

On stable equivalences  
Stable Equivalences ついて

埼玉大学 教育学部  
若松 隆義  
(Takayoshi Wakamatsu)

Abstract

In the previous paper [18], we gave a construction of stable equivalences between suitable symmetric algebras which are not of the form of trivial extension algebras generally. In this note, by showing our proof of the theorem given by Gabriel and Riedtmann [6], we explain how such a construction of stable equivalent functors can be used in the modular representation theory of finite groups.

対称多元環の間の stable equivalences の 1 つの構成法を与え、群環の場合にどのように適用できるのかを説明したい。特に、Gabriel-Riedtmann [6] による結果：有限表現型のブロックイデアルが一般単列環に stably equivalent になることをこの立場から証明できることを示したい。

## 1 対称多元環

[15] において自明拡大多元環の間に、傾斜加群を用いて stable equivalence を構成することができたのは、自明拡大多元環上の加群をもとの多元環上の加群を用いてある程度詳しく知ることができたからであろう。これを任意の対称多元環に一般化するためには、同様に、対称多元環のある程度の構造を記述し、その上の加群を小さい多元環上の加群のシステムとして表しておかなければならない。

$\Lambda$  を対称多元環とする。簡単のため basic としておく。 $J(\Lambda)$  で  $\Lambda$  の Jacobson 根基を表せば、 $\Lambda = A \oplus J(\Lambda)$  となる部分多元環  $A$  を選ぶことができる。 $A$  は実際には、巾等元で生成される部分環で体の直積としておいてよい。 $S$  で  $\Lambda$  の socle を表せば、 $J(\Lambda) = M \oplus S$  となる空間  $M$  が存在する。これらは全て  $A$ -加群となるようにできる。単に  $A$ -加群としては、 $S \cong D(A)$  であり、 $\Lambda$  の積から導かれる写像

$$\varphi: M \times M \rightarrow M, \psi: M \times M \rightarrow S$$

はそれぞれ、

$$\varphi: {}_A M \otimes_A M_A \rightarrow {}_A M_A, \psi: {}_A M \otimes_A M_A \rightarrow {}_A D(A)_A$$

という  $A$ -写像と見られる。これを,  $\Lambda$  が  $(A, {}_A M_A, \varphi, \psi)$  から構成されていると見ることにすれば, 対称多元環の 1 つの構成法が得られたことになる。  $(A, {}_A M_A, \varphi, \psi)$  から  $\Lambda = A \oplus M \oplus D(A)$  で対称多元環が定義されるための条件を詳しく述べておけば次の 5 条件になる。

- (1)  $\varphi$  は associative, 即ち,  $\varphi(\varphi(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3) = \varphi(m_1 \otimes \varphi(m_2 \otimes m_3))$ ;
- (2)  $\psi$  は  $\varphi$ -associative, 即ち,  $\psi(\varphi(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3) = \psi(m_1 \otimes \varphi(m_2 \otimes m_3))$ ;
- (3)  $\varphi$  は nilpotent, 即ち,  $\varphi$  を  $M$  の積と考えて  $M$  が巾零の環になる;
- (4)  $\psi$  は non-degenerate, 即ち,  $\psi(m \otimes M) = 0$  または  $\psi(M \otimes m) = 0$  ならば  $m = 0$ ;
- (5)  $\psi(m_1 \otimes m_2)(1) = \psi(m_2 \otimes m_1)(1)$ .

上の 5 条件さえ満足されておれば  $A$  は任意の多元環でよく semi-simple であることは必要ない。また一般に,  $\Lambda$  をこのように表示するのにシステム  $(A, {}_A M_A, \varphi, \psi)$  の選び方は無数にある。5 条件の意味は, (1),(2) は  $\Lambda$  に積が定義されて多元環になること, (3) は Jacobson 根基への条件  $J(\Lambda) = M \oplus D(A)$ , (4),(5) は  $\Lambda$  が自己移入的であってかつ対称多元環となるためのものである。具体的には, 同型  $\chi: {}_A M_A \xrightarrow{\sim} {}_A D(M)_A$  が存在して  $\chi(m_1)(m_2) = \chi(m_2)(m_1)$  となるための条件である。

次に,  $\Lambda = A \oplus M \oplus D(A)$  の上の加群を  $A$  の上の加群のシステムとして記述しておく。  $X_\Lambda$  とする。  $A$  は  $\Lambda$  の部分環であるから,  $X_A$  と自然に見られる。また,  $\Lambda$  の  $X$  への作用から写像

$$\alpha: X \times M \rightarrow X, \beta: X \times D(A) \rightarrow X$$

が定まるが, これらは

$$\alpha: X \otimes_A M_A \rightarrow X_A, \beta: X \otimes_A D(A)_A \rightarrow X_A$$

と見られ次の 4 条件を満たす。

- (6)  $\alpha \cdot (\beta \otimes M) = 0$ ;
- (7)  $\beta \cdot (\alpha \otimes D(A)) = 0$ ;
- (8)  $\beta \cdot (\beta \otimes D(A)) = 0$ ;
- (9)  $\alpha \cdot (\alpha \otimes M) = \alpha \cdot (X \otimes \varphi) + \beta \cdot (X \otimes \psi)$ .

逆に,  $(X_A, \alpha, \beta)$  が与えられて上記の 4 条件を満足するとき,

$$x \cdot (a, m, s) = x \cdot a + \alpha(x \otimes m) + \beta(x \otimes s)$$

によって  $(a, m, s) \in \Lambda$  の作用を与えることで  $\Lambda$ -加群が定義できる。従って,  $\Lambda$ -加群とは上の 4 条件を満たすシステム  $(X_A, \alpha, \beta)$  であると言ってもよい。勿論, テンサー積と  $Hom$  は随伴性をもつから,

$$\alpha : X_A \rightarrow \text{Hom}_A(M, X)_A, \quad \beta : X_A \rightarrow \text{Hom}_A(D(A), X)_A$$

と見てもよく、テンサー積で考えるか  $\text{Hom}$  で扱うかは適当に都合のよい方を用いることにする。また写像についても同様であって、 $\Lambda$ -写像とはある条件を満たす  $A$ -写像のことであるという言い方ができる。つまり、 $(X_A, \alpha_X, \beta_X), (Y_A, \alpha_Y, \beta_Y)$  を  $\Lambda$ -加群とするとき、 $A$ -写像  $f : X_A \rightarrow Y_A$  で次の2条件を満たすものが  $\Lambda$ -写像である。

$$(10) f \cdot \alpha_X = \alpha_Y \cdot (f \otimes M);$$

$$(11) f \cdot \beta_X = \beta_Y \cdot (f \otimes D(A)).$$

## 2 対称多元環の構成法

以上で対称多元環やその上の加群の一般論は一応分かったものとして、これをもう少し具体的に考えてみる。実際に応用しようとするれば、先の条件 (1)~(5) を満たすような  $({}_A M_A, \varphi, \psi)$  の構成法が必要になるからである。

多項式環  $K[Y] = K[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$  の有限次元の剰余環  $R = K[Y]/I$  で自己移入的なものは対称多元環となっている。ここで、 $I$  は  $K[Y]$  のイデアルである。今、 $V = \text{rad}(R)/\text{soc}(R)$  とおけば  $R$  の積から

$$\varphi_0 : V \otimes V \rightarrow V, \quad \psi_0 : V \otimes V \rightarrow K$$

が定義され、 $(\varphi_0, \psi_0)$  は先に考えた5条件を満たす。次に勝手な  $X_A$  に対して、 $E_X = \text{End}(X_A) \cong {}_A D(X) \otimes X_A$  とおく。 $E_X$  は全行列環であるから対称多元環であるが、 ${}_A V_A^X = V \otimes E_X$  とおけば、 $E_X$  の積と同型  $E_X \xrightarrow{\sim} D(E_X)$  から導かれる non-degenerate な双一次写像  ${}_A (E_X \otimes_A E_X)_A \rightarrow {}_A D(A)_A$  を用いて、自然に  $\varphi : {}_A V_A^X \otimes_A V_A^X \rightarrow {}_A V_A^X$  と  $\psi : {}_A V_A^X \otimes_A V_A^X \rightarrow {}_A D(A)_A$  が定義でき、これも先の5条件を満たしている。

これの単純な例として次のものを考えてみる。 $K[Y]$  を1変数の多項式環で、

$$R = K[Y]/(Y^{n+1})$$

とすれば、 $V = (Y)/(Y^{n+1}) = K \cdot Y \oplus K \cdot Y^2 \oplus \dots \oplus K \cdot Y^n$  は単列的であって、 $M = V^X, \Lambda = A \oplus M \oplus D(A)$  に対して、

$$\Lambda_\Lambda = \left( \begin{array}{c} A_A \\ X_A \\ X_A \\ \vdots \\ X_A \\ D(A)_A \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} A_A \\ X_A \\ X_A \\ \vdots \\ X_A \\ D(A)_A \end{array}} \right\} n$$

となる. もう少し詳しく,  $A$  は basic な多元環,  $e_1, e_2, \dots, e_t$  がその原始的直交巾等元の完全系で  $S_i = e_i A / e_i \text{rad}(A)$ ,  $X_A$  は次のような (各組成因子が1回ずつ現れる) 組成列をもつ単列加群とする:

$$X_A = \begin{pmatrix} S_t \\ \vdots \\ S_2 \\ S_1 \end{pmatrix}.$$

この場合には,

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} e_1 A_A \\ X_A \\ \vdots \\ X_A \\ e_1 D(A)_A \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} e_t A_A \\ X_A \\ \vdots \\ X_A \\ e_t D(A)_A \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e_{t+1} A_A \\ e_{t+1} D(A)_A \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} e_l A_A \\ e_l D(A)_A \end{pmatrix}$$

となる.  $e_1 \Lambda$  から  $e_t \Lambda$  までには  $X_A$  が  $n$  回ずつ現れ, 他の部分は trivial extension の場合のようになっているわけである. これの実際例として exceptional cycle が1つだけの Brauer quiver から作られる多元環  $\Lambda$  を考える. その multiplicity を  $n+1$  としよう. multiplicity を忘れて各 cycle から任意に1本ずつ arrow を取り除いてできる quiver (zero relation もそのまま残す) によってできる多元環を  $A$  とおく.  $A$  は  $A$ -type の iterated tilted algebra であることが知られている. さて,

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow t$$

を考えている Brauer quiver の exceptional cycle から  $t \rightarrow 1$  という arrow を除いてできた部分とすれば,

$$X_A = \begin{pmatrix} S_t \\ \vdots \\ S_2 \\ S_1 \end{pmatrix}$$

を用い, 上に説明した方法で構成された多元環が丁度  $\Lambda$  に一致する.

一般に,  $(M_i, \varphi_i, \psi_i)$  が  $A$  上で定義された先の条件 (1)~(5) を満たすシステムであるとき, 自然にこれらの直和  $\bigoplus (M_i, \varphi_i, \psi_i)$  が定義される. これを用いれば, 上の構成法と併せて, exceptional cycles の個数が何個であっても Brauer quiver で与えられる多元環は説明できる. 勿論, 対称多元環は常に Brauer graph algebra の形をしている訳ではないから, なるべく多くの対称多元環を扱うためには他の具体的な構成法を知る必要がある. このためにも, 群の表現論の人達にブロックイデアルとして具体的にどのような多元環が現れ, クイバーで如何に記述できるのかを教えて戴きたいと願っている.

### 3 傾斜加群

後程 stable functor を構成するのに傾斜加群 (generalized tilting module) を利用するので、そこで用いられる性質をまとめておく。

次の2つの性質をもつ加群  $T_A$  を傾斜加群という：

(T1) 任意の  $i \geq 1$  について  $Ext^i(T_A, T_A) = 0$ ;

(T2) 各  $i = 0, 1, 2, \dots$  について  $T_i \in add(T_A)$  であるような、函手  $Hom(?, T_A)$  を作用させても完全性の保たれる完全列

$$0 \rightarrow A_A \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$$

が存在する。

以下、 $T_A$  は傾斜加群で  $B = End(T_A)$  とする。 ${}_B T$  は再び傾斜加群であって  $End({}_B T) = A$  が成り立つ。さらに、 ${}_A D(T)_B$  も傾斜加群となる。 ${}_B T_A$  に対して  $mod-A, mod-B$  の加群のクラス (それぞれの充満部分圏と考える)  $\mathcal{C}(T_A), \mathcal{D}(D(T)_B) = \mathcal{D}(\mathcal{C}({}_B T))$  が定まり、随伴函手の対  $Hom({}_B T_A, ?), (? \otimes_B T_A)$  によってこれは圏同値となる。Happel-Ringel の意味の傾斜加群とは、上の意味の傾斜加群であって  $pd({}_B T) \leq 1$  かつ  $pd(T_A) \leq 1$  となるものであり、宮下の意味の傾斜加群とはこの制限を  $pd({}_B T), pd(T_A)$  が共に有限と弱めたものである。これらの特殊な傾斜加群については、勝手な加群  $X_A, Y_B$  に対して、

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow X_A \rightarrow V_A \rightarrow W_A \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow K_B \rightarrow U_B \rightarrow Y_B \rightarrow 0 \end{aligned}$$

という完全列で  $V \in \mathcal{C}(T_A), W \in \mathcal{PC}(T_A)$  かつ  $U \in \mathcal{D}(D(T)_B), K \in \mathcal{ID}(D(T)_B)$  となるものが存在する。ここで、加群のクラス  $\mathcal{M}$  に対してクラス  $\mathcal{PM}, \mathcal{IM}$  は次で定義されるものである：

$$\mathcal{PM} = \{P \mid Ext^{i \geq 1}(P, \mathcal{M}) = 0\}, \quad \mathcal{IM} = \{I \mid Ext^{i \geq 1}(\mathcal{M}, I) = 0\}.$$

また包含関係  $\mathcal{PC}(T_A) \subseteq \mathcal{D}(T_A), \mathcal{ID}(T_A) \subseteq \mathcal{C}(T_A)$  および  $\mathcal{IPC}(T_A) = \mathcal{C}(T_A), \mathcal{PID}(T_A) = \mathcal{D}(T_A)$  等が成り立つ。さらに、 $Hom({}_A D(T)_B, ?), (? \otimes_A D(T)_B)$  によって導かれる圏同値  $\mathcal{D}(T_A) \approx \mathcal{C}(D(T)_B)$  を制限して圏同値  $\mathcal{PC}(T_A) \approx \mathcal{ID}(D(T)_B)$  が導かれる。

傾斜加群を扱うときには、各加群に対して上で述べたような短完全列が存在するという性質を仮定することにする。 $A, B$  の少なくとも一方が有限表現型の場合には勝手な傾斜加群がこの性質をもつことは示すことができるが、一般には、宮下の意味の傾斜加群やその双対を除いてどうなっているのかは分かっていない。少なくとも、著者はこの性質をもたない傾斜加群の例を知らない。

## 4 Stable Equivalence

${}_B T_A$  を傾斜加群,  $G_A \in \mathcal{D}(T_A)$ ,  ${}_B H = {}_B \text{Hom}(G, T) \in \mathcal{D}({}_B T)$  とする. このとき,

$${}_A D(T) \otimes_B H \otimes G_A \cong {}_A D(G) \otimes G_A \cong {}_A \text{End}_K(G)_A$$

となる. 同様に,

$${}_B H \otimes G \otimes_A D(T)_B \cong {}_B H \otimes D(H)_B \cong {}_B \text{End}_K(H)_B$$

である. これらを用いて, 第2節の方法によって, 共通の

$$\varphi_0: V \otimes V \rightarrow V, \psi_0: V \otimes V \rightarrow K$$

から

$$\varphi_A: {}_A V^G \otimes_A V_A^G \rightarrow {}_A V_A^G, \psi_A: {}_A V^G \otimes_A V_A^G \rightarrow {}_A D(A)_A \cong {}_A D(T) \otimes_B T_A$$

および

$$\varphi_B: {}_B V^H \otimes_B V_B^H \rightarrow {}_B V_B^H, \psi_B: {}_B V^H \otimes_B V_B^H \rightarrow {}_B D(B)_B \cong {}_B T \otimes_A D(T)_B$$

が構成される. この節では,  $G_A, {}_B H$  を適当な加群とし,

$$\Lambda = A \oplus (D(T) \otimes_B H \otimes G) \oplus D(A),$$

$$\Gamma = B \oplus (H \otimes G \otimes_A D(T)) \oplus D(B)$$

をそれぞれ  $(\varphi_A, \psi_A), (\varphi_B, \psi_B)$  から定義される対称多元環として,  $\Lambda$  と  $\Gamma$  の間の stable equivalence を記述する.

$G_A, {}_B H$  への条件としては極めて強いものを考える. 巾等元  $f \in B, e \in A$  があって,  $fT_A \cong eA_A, {}_B Te \cong {}_B Bf$  であるとする. この仮定のもとで,  $H = Bf \cong Te, G = eA \cong fT$  とおくのである. さらに exceptional vertex が1つだけの Brauer quiver から作られる多元環 (DJK-algebra) の場合には,  $V$  としては  $(Y)/(Y^{n+1}) \subseteq K[Y]/(Y^{n+1})$  としてもよい. このことは次の節でもう一度説明する.

まず,  $(X_A, \alpha, \beta)$  を  $\Lambda$ -加群とする. これに対して次の写像を考えることができる;

$$\alpha^* = \alpha \otimes D(T): (X \otimes_A D(T)) \otimes_B (H \otimes G \otimes_A D(T))_B \rightarrow X \otimes_A D(T)_B,$$

$$\beta^* = \beta \otimes D(T): (X \otimes_A D(T)) \otimes_B (T \otimes_A D(T))_B \rightarrow X \otimes_A D(T)_B.$$

$(X \otimes_A D(T)_B, \alpha^*, \beta^*)$  が  $\Gamma$ -加群となることは容易に確認できる. 実際には,  $\Lambda \otimes_A D(T) \cong D(T) \otimes_B \Gamma$  が成り立ち, この同型によって同一視することで両側加群  ${}_\Lambda \tilde{D}(T)_\Gamma$  が得られ,  $(X \otimes_A D(T), \alpha^*, \beta^*) \cong X \otimes_\Lambda \tilde{D}(T)_\Gamma$  となっている.

次に,  $0 \rightarrow X_A \rightarrow V(X)_A \rightarrow W(X)_A \rightarrow 0$  を  $V(X)_A \in \mathcal{C}(T_A), W(X)_A \in \mathcal{PC}(T_A)$  であるような完全列とし,  $(X \otimes_A D(T)_B, \alpha^*, \beta^*)$  から  $\text{Hom}_A(T, V(X)) \otimes_B \Gamma$  への  $\Gamma$ -写像を定義しよう.  $\text{Hom}_A(T, V(X)) \otimes_B \Gamma$  は単なる  $B$ -加群としては, 3つの加群

$$\begin{aligned} & Hom_A(T, V(X))_B, Hom_A(T, V(X)) \otimes_B H \otimes G \otimes_A D(T)_B \text{ および} \\ & Hom_A(T, V(X)) \otimes_B D(B)_B \end{aligned}$$

の直和である.  $(X \otimes_A D(T), \alpha^*, \beta^*)$  から  $Hom_A(T, V(X)) \otimes_B \Gamma$  への  $\Gamma$ -写像  $\theta$  は次の 3 つの  $B$ -写像で与えられる:

$$\begin{aligned} \theta_1 &: X \otimes_A D(T) \rightarrow Hom_A(T, V(X)), \\ \theta_2 &: X \otimes_A D(T) \rightarrow Hom_A(T, V(X)) \otimes_B H \otimes G \otimes_A D(T), \\ \theta_3 &: X \otimes_A D(T) \rightarrow Hom_A(T, V(X)) \otimes_B T \otimes_A D(T). \end{aligned}$$

上の 3 つの写像の定義を述べる.  $V(X)$  への包含写像を  $u: X \rightarrow V(X)$  で表すことにしておく.  $\theta_1$  と  $\theta_3$  は trivial extension の場合と同じものであり,  $\theta_2$  だけが新しい写像であるが, 一応 3 つとも説明しておく.

$\theta_1: X \otimes_A D(T)_B \rightarrow Hom_A(T, V(X))_B$  テンサー積と  $Hom$  の随伴性から導かれる自然な同型  $Hom_A(X \otimes_A D(T) \otimes_B T, X) \cong Hom_B(X \otimes_A D(T), Hom_A(T, X))$  において  $\beta$  に対応するものを  $\beta^b: X \otimes_A D(T)_B \rightarrow Hom_A(T, X)_B$  とし, これと  $Hom(T, u): Hom_A(T, X)_B \rightarrow Hom_A(T, V(X))_B$  との合成を  $\theta_1$  とする.

$\theta_3: X \otimes_A D(T)_B \rightarrow Hom_A(T, V(X)) \otimes_B T \otimes_A D(T)_B$   $V(X)_A \in \mathcal{C}(T_A)$  であるので自然な変換  $\varepsilon_{V(X)}^T: Hom_A(T, V(X)) \otimes_B T \rightarrow V(X)$  は同型である. 従って,  $\varepsilon_{V(X)}^T \otimes D(T)$  も同型であり,  $u \otimes D(T): X \otimes_A D(T)_B \rightarrow V(X) \otimes_A D(T)_B$  と  $(\varepsilon_{V(X)}^T \otimes D(T))^{-1}: V(X) \otimes_A D(T)_B \xrightarrow{\sim} Hom_A(T, V(X)) \otimes_B T \otimes_A D(T)_B$  の合成を  $\theta_3$  とおく.

$\theta_2: X \otimes_A D(T)_B \rightarrow Hom_A(T, V(X)) \otimes_B H \otimes G \otimes_A D(T)_B$  まず任意の  $V_A \in \mathcal{C}(T_A)$ ,  $W_A \in \mathcal{PC}(T_A)$  に対して, 合成をとることで  $c_{W,V}: Hom_A(T, V) \otimes_B Hom_A(W, T) \xrightarrow{\sim} Hom_A(W, V)$  という同型が得られることを注意しておく. これより,  $(c_{G,V(X)} \otimes D(H))^{-1}: Hom_A(G, V(X)) \otimes D(H)_B \xrightarrow{\sim} Hom_A(T, V(X)) \otimes_B Hom_A(G, T) \otimes D(H)_B$  が得られる. また  ${}_B H = {}_B Hom_A(G, T)$  であって,  $D(H)_B \cong G \otimes_A D(T)_B$  であるから, 同型  $\sigma: Hom_A(T, V(X)) \otimes_B Hom_A(G, T) \otimes D(H)_B \xrightarrow{\sim} Hom_A(T, V(X)) \otimes_B H \otimes G \otimes_A D(T)_B$  の存在することが分かる.  $\beta^b$  と同様に  $\alpha^b: X \otimes_A D(T)_B \rightarrow Hom_A(H \otimes G, X)_B$  が定義される. 体上のテンサー積だから,  $\delta: Hom_A(H \otimes G, X)_B \xrightarrow{\sim} Hom_A(G, X) \otimes D(H)_B$  となる.  $Hom(G, u) \otimes D(H)$  は  $Hom_A(G, X) \otimes D(H)_B$  から  $Hom_A(G, V(X)) \otimes D(H)_B$  への写像である. これらの写像の合成

$$\sigma \cdot (c_{G,V(X)})^{-1} \cdot Hom(G, u) \otimes D(H) \cdot \delta \cdot \alpha^b$$

を  $\theta_2$  とおく.

かなり面倒に見えるが, 実際はどれも自然な写像であって, とにかく以上で単射

$$\theta: X \otimes_{\Lambda} \tilde{D}(T)_{\Gamma} \rightarrow Hom_A(T, V(X)) \otimes_B \Gamma_{\Gamma}$$

が定義される。これから  $\text{Cok}(\theta)_\Gamma$  なる加群が定義され、 $\theta$  は  $u$  の選び方によって決まるから、これも  $u$  の選び方に depend している。しかし、trivial extension の場合と同じく stable category で考えると independent となつて、これが equivalence  $\text{mod-}\Lambda \approx \text{mod-}\Gamma$  を与えることが確認される。証明は trivial extension の場合よりかなり面倒くさいが原理的には殆ど同じである。

Gabriel-Riedtmann の定理の証明で大切なのは、一定の手続きで対称多元環を変形するとき、多元環自体は変形してもその stable module category が不変に保たれるということだけである。従つて、この節で述べた equivalence が具体的にどんなものであるかは重要ではない。しかし、加群が与えられた場合にその行き先の加群がかなり具体的に計算できるものであることはお分かり戴けたものと思う。また、Rickard の derived category による方法 [11, 12] で射影次元が有限とは限らない傾斜加群に対しても同じ結果が証明できるものかどうか今のところ分かっていないので、その場合にも通用する証明を述べる意味で、一応、加群の対応を説明した積もりである。

## 5 Gabriel-Ridtmann の定理の証明

exceptional cycle が 1 つだけの任意の Brauer quiver (exceptional vertex が 1 つだけの Brauer tree と 1 対 1 に対応している) から作られる多元環、即ち DJK-algebra が一般単列環に stably equivalent であることを、我々の方法で証明できることを説明する。

第 2 節の終わりの部分で説明した方法で、多元環  $A$ 、その上の加群  $X_A$  を与える。各 cycle から除く arrow の選び方に制限を加えるだけである。まず、exceptional cycle から除く arrow は任意でよい。これを  $t \rightarrow 1$  とし、残った path を  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow t$  としておく。考えることは、第 2 節で与えたように  $X_A$  を定義するとき、 $X_A$  が射影的かつ移入的となるように  $A$  は定められるか? ということである。実際これは可能であり、頂点 1 で exceptional cycle と交わる cycle からは 1 から出発する arrow を除き、頂点  $t$  で交わる cycle からは  $t$  に到達する arrow を除くだけでよい。その他の cycle については何の制限もいらぬ。

このように定めた  $A$  と  $X_A$  について、 $X_A \cong eA_A$  とおくと、 $A$  上の任意の傾斜加群は  $eA_A$  を直和因子として持つ。 $fT_A \cong eA_A$  となる巾等元  $f \in B$  が存在するが、これ等は第 4 節の初めの部分で述べた状況をつくっている。即ち、 ${}_B T e \cong {}_B B f$  も成立している。従つて、 $\Gamma$  の exceptional cycle が  $\Lambda (=$  もとの DJK-algebra) の exceptional cycle より vertices が多くなるように傾斜加群を選ぶことが可能ならば、この操作を繰り返すことにより、ついには exceptional cycle だけからなる Brauer quiver に対応する多元環にまで変形でき、定理が証明される訳である。

次に、そのような傾斜加群が実際に存在することの説明であるが、以前の論文 [16] で任意の A-type の iterated tilted algebra を単列的な遺伝的多元環に変形する方法を与えた。そこでは、傾斜加群による変形と共に、Waschbüsch [9] による多元環の一部をその



双対に置き換える操作も使われているが、太刀川先生との共著の論文 [14] において、その操作も傾斜加群による変形で与えられることを示しているので、結局傾斜加群による変形だけでよいことになるのである。

## 6 今後の問題

ここで説明した方向で、分かれば面白いと思われる問題を挙げてみる。

- 射影次元や移入次元が有限とは限らない傾斜加群で定義される stable equivalence を derived category の方法で説明できるかどうかを明らかにすること。
- exceptional cycle が 1 つとは限らない一般の Brauer graph algebra についても傾斜加群で変形して行って、何らかの標準型が存在するかどうか明らかにすること。
- 有限群の群環のブロックイデアルで、同じ様な方法を適用できるものがあるのかどうか探してみること。
- 対称多元環の構成法をなるべく多く求めること。特に、体  $K$  上のシステム  $(V, \varphi_0, \psi_0)$  の全体の様子が分かるようにすること。例えば、2次形式の場合の Witt の cancellation theorem の如きものが成立するか？

## 参考文献

- [1] I. Assem, Tilting theory, Topic in Alg., Banach Center Pub. 26, 1990, 127-180.
- [2] I. Assem, D. Happel and O. Roldán, Representation finite trivial extension algebras, J. Pure Appl. Alg. 33, 1984, 235-242.
- [3] K. Bongartz, Tilted algebras, Springer LNM 903, 1981, 16-32.
- [4] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Derived categories and Morita theory, J. Alg. 104, 1986, 397-409.
- [5] P. Donovan and M. R. Freislich, The indecomposable modular representation of certain groups with dihedral Sylow subgroup, Math. Ann. 238, 1978, 208-216.
- [6] P. Gabriel and C. Riedtmann, Group representations without groups, Comment. Math. Helv. 54, 1979, 240-287.
- [7] D. Happel, On the derived category of a finite dimensional algebra, Comment. Math. Helv. 62, 1987, 339-389.
- [8] D. Happel and C. M. Ringel, Tilted algebras, Trans. AMS 274, 1982, 399-443.

- [9] D. Hughes and J. Waschbüsch, Trivial extensions of tilted algebras, Proc. LMS 46, 1983, 347-364.
- [10] Y. Miyashita, Tilting modules of finite projective dimension, Math. Z. 193, 1986, 113-146.
- [11] J. Rickard, Morita theory for derived categories, J. LMS 39, 1989, 436-456.
- [12] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, J. Pure Appl. Alg. 61, 1989, 303-317.
- [13] H. Tachikawa, Selfinjective algebras and tilting theory, Springer LNM 1177, 1986, 272-307.
- [14] H. Tachikawa and T. Wakamatsu, Applications of reflection functors for selfinjective algebras, Springer LNM 1177, 1986, 308-327.
- [15] H. Tachikawa and T. Wakamatsu, Tilting functors and stable equivalences for selfinjective algebras, J. Alg. 109, 1987, 138-165.
- [16] T. Wakamatsu, Partial Coxeter functors of selfinjective algebras, Tsukuba J. Math. 9, 1985, 171-183.
- [17] T. Wakamatsu, Stable equivalences for selfinjective algebras and a generalization of tilting modules, J. Alg. 134, 1990, 298-325.
- [18] T. Wakamatsu, Tilting theory and selfinjective algebras, to appear.