数理解析研究所講究録
第877巻 1994年 52-61

The subring of universally stable elements in a cohomology ring

東北工大　小川淑人　(Yoshito Ogawa)

Abstract. The object of this note is to find a Noether normalization for a mod-p cohomology ring of a finite group. In 1961 Evens showed that a cohomology ring of a finite group is finitely generated. In 1971 Quillen proved that its Krull dimension is equal to the maximal rank of elementary abelian subgroups. The question is whether there exists a canonical Noether normalization for a cohomology ring. In 1989 Evens and Priddy introduced the subring of universally stable elements for a cohomology ring. The main theorem of this note, which deals with an extraspecial 2-group, states that the subring of universally stable elements coinsides with the invariant subring of the commutator subgroup of an orthogonal group and that the latter is very close to a polynomial ring. Thus it may be concluded that the subring of universally stable elements is all but a Noether normalization for a cohomology ring. In addition, the meaning of "stable" can be clarified, which has been unclear for a long time except when a Sylow subgroup is normal. Namely, "universally stable" turns out to be "invariant" by considering an automorphism group.

The detailed version of this note is to appear elsewhere.

§1 序

本稿の目的は有限群のcohomology環の正規化について論ずることである。1961年にEvens [3]は有限群のcohomology環の有限生成性を示し，続いて1971年にQuillen[14]はそのKrull次元が基本可換p-部分群の最大階数に等しいことを示した。次に問題となるのはNoetherの正規化である。

問題　有限群のcohomology環のNoetherの正規化を見出せ。

標準的な正規化は存在しないだろうと長い間思われていたが，1989年になってその候補としてEvens-Priddyのuniversally stable elementの環が出現した[4]。cohomology環における新概念の試金石としては，Quillen[13]以来(可換群に近いという意味で)extraspecial群が用いられるのが常である。そこで我々はextraspecial群を扱い，吉田理論を用いてuniversally stable elementの環が直交群の交換子群の不変部分環になることを示した[11]。これに加えて本稿ではこの不変部分環が多項式環に極めて近いことを述べる。この結果universally stable elementの環はNoetherの正規化にあたるものであると結論できる。

§2 universally stable elementの環

Gを有限群，PをGのSylow 2-部分群とする。（以下2が任意の素数pで置き換えられる部分も多いが，本稿ではp=2に限定する。）kは2元体を表す。Gのmod-2 cohomology環を次のように書く：

$$H^*(G)=\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(G,k) .$$

このとき

$$\mathrm{Im}(\mathrm{res}: H^*(G)\to H^*(P)) = \{\text{the stable elements of } H^*(P)\}$$

であることはよく知られている[1]。$P \triangleleft G$のとき右辺は$H^*(P)^G$と書き換えられるが一般の場合のstableの意味は長い間不明であった。ところがAut(P)まで込めて考えるとPが可換群に近いときは固定を意味することが以下の議論で示される。

定義（Evens-Priddy [4]）．$H^*(P)$におけるuniversally stable elementの環を次のように定める；

$$I(P) = \bigcap_G \mathrm{Im}\,(\mathrm{res} : H^*(G) \to H^*(P)),$$

ここでGはPをSylow 2-部分群に持つすべての有限群を動く。

彼等は$H^*(P)$が有限生成$I(P)$-加群なこと及び$\bigcap$が有限個で間に合うことを述べている。

§3 almost extraspecial 群

Quillen[13]に従ってextraspecial群よりも少し広いクラスの群を扱うが，いずれも正規部分群が多いという意味で可換群に極めて近いものである。

定義（Kahn [8]）. almost extraspecial群Pとは位数2の巡回群との基本可換2-群Vによる拡大のことである。又$O^2(\mathrm{Out}(P))$は$\mathrm{Out}(P)$の奇数位数の元で生成される部分群を表す。(表1)。

定理（小川[11]及び[12]）. Pがalmost extraspecial群ならば，

$$I(P) = H^*(P)^{O^2(\mathrm{Out}(P))}.$$

但しPがD_8と基本可換2-群の直積のときを除く。更に$P = D_8^{n-1}Q_8$ならば$I(P)/\sqrt{0}$は多項式環である。

このようにextraspecial群に対して$I(P)$が自己同型群の不変部分環となり，ある場合には巾零根基を法として多項式環になっていることからEvens-Priddyのuniversally stable elementの環はcohomology環の標準的な部分環であると主張できる。

注意　Q_8とD_8は指標表が同一でよく比較されるが，Q_8のすべての部分群が正規であるのに対し，D_8は4個の指数4の正規でない部分群を持つ点で異なる。D_8を準同型像に持たなければうまくいくというのが吉田理論である[20]。

表1　almost extraspecial 群の例

P	$O^2(\mathrm{Out}(P))$ 3)
rank $n+1$の基本可換2-群	$GL_{n+1}(2) \cong A_n(2)$
Hamiltonian 2-群 1)	——
D_8^n 2)	$\Omega_{2n}^{+}(2) \cong D_n(2)$
$D_8^n C_4$	$Sp_{2n}(2) \cong B_n(2) \cong C_n(2)$
$D_8^{n-1} Q_8$ 2)	$\Omega_{2n}^{-}(2) \cong {}^2D_n(2)$

1) これは位数8の四元数群Q_8と基本可換2-群の直積であり，すべての部分群が正規である[7]。

2) D_8は位数8の二面体群でありこの2つがextraspecial群である[7]。間のC_4は位数4の巡回群である。

3) 古典群については[2] $\mathrm{Aut}(P)$については[7, 5]を参照のこと。

§4 証明

前半の自己同型群の不変部分環になるという所には，吉田-佐々木の移送定理（[21]及び[15]）を用いる。これは有限群 G が P を Sylow 2-部分群に持つとき，ある条件のもとで

$$H^*(G) \cong H^*(N_G(P))$$

を主張するものである。移送定理は P が可換のときは成立し，Swan の定理（[18]）として古くから知られていた。P が almost extraspecial 群でありかつ D_8 と基本可換 2-群の直積でないときも移送定理は成立ち，その結果 $H^*(P)$ の部分環の集合について次のことが簡単に示されて前半の証明が終わる：

$$\{H^*(P)^C \mid C \text{ は } Out(P) \text{ の奇数位数の部分群を動く}\}$$
$$= \{H^*(G) \mid G \text{ は } P \text{ を Sylow 2-部分群に持つすべての有限群を動く}\}.$$

例外の場合 $Out(P)$ の任意の部分群に対して $I(P)$ は $H^*(P)$ の不変部分環ではない。

後半では自己同型群による不変部分環を決定するために

Quillenの方法[13]を用いる： $P = D_8^{n-1} Q_8$ のとき

$$\mathrm{res} : H^*(P) \to \bigoplus_Q H^*(Q)$$

が単射となるようなPの部分群Qの族(detecting family)を選ぶ。これはBrauerの貼り合せの原理（指標の特徴付け）の類似である[14]。実は

$$\bigoplus_Q H^*(Q) \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(P)}(Q)}^{\mathrm{Aut}(P)} (H^*(Q))$$

であり，右辺は加群の誘導表現にあたるもので環構造を兼ね備えている（Taylor [19]）。ここで

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(P)}(Q) = \{ \sigma \in \mathrm{Aut}(P) \mid \sigma(Q) = Q \}$$

である。更にresがAut(P)の作用と両立することも容易にわかる。このとき

$$\left(\bigoplus_Q H^*(Q)\right)^{\mathrm{Aut}(P)} \cong H^*(Q)^{\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(P)}(Q)}$$

であるが，Qが小さいので右辺が計算でき，$I(P)/\sqrt{0}$ が多項

式環であることがわかる。Pは可換群に近いために1次でない既約実表現を1つだけ持っており，そのStiefel-Whitney類（例えば[6]を参照のこと）が$I(P)/\sqrt{0}$の生成元である。

§5　問題

これからの問題を簡単に紹介する。

1. Stanley[17]のような不変式論をcohomology環で展開せよ。

普通の不変式論では多項式環から始めてその部分環としてCohen-Macaulay環が出てくるが，cohomology環の場合完交環の不変部分環が多項式環になる例がある（Quillen[13]）。上述の定理もその現れである。

2. 有限2群Pを固定するときPをSylow 2-部分群に持つ有限群をGとすると，$H^*(G)$は$H^*(P)$の部分環として有限個しかない（Evens-Priddy [4]）。そこで$H^*(P)$の部分環として$H^*(G)$をすべて求めよ。又$I(P)$を決定せよ。

PがD_{2^n} $(n\geqq 2)$，Q_{2^n} $(n\geqq 3)$，SD_{2^n} $(n\geqq 4)$のときは$H^*(G)$の分類がMartino-Priddy[9]に，$I(P)$がEvens-Priddy [4]に記述されている。奇素数pに対しては，Pが基本可換p-群のとき$I(P)$がMui [10]，Pがmetacyclic p-群のとき$H^*(G)$の分類及び$I(P)$が佐々木[16]からわかる。

References

[1] H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra", Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[2] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, "ATLAS of Finite Groups", Clarendon Press, Oxford, 1985.

[3] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 224-239.

[4] L. Evens and S. Priddy, The ring of universally stable elements, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) 40 (1989), 399-407.

[5] R. L. Griess, Jr., Automorphisms of extra special groups and nonvanishing degree 2 cohomology, Pacific J. Math. 48 (1973), 403-422.

[6] J. Gunarwardena, B. Kahn and C. Thomas, Stiefel-Whitney classes of real representations of finite groups, J. Algebra 126 (1989), 327-347.

[7] B. Huppert, "Endliche Gruppen I", Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[8] B. Kahn, The total Stiefel-Whitney class of a regular representation, J. Algebra 144 (1991), 214-247.

[9] J. Martino and S. Priddy, Classification of BG for groups with dihedral or quaternion Sylow 2-subgroups, J. Pure Appl. Algebra 73 (1991), 13-21.

[10] H. Mui, Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), 319-369.

[11] Y. Ogawa, On the subring of universally stable elements in a mod-2 cohomology ring, Tokyo J. Math. 15 (1992), 91-97.

[12] Y. Ogawa, On a Noether normalization for a mod-2 cohomology ring, preprint (1993).

[13] D. Quillen, The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups, Math. Ann. 194 (1971), 197-212.

[14] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring: I, Ann. of Math. (2) 94 (1971), 549-572.

[15] H. Sasaki, On a transfer theorem for Schur multipliers, Hokkaido Math. J. 8 (1979), 228-238.

[16] H. Sasaki, The mod p cohomology algebra of a finite group with metacyclic Sylow p-subgroup (in this volume).

[17] R. P. Stanley, Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 1 (1979), 475-511.

[18] R. G. Swan, The p-period of a finite group, Illinois J. Math. 4 (1960), 341-346.

[19] M. J. Taylor, A logarithmic approach to class groups of integral group rings, J. Algebra 66 (1980), 321-353.

[20] T. Yoshida, Character-Theoretic transfer, J. Algebra 52 (1978), 1-38.

[21] T. Yoshida, On G-functors (I): transfer theorems for cohomological G-functors, Hokkaido Math. J. 9 (1980), 222-257.