

非凸領域における楕円型方程式の解の数値的検証法

九州大学 理学部 山本 野人 (Nobito Yamamoto)
九州大学 理学部 中尾 充宏 (Mitsuhiro Nakao)

0. はじめに

筆者らによる偏微分方程式の解に対する精度保証の方法（数値的検証法）は、ここ数年でかなりの発展を遂げ、特に楕円型の方程式に対しては、様々な工夫が加えられて著しい結果が得られている。ここでは、特に非凸領域の問題を扱う方法を論じる。

楕円型方程式の解の数値的検証法は、取り扱う領域における Poisson 方程式の近似解を有限要素法で求めたときの誤差評価を基礎としている。領域 Ω における斉次境界条件の Poisson 方程式

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解が、任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して $H^2(\Omega)$ に属するとき、 Ω は regular である、と言われる。この場合には、適当な有限要素法によって近似解 v_h を求めれば、通常の場合次のような誤差評価式が成り立つ。

$$\|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 h \|f\|.$$

ここに $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ および $\|\cdot\|$ はそれぞれ通常の H_0^1 -norm および L^2 -norm, h は有限要素空間のパラメータ, C_0 は h と f に依らない定数で、領域の形状から算定可能なものである。

この定数 C_0 は、楕円型方程式に対する検証法では決定的な役割を果たし、その値を具体的に知ることができなければ検証を行なうことはできない。ところが Ω が regular でないとき、例えば凸でない多角形領域の場合などでは v はもはや $H^2(\Omega)$ には属さず、一般に上記の形の誤差評価は成立しない。ただ、

$$(1) \quad \|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1(h) \|f\|,$$

を成り立たせるような f に依らない定数 $C_1(h)$ の存在は知られているが、 $C_1(h)$ の具体的な値を算定する方法がなかったために、これまではこの検証法を適用することが不可能であった。

ここでは、(1) にあらわれる定数 $C_1(h)$ の計算機を用いた数値的算定法を提案し、これを用いて非凸多角形領域での楕円型方程式の解の検証に成功したことを報告する。

$C_1(h)$ の算定法を簡単に述べると、

1. 演算子 ∇, Δ を平滑化した新しい演算子 $\bar{\nabla}, \bar{\Delta}$ を導入し、
2. これを用いて、 $C_1(h)$ を評価する問題を有限次元の線形作用素に対する固有値問題に帰着させて解く。

この方法を用いて、L型の領域 Ω における楕円型方程式の解の検証を試みた。まず定数 $C_1(h)$ の値を計算し、その h 依存性を数値的に調べ、また次のような非線形項をもつ楕円型方程式：

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda_1 u^2 - \lambda_2 (\sin 2\pi x \sin 2\pi y)^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

の解の検証に成功した。以下、方法と結果の概要を順次述べる。

1. 問題

次のような楕円型方程式の解を計算機を使って検証することを考える。
find a solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of

$$\begin{cases} \Delta u = -F(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここに Ω は二次元の非凸多角形領域とする。また、 F は $H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への有界連続写像とする。

この問題の弱形式を示せば：

$$\begin{aligned} \text{find } u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{such that} \\ (\nabla u, \nabla \phi) = (F(u), \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

ここに (\cdot, \cdot) は $L^2(\Omega)$ 内積を表わす。

2. 検証法の概要

まず、問題を不動点方程式の形で表わす：

$$u = -K F(u).$$

K は Dirichlet 境界条件をともなう Laplacian の逆作用素である。

作用素 $-KF$ は compact であるから、Schauder の不動点定理を用いて解の存在を証明することを試みると、検証条件は次のようになる：

$U : H_0^1$ の有界凸閉部分集合

$$V := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v = -KF(u), \forall u \in U\}$$

とするとき、

$$V \subset U$$

が満たされれば、 V の中に $-KF$ の不動点が存在する。

計算機上で無限次元の集合 V を捉えるには Rounding と Rounding Error とを用いる。まず用いる有限要素空間とその直交補空間を定義しておこう。

S_h : メッシュ巾 h の有限要素空間、すなわち基底 Ψ_i ($i = 1, \dots, n$) を持つ n 次元部分空間 $\subset H_0^1(\Omega)$

S_h^\perp : S_h の H_0^1 における直交補空間

ここで、

$R(V)$ (rounding of V): $R(V) \subset S_h$, V の S_h への H_0^1 -projection

を考え、

$RE(V)$ (rounding error of V): $RE(V) \subset S_h^\perp$

を $V \subset R(V) \oplus RE(V)$ となるように定めると、検証条件は次のように書くことが出来る:

$$(2) \quad R(V) \oplus RE(V) \subset U$$

では、どうやってそのような $R(V)$ と $RE(V)$ を作るのかを述べよう。 S_h に対する仮定として、 h と領域 Ω のみによる定数 $C_1(h)$ が存在し、Poisson 方程式

$$(\nabla v, \nabla \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

の解 v と、

$$(\nabla v_h, \nabla \phi_h) = (f, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in S_h$$

を満たす v の近似解 $v_h \in S_h$ に対し、不等式

$$(1) \quad \|\nabla v - \nabla v_h\| \leq C_1(h) \|f\|$$

が成り立つものとする。

この仮定の下で $R(V)$ と $RE(V)$ を、

$$R(V) = \{v_h \in S_h \mid (\nabla v_h, \nabla \psi) = (F(u), \psi) \\ \forall \psi \in S_h, \forall u \in U\}$$

$$RE(V) = \{v \in S_h^\perp \mid \|\nabla v\| \leq C_1 \sup_{u \in U} \|F(u)\|\}$$

と定義すれば、 $V \subset R(V) \oplus RE(V)$ が成り立つことになる。ここで、 $R(V)$ は以下のように包み込むことが出来ることに注意しておく。

$$R(V) \subset \sum_{j=1}^n [a_j, \bar{a}_j] \psi_j$$

ここに

$[a_j, \bar{a}_j] = \{a \in R \mid a_j \leq a \leq \bar{a}_j\}$: 区間係数

$\psi_j (j = 1, \dots, n)$: S_h の基底.

実際には $R(V)$ の替わりにその包み込みを扱うことになる。

$R(V) \oplus RE(V) \subset U$ を満たす $R(V) \oplus RE(V)$ を得るためには反復法を用いる。

まず、

\hat{u}_h : (なんらかの方法で得られた) 不動点 u の近似解

δ : 予め決めておく正の定数

として、

(0) $U = \{\hat{u}_h\}$ とおいて、条件 (2) をチェックせよ。

(1) 条件が満足されなければ、 U に対して作った $R(V)$, $RE(V)$ を用いて

$$U = (R(V) + \sum_{j=1}^n [-\delta, \delta] \psi_j) \oplus (RE(V) + \{v \in S_h^\perp \mid \|\nabla v\| \leq \delta\})$$

とおきなおし、新たに $R(V)$, $RE(V)$ を作って、条件 (2) をチェックせよ。

(2) 条件が満足されなければ、(1) をくりかえせ。

ただし上式の右辺中、 $(R(V) + \sum_{j=1}^n [-\delta, \delta] \psi_j)$ は $R(V)$ の包み込みの各係数に $[-\delta, \delta]$ を加えたものを表わし、 $(RE(V) + \{v \in S_h^\perp \mid \|\nabla v\| \leq \delta\})$ は S_h^\perp の球 $RE(V)$ の半径を δ だけ拡大したものを表わすこととする。

3. $\bar{\nabla}$ と $\bar{\Delta}$

さて、非凸多角形領域において (1) に現われる定数 $C_1(h)$ を算定する方法を述べよう。まず、演算子 ∇, Δ を平滑化した新しい演算子 $\bar{\nabla}, \bar{\Delta}$ を導入する。 $H^1(\Omega)$ の部分空間として、

\hat{S}_h : S_h の基底と境界上のノードに対応する基底とで張られる有限要素空間を考え、 $\bar{\nabla} v_h$ を ∇v_h の L^2 -projection、すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} v_h &= ((\bar{\nabla} v_h)_x, (\bar{\nabla} v_h)_y) \in (\hat{S}_h)^2 \\ (\bar{\nabla} v_h)_x &= \hat{P}_r \partial_x v_h \\ (\bar{\nabla} v_h)_y &= \hat{P}_r \partial_y v_h \end{aligned}$$

と定める。ただし $\hat{P}_r : L^2(\Omega) \rightarrow \hat{S}_h$.

さらに $\bar{\Delta}v_h$ を $\bar{\nabla}v_h$ の divergence :

$$\bar{\Delta}v_h = \nabla \cdot \bar{\nabla}v_h$$

として定義しよう。すると、次の補題が容易に示される。

Lemma 1 任意の $v_h \in S_h$ に対して

$$(\bar{\nabla}v_h, \nabla\phi) + (\bar{\Delta}v_h, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

が成り立つ。

この補題を用いれば、(1) 中の v, v_h に対して、

$$\begin{aligned} (\nabla v - \nabla v_h, \nabla\phi) &= (\bar{\nabla}v_h - \nabla v_h, \nabla\phi) + (\bar{\Delta}v_h + f, \phi), \\ &\quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

が導ける。

さて、上の式の中で $\phi = \nabla v - \nabla v_h$ に取り、誤差とその微分の間の関係

$$\|v - v_h\| \leq C_2(h) \|\nabla v - \nabla v_h\|$$

を用いることにする。 h と領域のみに依存する定数 C_2 の算定法には独特の手法を要するのでここでは述べないが、文献 [12] を参照されたい。結果として

$$\|\nabla v - \nabla v_h\| \leq \|\bar{\nabla}v_h - \nabla v_h\| + C_2(h) \|\bar{\Delta}v_h + f\|$$

が得られ、これより C_1 を

$$C_1 \leq \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\|\bar{\nabla}v_h - \nabla v_h\| + C_2(h) \|\bar{\Delta}v_h + f\|}{\|f\|}$$

と評価できる。右辺の量は、結局ある $n \times n$ 正値対称行列の最大固有値になるので、計算機を用いてこの量を数値的に上から評価することが可能である ([12] 参照)。

4. Example Problem

例題として次の方程式を扱った。

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda_1 u^2 - \lambda_2 (\sin 2\pi x \sin 2\pi y)^2 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここに $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 20.0$ に取り、領域 Ω は L 形の二次元領域とする。
 $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ としては、メッシュ巾が h である矩形上の双線形要素からなる有限要素空間を取る。このときの近似解の形状 ($h = 0.05$) は Fig.1 のようになっている。

まず、 $C_1(h)$ を算定した。その結果、Fig.2 に示すとおりほぼ $C_1(h) = O(h^{1/2})$ であり、特に $h = 0.05$ のとき $C_1 \leq 0.09204657$ が得られた。

次にこの計算結果を (1) に当てはめて用い、解の検証を行なった。

結果：検証成功。集合 $U = \hat{u}_h + w_h + [\alpha]$ の中に解が存在する。

\hat{u}_h ：有限要素近似解；以下の方程式から計算される。

$$(\nabla \hat{u}_h, \nabla \psi_i) = (\lambda_1 \hat{u}_h^2 + \lambda_2 (\sin 2\pi x \sin 2\pi y)^2, \psi_i) \quad \forall \psi_i \in S_h.$$

w_h ：0 中心の区間係数で表わされる S_h の部分集合；最大区間は

$$[-0.003394400, 0.003394400]$$

$$[\alpha] := \{v \in S_h^\perp \mid \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha\}, \quad \alpha = 0.09498869$$

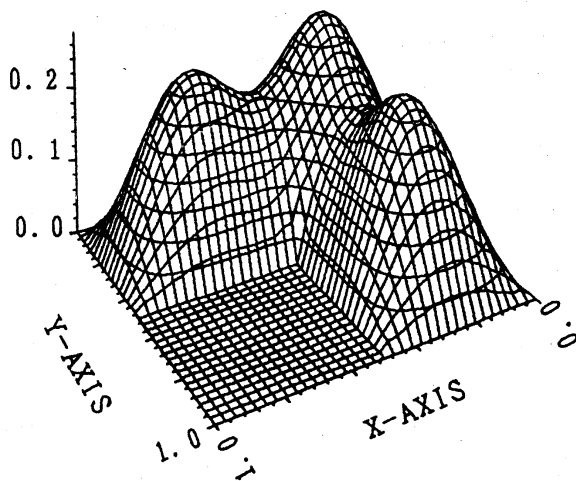


Fig.1 Approximate solution \hat{u}_h

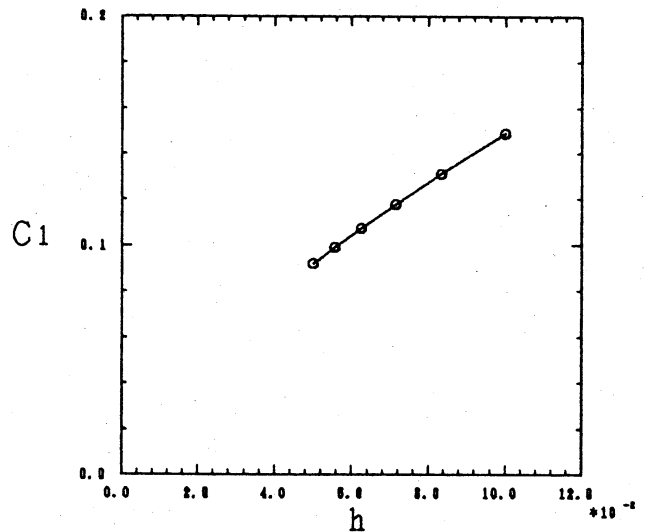


Fig.2 The value of C_1

References

- [1] Nakao, M.T., A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan Journal of Applied Mathematics, 5, (1988) 313 - 332.
- [2] —, A computational verification method of existence of solutions for nonlinear elliptic equations, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., 10, (1989) 101 - 120. In proc. Recent Topics in Nonlinear PDE 4, Kyoto, 1988, North - Holland/Kinokuniya,

1989.

[3] —, A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems II, Japan Journal of Applied Mathematics 7 (1990), 477-488.

[4] —, A numerical verification method for the existence of weak solutions for nonlinear boundary value problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications 164 (1992), 489-507.

[5] —, Solving nonlinear parabolic problems with result verification: Part I, in Journal of Computational and Applied Mathematics 38 (1991) 323-334.

[6] Nakao, M.T. & Watanabe, Y., ———: Part II, Several space dimensional case, to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics.

[7] —, Numerical verifications of solutions for nonlinear hyperbolic equations, Research Report of Mathematics of Computation, Kyushu University, RMC 66-07 (1991), 13 pages.

[8] —, Solving nonlinear elliptic problems with result verification using an H^{-1} type residual iteration, Computing, Suppl. 9 (1993), 161-173

[9] Nakao, M.T. & Yamamoto, N., Numerical verifications of solutions for elliptic equations with strong nonlinearity, Numerical Functional Analysis and Optimization 12 (1991), 535-543.

[10] Tsuchiya, T. & Nakao, M.T., Numerical verification of solutions of parametrized nonlinear boundary value problems with turning points, Research Report of Mathematics of Computation, Kyushu University, RMC 67-02 (1992), 17 pages.

[11] Watanabe, Y. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for nonlinear elliptic equations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 10 (1993) 165-178

[12] Yamamoto, N. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for elliptic equations in nonconvex polygonal domains, Numerische Mathematik 65. 503-521, 1993