数理解析研究所講究録
第 873 巻 1994 年 188-195

THE ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN TWO UNBOUNDED MEDIA

門脇光輝 (筑波大 数)
MITSUTERU KADOWAKI

1 Introduction.

2つの非有界な媒質中での音響波動伝播問題に関する極限吸収の原理と固有値の非存在 (Theorem 1) を示しその応用として極限振幅の原理 (Theorem 3) を示す。考える媒質の状態は錐を摂動した界面により二つに分けられているものとする。伝播速度は界面で不連続な関数を考えるが媒質の密度は 1 とする。

$n \geq 2, x=(y,z) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ とするときここでの波動伝播を記述する方程式は

$$\partial_t^2 u(t,x) - a(x)^2 \Delta u(t,x) = 0 \quad (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$$

(ただし $a(x)$ は伝播速度とする) となる。
また，極限振幅の原理を考えるときは $n \geq 3$ で次の Cauchy 問題を扱う。

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - a(x)^2 \Delta u(t,x) = exp(-it\sqrt{\omega}) f(x) & (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0, \end{cases}$$

ただし $\omega > 0$ とする。

次の条件を満たす $\varphi(y) \in C^1(\mathbf{R}^{n-1} \backslash 0)$ が界面を記述するとする。

$\varphi_0(y) = b|y| (b \geq 0)$ とある $\theta > 0$ に対して

$$\text{(A.1)} \qquad \sum_{|\alpha| \leq 1} |y|^{|\alpha|} |\partial^\alpha (\varphi(y) - \varphi_0(y))| = O(|y|^{-\theta}) \quad (|y| \longrightarrow \infty),$$

$$\text{(A.2)} \qquad \sum_{|\alpha| \leq 1} |y|^{|\alpha|} |\partial^\alpha \varphi(y)| = O(|y|^{-\sigma}) \quad (|y| \longrightarrow 0)$$

ただし $0 < \sigma < 1/2$ とする。またこの $\varphi(y)$ を用いて

$$\Omega_+ = \{x=(y,z) : z > \varphi(y)\}, \quad \Omega_- = \{x=(y,z) : z < \varphi(y)\},$$

$$S = \{x = (y, z) : z = \varphi(y)\}$$

とおく。伝播速度 $a(x)$ については次の条件を満たすとする。ある $c > 1$ について

$$\text{(A.3)} \qquad 1/c < a(x) < c$$

そして $a_\pm > 0, a_L^\pm(x) \in \mathbf{B}^1(\Omega_\pm), a_S(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ が存在して次のように $a(x)$ が分解できる

$$\text{(A.4)} \qquad \begin{cases} a(x) & = a_\pm + a_L^\pm(x) + a_S(x) \quad (x \in \Omega_\pm), \\ \sum_{|\alpha|\le 1} |x|^{|\alpha|} & |\partial^\alpha a_L^\pm(x)| = O(|x|^{-\theta}) \quad (|x| \longrightarrow \infty, x \in \Omega_\pm), \\ a_S(x) & = O(|x|^{-\theta-1}) \quad (|x| \longrightarrow \infty) \end{cases}$$

この種の問題の代表的な仕事として Eidus [2] がある。そこでは $n \ge 3$ に対して次のような界面を持つ音響波動問題に対して極限吸収及び極限振幅の原理を示している。$x \in S$ における単位法線ベクトルを $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_z)$ とする。ただし $\nu_z > 0$ とする。この ν を用いて

$$\text{(1)} \qquad \nu_z \ge C_1 > 0,$$

$$\text{(2)} \qquad |x \cdot \nu| \le C_2,$$

ただし $C_j > 0, (j = 1, 2)$, は $x \in S$ に無関係。具体例としては

$$\varphi(y) \in C^1(\mathbf{R}^{n-1}), \quad \varphi(y) = \frac{\sin|y|}{|y|} \quad (|y| >> 1)$$

を考えることができる。この 界面 $\varphi(y)$ は (A.1) を満足しないので，ここでは取り扱えない。(1) を満足せず，ここで取り扱える例としては

$$\varphi(y) = |y|^{-\sigma}$$

(ただし $0 < \sigma < 1/2$) がある。

また Eidus は伝播速度として peicewise constant な関数のみを考えているがここではそれの遠距離形の摂動まで考えている。

$(A.1) \sim (A.4)$ の下で $L = -a(x)^2 \Delta, D(L) = H^2(\mathbf{R}^n_x)$ とすると L は Hilbert 空間 $\mathfrak{H} = L^2(\mathbf{R}^n; a^{-2}(x)dx)$ で非負自己共役作用素となる。このことより，L は次のようにかける。

各 $\lambda \in [0, +\infty)$ に対して $\mathfrak{H}$ 上の射影作用素 $E(\lambda)$ が存在して

$$L = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$$

となる。この $E(\lambda)$ を用いて (E) の解を記述できる。

ここでの主な結果は次の定理 1 ~ 3 である。

Theorem 1. *(1)* L は固有値を持たない
(2) $\alpha > 1/2$ とする。このとき任意に固定されたコンパクトな区間 $I(\subset \mathbf{R}_+)$ に対してある $C(I,\alpha) > 0$ が存在して，任意の $(\lambda,\kappa) \in I \times (0,1)$ に対して

$$\|R(\lambda \pm i\kappa)\|_{\alpha \to -\alpha} \le C,$$

(3) すべての $\lambda > 0$ と $\alpha > 1/2$ に対して

$$R(\lambda \pm i0) = \lim_{\kappa \downarrow 0} R(\lambda \pm i\kappa),$$

が $\mathbf{B}(L^2_\alpha, L^2_{-\alpha})$ の作用素ノルムの意味で成立し，$R(\lambda \pm i0)$ の局所 *Hölder* 連続性も成立する。
ただし $R(\lambda \pm i\kappa) = (L - \lambda \mp i\kappa)^{-1}$, $L^2_\alpha = \{u \in L^2_{loc} :< x >^\alpha u \in L^2\}$, $\|\cdot\|_{\alpha \to \beta}$ は $\mathbf{B}(L^2_\alpha, L^2_\beta)$ の作用素ノルムとする。

Theorem 2. $\alpha > 1$, $\beta > 1/2$, $n \ge 3$ とする。このときある $d, 0 < d < 1/2$, が存在して

$$\|R(\lambda \pm i0)\|_{\beta \to -\alpha} = O(\lambda^{-d}), \quad (\lambda \to 0)$$

が成立する。

次の Theorem 3 は Theorem 1,2 をもちいて，Eidus[1] 従えば得られる。

Theorem 3. $\alpha > 1, \beta > 1/2, f \in L^2_\beta, n \ge 3$ とすると，(E) の解 $u(t,x)$ は $t \to +\infty$ のとき $L^2_{-\alpha}$ において

$$u = exp(-it\sqrt{\omega})R(\omega + i0)f + o(1), \quad (t \to +\infty)$$

のように挙動する。

ここでの中心は Theorem 1 と Theorem 2 の証明となる。それは Mourre の正値交換子法 Mourre[5] による。この方法は Schrödinger 作用素などの微分作用素の連続スペクトルと固有値の性質を調べることに有効である。

2 Proof of Theorem 1.

全体をとして $1 = a_-^{-2} < a_+^{-2}$ の場合のみを扱う。証明は

$$R(\lambda \pm i\kappa) = (H(\lambda) - \lambda \mp i\kappa a(x)^{-2})^{-1} a(x)^{-2} \tag{2.1}$$

(ただし $H(\lambda) = -\Delta - \lambda(a(x)^{-2} - 1), D(H(\lambda)) = H^2(\mathbf{R}^n)$) と変形して、$L^2(\mathbf{R}^n)$ 上で解析を行う。そして $(H(\lambda) - \lambda \mp i\kappa a(x)^{-2})^{-1}$ について定理 1 を示す。主な作業は $H(\lambda)$ に対して

$$A = \frac{1}{2i}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)$$

なる作用素との交換子 $i[H(\lambda), A]$ を $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上で次のように定義する。

$$\begin{aligned} &< i[H(\lambda), A]u, v > \\ &= i(< Au, H(\lambda)v > - < H(\lambda)u, Av >). \end{aligned}$$

For $u, v \in H^2(\mathbf{R}^n) \cap D(A)$
この交換子を中心に部分積分により計算することである。このとき $a(x)$ の不連続性より S に関する積分があらわれる。この積分の評価は次の補題を用いて行なう

Lemma 2.1. $s > 1/2$ とする。このとき $u \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$ *(Schwartz space)* に対して

$$(T_\varphi u)(y) = u(y, \varphi(y))$$

とすると T_φ は $H^s(\mathbf{R}^n)$ から $L^2(\mathbf{R}^{n-1}))$ への有界作用素に拡張できる。

証明は

$$u(y,\varphi(y)) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi(y)\cdot\zeta}(\mathfrak{F}_z u)(y,\zeta)d\zeta$$

(ただし $\xi = (\eta,\zeta) \in \mathbf{R}_\eta^{n-1} \times \mathbf{R}_\zeta = \mathbf{R}_\xi^n$,$\mathfrak{F}_z$ は $\mathbf{R}_z$ の Fourier 変換)。と書けることを用いてされる。
$a(x)^{-2}$ は (A.4) より

$$\begin{cases} a^{-2}(x) = E_L^{\pm}(x) + E_S(x)(x \in \Omega_\pm) \\ \sum\limits_{|\alpha|\le 1} |x|^{|\alpha|}|\partial^\alpha(E_L^{\pm}(x) - a_\pm^{-2})| = O(|x|^{-\theta}) \quad (|x| \longrightarrow \infty, x \in \Omega_\pm) \\ E_S(x) = O(|x|^{-1-\theta}) \quad (|x| \longrightarrow \infty) \end{cases}$$

と分解できる。これを用いて次の補題を示すことができる。

Lemma 2.2. $H^2(\mathbf{R}^n) \cap D(A)$ 上で定義される 交換子 $i[H(\lambda), A]$ は $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素に拡張できる。

証明は次のように行なう。部分積分により

$$\begin{aligned} (2.2) \qquad & < i[H(\lambda), A]u, u > \\ &= 2 < \nabla u, \nabla u > + \lambda < (x \cdot \nabla E_L)u, u > \\ &- \lambda \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (y \cdot \nabla_y \varphi(y) - \varphi(y))(E_L^{+0} - E_L^{-0})|u(y,\varphi(y))|^2 dy \\ &- n\lambda < E_S u, u > - \lambda < E_S u, x \cdot \nabla u > - \lambda < x \cdot \nabla u, E_S u > \end{aligned}$$

(ただし $E_L^{\pm 0} = E_L^{\pm}(y,\varphi(y)), (x \cdot \nabla E_L) = x \cdot \nabla E_L^{\pm}(x \in \Omega_\pm)$)
となる。特にここでは第 3 項のみ扱う (他の項については簡単なので省略する)。任意の $r > 0$ に対して第 3 項を

$$\begin{aligned} (2.3) \qquad & \lambda \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (y \cdot \nabla_y \varphi - \varphi)(E_L^{+0} - E_L^{-0})|u(y,\varphi(y))|^2 dy \\ &= \lambda(< T_\varphi^*(\chi_{|y|<r}(y \cdot \nabla_y \varphi - \varphi)(E_L^{+0} - E_L^{-0}))T_\varphi u, u > \\ &+ < T_\varphi^*(\chi_{|y|>r}(y \cdot \nabla_y \varphi - \varphi)(E_L^{+0} - E_L^{-0}))T_\varphi u, u >) \end{aligned}$$

と分解する。このとき作用素 R_φ^r を

$$R_\varphi^r u = \chi_{|y|<r}(y)(y \cdot \nabla_y \varphi(y) - \varphi(y))^{1/2} T_\varphi u$$

と定義すると $\varphi(y)$ の $y=0$ での特異性（A.2）の影響もあらわれる。これに対しては Lemma 2.1 に注意して Hölder の不等式と Sobolev の埋蔵定理を用いた評価を行なうことにより R^r_φ は $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $L^2(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素になることがわかる。だから $(R^r_\varphi)^* R^r_\varphi$ は $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素になる。再び Lemma 2.1 により $T^*_\varphi(\chi_{|y|>r}(y\cdot\nabla_y\varphi-\varphi)(E_L^{+0}-E_L^{-0}))T_\varphi$ は $H^s(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素になる。故に（2．1）の右辺の第3項による作用素は $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素になる。次の Lemma が Theorem 1 の証明の中心的な役割をする。

Lemma 2.3. $\lambda_0>0$, $0<\delta<min(1,\lambda_0/4)$ について $f_\delta(p)\in C_0^\infty(\mathbf{R})(0\le f_\delta\le 1, f_\delta, suppf_\delta\subset(\lambda_0-3\delta,\lambda_0+3\delta), f_\delta=1\ on\ [\lambda_0-2\delta,\lambda+2\delta]$) このときある $\alpha>0$ と L^2 上のコンパクト作用素 $K(\lambda)$ 存在して form の意味で

$$\begin{aligned}&f_\delta(H(\lambda))i[H(\lambda),A]f_\delta(H(\lambda))\\&\ge\alpha f_\delta(H(\lambda))^2+f_\delta(H(\lambda))K(\lambda)f_\delta(H(\lambda))\end{aligned}$$

$for\ \lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$

証明は（2．2）の u を $f_\delta(H(\lambda))u$ に変更し、（2．3）において r を充分小さくとり（A.1）と（A.4）に注意した議論を行なう（（A.1）、（A.4）からコンパクト作用素の存在がわかる）。

Lemma 2.2 と 2.3 を用いて Theorem 1(1) が最初にわかる。

$Lu=\lambda_0 u(\lambda_0>0), u\in H^2(\mathbf{R}^n)$ とすると $H(\lambda_0)u=\lambda_0 u$ とかきなおせるので Froese and Herbst [3] に従えば

$$exp(\alpha<x>)u\in L^2\quad(\forall\alpha\ge 0)$$

を得る。さらに、Appendix I of Tamura [6] に従えば $u=0$ がわかる。

次に Theorem 1(2),(3) を考える。Lemma 2.3 について Theorem 1(1) を用いると $K(\lambda)$ のコンパクト性より form の意味で

$$f_\delta(H(\lambda))i[H(\lambda),A]f_\delta(H(\lambda))\ge(\alpha/2)f_\delta(H(\lambda))^2 \tag{2.4}$$

となる。

Tamura[6] に従い次のような関数を考える $\chi_n(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)(supp\chi_n(x)\subset\{x\in\mathbf{R}^n;|x|<2\}, \chi_n=1\ \text{for}\ |x|\le 1$)。この関数と充分小さな $\epsilon>0$ に対して $E_{L,\epsilon}(x), E_{S,\epsilon}(x)$ と $V^r_\epsilon(y)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}E_{L,\epsilon}(x)&=E_0(x)+\chi_n(\epsilon x)(E_L(x)-E_0(x)),\\E_{S,\epsilon}(x)&=\chi_n(\epsilon x)E_S(x),\\V^r_\epsilon(y)&=\chi_{|y|>r}(y)\chi_{n-1}(\epsilon y)(y\cdot\nabla_y\varphi(y)-\varphi(y)).\end{aligned}$$

（ただし $E_0(x)=a_\pm(x\in\Omega_\pm)$ ）さらに作用素 $B(\epsilon;\lambda)$ を次のように定義する

$$\begin{aligned}&B(\epsilon;\lambda)\\&=-2\Delta+\lambda((x\cdot\nabla E_{L,\epsilon})-nE_{S,\epsilon}+\nabla^*\cdot xE_{S,\epsilon}-E_{s,\epsilon}x\cdot\nabla\\&\quad-T^*_\varphi V^r_\epsilon(y)(E_L^+-E_L^-)T_\varphi-(R^r_\varphi)^*(E_L^+-E_L^-)R^r_\varphi).\end{aligned}$$

Lemma 2.2 の証明に注意すると $B(\epsilon;\lambda)$ は $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素となることがわかる。

Lemma 2.4. $M(\epsilon;\lambda)=f_\delta(H(\lambda))B(\epsilon;\lambda)f_\delta(H(\lambda))$. とすると $D(A)$ 上で定義される *form* $[M(\epsilon;\lambda),A]$ は L^2 上の有界作用素に拡張される

証明は

$$
\begin{aligned}
&[M(\epsilon;\lambda),A]\\
&=f_\delta[B(\epsilon;\lambda),A]f_\delta+f_\delta B(\epsilon;\lambda)[f_\delta,A]+[f_\delta,A]B(\epsilon;\lambda)f_\delta
\end{aligned}
$$

とかき右辺の各項について考える。Lemma 2.2 の証明と同様の方法により $[B(\epsilon;\lambda),A]$ が $H^2(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-2}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素となることがわかる。さらに Lemma 2.2 より $[f_\delta,A]$ が $\mathbf{B}(L^2,H^1),\mathbf{B}(H^{-1},L^2)$ に属する作用素に拡張されることがわかるので Lemma が示すことができる。
簡単な計算により次の Lemma も成立する。

Lemma 2.5. $\lambda_0-\delta<\lambda<\lambda_0+\delta, 0<\epsilon<1$. とする。このとき λ,ϵ に無関係な $C>0$ 存在して

(i) $\|(-\Delta+1)^{-1/2}(B(\lambda)-B(\epsilon;\lambda))(-\Delta+1)^{-1/2}\|\le C\epsilon^\theta,$

(ii) $\|(-\Delta+1)^{-1/2}(d/d\epsilon)B(\epsilon;\lambda)(-\Delta+1)^{-1/2}\|\le C\epsilon^{\theta-1},$

(iii) $\|(-\Delta+1)^{-1}[B(\epsilon;\lambda),A](-\Delta+1)^{-1}\|\le C\epsilon^{\theta-1},$

(iv) $\|[M(\epsilon;\lambda),A]\|\le C\epsilon^{\theta-1}.$

(ただし $B(\lambda)=[H(\lambda),A]$)

(2．4) と Lemma 2.5 に注意して Tamura[6], Kikuchi and Tamura[4] に従えば Theorem 1(2),(3) が得られる。

3 Proof of Theorem 2.

(2.1) の分解より

$$\|(H_1(\lambda)-\lambda\mp i\kappa a^{-2}(x))^{-1}\|_{\beta\to-\alpha}=O(1),\quad(\lambda\to 0), \tag{3.1}$$

を示せばよい。この証明は $\lambda\to 0$ についての議論なので (2．4) タイプの不等式を得るためには Lemma 2.3 においてコンパクト性を用いた論法は出来ない。このために (A.4) より充分小さい $\delta_0>0$ について

$$
\begin{cases}
a^{-2}(x=)E_1^\pm(x)+E_2(x)(x\in\Omega_\pm)\\
\sum_{|\alpha|\le1}|x|^{|\alpha|}|\partial_x^\alpha(E_1^\pm(x)-a_\pm^{-2})|=O(|x|^{-\theta})\quad(|x|\to\infty,x\in\Omega_\pm)\\
E_2(x)=O(|x|^{-1-\theta})\quad(|x|\to\infty)\\
\sum_{|\alpha|\le1}<x>^{|\alpha|}|\partial_x^\alpha(E_1^\pm(x)-a_\pm^{-2})|\le\delta_0\quad(x\in\Omega_\pm)
\end{cases}
$$

なる分解を行い、次の Lemma 3.1 を示せば Tamura[6] の補間を考えることにより (3．1) を得る。

Lemma 3.1. $H_1(\lambda) = -\Delta - \lambda(E_1(x) - 1)$, $\alpha > 1$ とする。このとき

$$\|(H_1(\lambda) - \lambda \mp i\kappa a^{-2}(x))^{-1}\|_{\alpha \to -\alpha} = O(1), \quad (\lambda \to 0)$$

充分小さな $\kappa > 0$ について一様
(ただし $E_1(x) = E_1^{\pm}(x)(x \in \Omega_{\pm})$)。

この Lemma の証明は $0 < \lambda << 1$ に関する一様性に注意して Theorem 1(2),(3) の証明と同じように行なわれる。ただし幾つかの変更点があるのでそれをのべる。Lemma 2.2 おいて $H(\lambda) \to H_1(\lambda)$ と変更した Lemma が成立する。また Lemma 2.3 に対応する Lemma として次を考える。

Lemma 3.2. $0 < \lambda << 1$ して、$f_\lambda(p) \in C_0^\infty(\mathbf{R})(0 \le f_\lambda \le 1, suppf_\lambda \subset (\lambda/3, 3\lambda), f_\lambda = 1$ on $[\lambda/2, 2\lambda]$)をとる。このとき λ に無関係な $C > 0$ が存在して

$$f_\lambda(H_1(\lambda))i[H_1(\lambda), A]f_\lambda(H_1(\lambda)) \ge C\lambda f_\lambda(H_1(\lambda))^2$$

が *form* の意味で成立する。

これは $0 < \delta_0 << 1$ であることと次の簡単な等式からわかる

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |T_\varphi u|^2 dy = \mp 2Re \int_{\Omega_\pm} u\overline{\partial_z u} dx$$

最後に Lemma 2.4, 2.5 における変更を述べる。その前にある関数と作用素を定義する。この節の $a(x)^{-2}$ の分解から

$$E_{1,\epsilon}(x) = E_0(x) + \chi_n(\epsilon x)(E_1(x) - E_0(x)),$$

(ただし $E_1(x) = E_1^{\pm}(x)(x \in \Omega_\pm), \epsilon > 0$ は充分小さいとする)。さらに

$$\begin{aligned} B_1(\epsilon; \lambda) = -2\Delta + \lambda(F_{1,\epsilon} - T_\varphi^*(E_1^{+0} - E_1^{-0})V_\epsilon^r(y)T_\varphi \\ - (R_\varphi^r)^*(E_1^{+0} - E_1^{-0})R_\varphi^r) \end{aligned}$$

(ただし $F_{1,\epsilon} = x \cdot \nabla E_{1,\epsilon}(x)(x \in \Omega_\pm)$)。
このとき Lemma 2.4, 2.5 において, $B(\epsilon; \lambda) \to B_1(\epsilon; \lambda), H(\lambda) \to H_1(\lambda)$ と変更した補題が成立する。これらの Lemma と Lemma 3.2 を用いてここでも Tamura[6] と Kikuchi and Tamura[4] に従うと Lemma 3.1 を得る。 尚、 Theorem 2 が $n \ge 3$ となるのは Lemma 3.1 の証明で $n = 2$ では成立しない不等式

$$\int_{\mathbf{R}^n} < x >^{-2} |u(x)|^2 dx \le C \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

を用いるからである。

門脇光輝 MITSUTERU KADOWAKI

References

1. Eidus. D, *The principle of limiting amplitude*, Russ. Math. Surv **24** (1969), 97-167.
2. ——, *The limiting absorption and amplitude principle for the diffraction problem with two unbounded media*, Comm. Math. Phys **107** (1986), 27–38.
3. Froese. R and Herbst. I, *Exponential bounds and absence of positive eigenvalues for N-body Schrödinger operator*, Comm. Math. Phys **87** (1982), 429–447.
4. Kikuchi. K and Tamura. H, *Limiting amplitude principle for acoustic propagators in perturbed stratified fluids*, J. Defferential Equations **93** (1991), 260–282.
5. Mourre. E, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*, Comm. Math. Phys **78** (1981), 391–408.
6. Tamura. H, *Resolvent estimates at low frequencies and limiting amplitude principle for acoustic propagator*, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), 549–575.