界である。 H の示す様々な特異性は多くの場合この事実起因する。更にこの事実が $E \cdot x$ を摂動項と見做すことに多くの困難をもたらす。量子力学の教科書に見られる摂動論は $E \cdot x$ を摂動項として扱っている為 $|E| \rightarrow 0$ の過程に於てしか意味を持ち得ない。全ハミルトニアン H を $H_0 = -(1/2)\Delta + E \cdot x$ の摂動と見做せば数学的摂動論の枠に自然に収まることを指摘したのは Avron-Herbst[1] でありシュタルク散乱の歴史はここに始まる。これをもって我々は H の示す様々な特異性は H_0 から移植されたものという視点を獲得するに至り研究対象としては作用素の組 (H_0, H) のスペクトル・散乱理論を選択したことになる。 H_0 は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ や $S(\mathbb{R}^n)$ の上で本質的自己共役であり V の特異性の位数が局所的に $\min(2, n/2)$ より小さければその相対限界は 1 より小さくなるので H_0 と H はヒルベルト空間 $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$ の上で自己共役作用素として実現される。さて我々の目的は自己共役作用素の組 (H_0, H) に対する散乱問題を考察することである。電場の無い場合 $E = 0$ に比較して状況が著しく異なるのは次の点である：

1. H は下に有界でなく離散固有値がない。
2. H のスペクトルは絶対連続部分のみからなり実軸に一致する。
3. 摂動 V に関する短距離型・長距離型の分類条件が無遠慮に於る減衰度で判定するとクーロン型の -1 ではなくその半分の $-1/2$ である。より正確にはこの減衰条件は E の反対方向に於る挙動で判定すべきものである。
4. 長距離散乱に於て変形波動作用素を定義する方法に幅があり各々一長一短がある。
5. 電場に垂直な方向が存在しない空間一次元の場合には対応する古典散乱との間に決定的な差違が生ずる。具体的には V が電場の逆方向に対数函数の逆冪の減衰をもてば古典論的波動作用素が存在し完全性をもつ。即ち、対数函数の逆冪でも短距離摂動の範疇に入る。

事実 (1) から (3) までに関しては文献 [1,4,6,7,8,11,13,14,17,18] がある。共鳴現象などのより深いスペクトル理論についてはここでは触れないが上記論文の引用文献で知ることができる。(3) の分類条件に関しては $-1/2$ より早い減衰に対する散乱理論が [1,4,13,14,17,18] にある。丁度 $-1/2$ が分類の境界点でありこの場合非自明な波動作用素は構成不可能であるという Veselić-Weidmann の予想を証明したのは

[11] であり更に [8,9] で拡張された。(3) に現れる $-1/2$ は古典自由軌道が相空間に於て $(q(t), p(t)) = (-(t^2/2)E + tp(0) + q(0), -tE + p(0))$ に従うことと密接に関連している。Cook-Kuroda の方法に従えば適当な函数 ϕ に対し $V \exp(-itH_0)\phi$ を L^2 で評価しそれが t で可積分であることを示すのが第一の仕事である。先の自由軌道の示唆するのはこの L^2 ノルムが $|V(q(t))|$ の如く振舞うということであるから $E \neq 0$ なる限り V の減衰度としては 2 倍の勘定となる訳である。実際の証明では動標構に移って計算するのが最も見易いようである。この手続きによって (H_0, H) の散乱は $(-(1/2)\Delta, -(1/2)\Delta + V(x - (t^2/2)E))$ の散乱問題に変換される。自由発展作用素 $\exp(-i(t/2)\Delta)$ の因子分解 $M(t)D(t)\mathfrak{F}M(t)$ により Fourier 変換の変数としての運動量を平均運動量 $t^{-1}x$ に置き換え $M(t) \equiv \exp(i|x|^2/2t) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \pm\infty$) なる事実に基づき計算過程を Fourier 変換と伸長 $(D(t)\psi)(x) \equiv (it)^{-n/2}\psi(t^{-1}x)$ の性質に帰着させると変換された散乱問題は随分簡単になる。詳細は [9] で実行されているが元々の発想は [2,12] にある。さて以上より V の減衰度が $-1/2$ に等しいかそれより小さい場合には波動作用素の定義を変形して長距離散乱の枠組を建設する必要がある。この問題に関して最初の解答を与えたのは White [15] であり条件 $\partial^\alpha V(x) = O(|x|^{-\epsilon-|\alpha|/2})$ の下で磯崎・北田型の変形波動作用素の存在と完全性が示されている。この論文の直後出版された [8] に於て発見された事実が (5) である。散乱過程が対応する古典軌道で近似できるというそれ迄の常識が必ずしも成立しないことを示す事実である。更に White の変形波動作用素はこの事実を量子論的に説明しないということもあって (5) の事実を合理的に説明し得る変形波動作用素の構成が興味ある問題として残された。(5) の事実は究極的にはニュートンの運動方程式 $\ddot{q}(t) = -E - V'(q(t))$ を積分した時に $V'(q(t)) = \frac{d}{dt}(V(q))/\dot{q}(t)$ に基づいた部分積分で可積分性を稼ぐという簡単な着想によるものであり従って $|\dot{q}(t)|$ が増大するシュタルクの場合でしかも空間が一次元の場合にしか有効でない。White に次いで新しい変形波動作用素を導入したのは Jensen-Yajima [10] であり、より直観的かつ動力的洞察に基づくドラード型の修正因子による変形波動作用素が提案された。具体的には自由動力学 $\exp(-itH_0)$ を変形自由動力学 $\exp(-itH_0 - i\int_0^t V(-i\tau\nabla - (\tau^2/2)E)d\tau)$ に置き換えよというものである。ここで許される V の条件は White のものと同じである。結論としてこの変形波動作用素は (5) の事実が純粋に動力的理由によることを示したことになった。古典論に現れた部分積分の技術がここでは位相因子の運動量空間での評価に於て $V'(t\xi - (t^2/2)E) = \frac{d}{dt}(V(t\xi - (t^2/2)E))/(\xi - tE)$ となって現れていることは興味深い。Jensen-Yajima の変形波動作用素の一つの不利な点は intertwining relation が成立しないことにある。これは H_0 と修正位相が可換でない為であるが、動力的に自然に導入された修正位相が当然成立することとして期待されるはずの intertwining relation をもたらさない点は注目すべきである。また [10,15] の V に対する条件と (5) の条件との間にはまだ開きがあることにも着目しておきたい。 H_0 と可換な修正位相の選び方についていえば、問題は実は簡単であって上の修正位相に於て $-i\tau\nabla$ を消去し $-i\int_0^t V(-\tau^2/2)E d\tau$ とすれば良いことに Graf [3] が初めて気づき条件 $\nabla V(x) = O(|x|^{-1-\epsilon})$ の下でその変形波動作用素が存在し完全であることを示した。注目すべき点は Graf の修正位相因子は只の数であるという事実でありこのことより intertwining relation は自動的に導かれる。更に漸近的オブザーバブルの枠組ではこの修正位相因子は丁度相殺され上の条件のポテンシャル V は短距離型の効果を与えると見做せる。この修正位相因子は絶対値に於て 1 であるから Graf の結果により (5) の事実はある意味で見掛け上のものであり量子論的散乱理論に於て観測にかからない修正を施すことにより合理的に説明し得るものであると

いう結論が得られる。動標構でみると Graf の位相関数は時間に依存したポテンシャル $V(x - (t^2/2)E)$ を $V(x - (t^2/2)E) - V(-(t^2/2)E)$ に修正する役割を果たす。修正されたポテンシャルが短距離的に振舞う為の条件として自然に V の一階微分に対する仮定が導かれる。更に位相関数を精密化することにより弱い V の条件を導くことも可能であり [9,16] に幾つかの試みが見られる。以上が大まかな歴史の流れである。ここで残された問題は Graf の条件 $\nabla V(x) = O(|x|^{-1-\epsilon})$ と (5) の条件、正確には $|V(x)| + |V'(x)| = O((\log x)^{-1-\epsilon})$ との隔たりでありそもそも [9] の動機の一つとなった問題である。以下 [9] で得られた結果を述べる。第一には空間一次元では (5) の条件の下に Graf の変形波動作用素が存在することである。第二には空間多次元では $\nabla V(x) = (|x|^{-1})$ なる V で Graf の変形波動作用素の存在しない例が存在することである。第一の結果で (5) の謎が漸く合理的整合的に理解可能となった訳である。第二の結果の意味することはシュタルク散乱に於ける空間次元の果たす役割の決定的な差ともう一つは空間多次元では Graf の条件が最良であるということである。第一の結果を導くにはまず上記条件の下で Jensen-Yajima 型の変形波動作用素の存在を示し次にその位相関数と Graf の位相関数との時間無限大に於ける差が 0 に測度収束することを示せば良い。そこから Graf の変形波動作用素の存在を導くには Hörmander[5] の議論を修正すれば良い。問題となるのは初めに挙げた二つの収束をいうことであるがここでも本質的に用いられるのは前に述べた部分積分に基づく収束位数の改良である。第二の結果は動標構に移って [11] の方法を用いることによって証明される。詳細は [9] を見られたい。この小文では多体問題には一切言及しなかったが最近多体の長距離シュタルク散乱の問題では急速な進歩が見られる。詳細はその立役者の一人である足立氏の論説を見られたい。

参考文献

- [1] J.E. Avron and I.W. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys. **52** (1977), 239-254.
- [2] J. Ginibre and T. Ozawa, *Long-range scattering for non linear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$* , Commun. Math. Phys. **151** (1993), 619-645.
- [3] G.M. Graf, *A remark on long-range Stark scattering*, Helv. Phys. Acta **64** (1992), 1167-1174.
- [4] I.W. Herbst, *Unitary equivalence of Stark Hamiltonians*, Math. Z. **155** (1977), 55-70.
- [5] L. Hörmander, *The existence of wave operators in scattering theory*, Math. Z. **145** (1976), 69-91.
- [6] A. Jensen, *Asymptotic completeness for a new class of Stark effect Hamiltonians*, Commun. Math. Phys. **107** (1986), 21-28.
- [7] A. Jensen, *Scattering theory for Hamiltonians with Stark effect*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **46** (1987), 383-395.

- [8] A. Jensen and T. Ozawa, *Classical and quantum scattering for Stark Hamiltonians with slowly decaying potentials*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **54** (1991), 229-243.
- [9] A. Jensen and T. Ozawa, *Existence and non-existence results for wave operators for perturbations of the Laplacian*, Rev. Math. Phys. **5** (1993), 601-629.
- [10] A. Jensen and K. Yajima, *On the long range scattering for Stark Hamiltonians*, J. reine angew. Math. **420** (1991), 179-193.
- [11] T. Ozawa, *Long-range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Commun. Math. Phys. **139** (1991), 479-493.
- [12] T. Ozawa *Non-existence of wave operators for Stark-effect Hamiltonians*, Math. Z. **207** (1991), 335-339.
- [13] B. Simon, *Phase space analysis of simple scattering systems: Extensions of some work of Enss*, Duke Math. J. **46** (1979), 119-168.
- [14] K. Veselić and J. Weidmann, *Potential scattering in a homogeneous electrostatic field*, Math. Z. **156** (1977), 93-104.
- [15] D.A.W. White, *The Stark effect and long range scattering in two Hilbert spaces*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 517-546.
- [16] D.A.W. White, *On the long range scattering for Stark Hamiltonians*, Duke Math. J. **68** (1992), 83-100.
- [17] K. Yajima, *Spectral and scattering theory for Schrödinger operators with Stark effect*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **26** (1979), 377-390.
- [18] K. Yajima, *Spectral and scattering theory for Schrödinger operators with Stark effect II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **28** (1981), 1-15.