数理解析研究所講究録
第884巻 1994年 1-13

Filtrations of topological and pro-ℓ mapping class groups of surfaces and their use

東京電機大・工　朝田　衞 (Mamoru Asada)

Xを有限次代数体k ($\subset \mathbb{C}$) 上定義された種数$g \geq 0$の完備で特異点のない代数曲線、SをXのk-有理点の有限集合 ($|S| = n$) とし、素数ℓを1つ固定します。$X \setminus S$を punctured Riemann 面と見なしたときの位相的基本群をπ_1^{top}、$X \setminus S$の pro-ℓ 基本群を$\pi_1^{pro\text{-}\ell}$とします。π_1^{top} (resp. $\pi_1^{pro\text{-}\ell}$) の外部自己同型群の部分群で mapping class group (resp. pro-ℓ mapping class group) と呼ばれるものがあり、ここでは各々$\Gamma_{g,n}$、$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$と書きます。π_1^{top}から$\pi_1^{pro\text{-}\ell}$への自然な準同型は、準同型$\varphi_\ell : \Gamma_{g,n} \to \Gamma_{g,n}^{(\ell)}$を誘導します。

さて、π_1^{top} (及び$\pi_1^{pro\text{-}\ell}$) は weight filtration と呼ばれる自然な filtration を持ち (Oda-Kaneko による、[K]参照)、これから、$\Gamma_{g,n}$及び$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$に filtration が誘導されます。

この小文では、これらの filtration の性質及び filtration とφ_ℓとの関係について知られている群論的結果をまとめて述べることにします。このようなことについて調べる動機は、

以下のような織田氏による結果です（[O1]参照）。

X、S等は上に述べた通りとします。kの絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ は $\pi_1^{\text{pro-}\ell}$ に自然に作用し、ガロア表現 $\rho_{X,S}$ が得られます。その像は $\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ に含まれることがわかります：

$$\rho_{X,S}: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow \Gamma_{g,n}^{(\ell)}$$

このとき、織田氏は

$\rho_{X,S}$ の像は $\overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n})}$（$\overline{}$：位相閉包）の正規化群 N に含まれ、$\rho_{X,S}$ と射影 $N \longrightarrow N/\overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n})}$ の合成により得られる表現

$$\rho_{g,n}: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow N/\overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n})}$$

は g、n、ℓ のみによる

ことを示し、表現 $\rho_{g,n}$ を研究することを問題として提示しました。$g=0$, $n=3$ のときは、$\rho_{0,3}$ は Ihara、Deligne 等によって深く研究されているものに他なりません（[I] 参照）。

それゆえ、群 $\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ や $\overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n})}$ 等について調べておくことが表現 $\rho_{g,n}$ の研究に役立つことが期待されるわけです。

尚、表現 $\rho_{g,n}$ の研究については、Oda [O3]、Nakamura-Takao-Ueno [NTU]、Nakamura [N2] 等を参照して下さい。

§ 1　Weight filtration

この § では、weight filtration の定義とその基本的性質をまとめておきます（Kaneko [K] 参照）。

以下、

R_g：種数 $g\ (\geq 0)$ の compact Riemann 面

$S = \{P_1, \cdots, P_n\}$：R_g 上の相異なる $n\ (\geq 0)$ 個の点の集合

$\pi_{g,n} = \pi_1(R_g \setminus S)$：$R_g \setminus S$ の位相的基本群

とします。よく知られているように、群 $\pi_{g,n}$ は次のような presentation を持ちます。

生成元：$x_1, \cdots, x_{2g}, z_1, \cdots, z_n$

関係式：$[x_1, x_{g+1}] \cdots [x_g, x_{2g}] z_1 \cdots z_n = 1$

ただし、$[\ ,\ ]$ は交換子（$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$）を表し、z_j は点 P_j のまわりを（正の向きに）1 回まわる道で代表される元とします。

<u>定義</u>　$\pi_{g,n}$ の部分群の列 $\{\pi_{g,n}(m)\}_{m=1}^{\infty}$ を

$$\pi_{g,n}(1) = \pi_{g,n}$$

$$\pi_{g,n}(2) = [\pi_{g,n}, \pi_{g,n}]\langle z_1, \cdots, z_n \rangle$$

$$\pi_{g,n}(m) = \langle [\pi_{g,n}(m'), \pi_{g,n}(m'')] \mid m = m' + m'' \rangle \quad (m \geq 3)$$

と定め、$\pi_{g,n}$ の <u>weight filtration</u> と呼ぶ。

容易にわかるように、$\{\pi_{g,n}(m)\}_{m=1}^{\infty}$ は $\pi_{g,n}$ の正規部分群の減少列となります。

<u>Rem. 1</u>　定義から、$n = 0, 1$ のときは、weight filtration は lower central series による filtration に一致します。しかし、$n \geq 2$ のときは両者は異なります。

<u>Rem. 2</u>　$g = 0$ のときは、

$$\pi_{0,n}(2m-1) = \pi_{0,n}(2m) = (\text{lower central series の } m\text{-th term})$$

となっていて、weight filtration は lower central series による filtration と実質的には同じなのですが、番号付けが "2倍" になっています。

<u>weight filtration の基本的性質</u>

<u>1</u>　$\pi_{g,n}/\pi_{g,n}(2) \simeq H_1(R_g ; \mathbb{Z})$

<u>2</u>　$\{\pi_{g,n}(m)\}_{m=1}^{\infty}$ は central filtration、即ち

$$[\pi_{g,n}(m_1), \pi_{g,n}(m_2)] \subset \pi_{g,n}(m_1 + m_2) \quad {}^\forall m_1, m_2 \geq 1$$

が成り立つ。

<u>2</u> により、graded module

$$gr(\pi_{g,n}) = \bigoplus_{m=1}^{\infty} gr^m(\pi_{g,n}) \qquad \left(gr^m(\pi_{g,n}) = \pi_{g,n}(m)/\pi_{g,n}(m+1) \right)$$

は自然に graded Lie algebra / $\mathbb{Z}$ の構造を持ちます（Bourbaki [Bo] 参照）。

3　Lie algebra $gr(\pi_{g,n})$ は presentation

生成元：　$X_1, \cdots, X_{2g}, Z_1, \cdots, Z_n$

関係式：　$\sum_{i=1}^{g} [X_i, X_{g+i}] + \sum_{j=1}^{n} Z_j = 0$

$(X_i = x_i \bmod \pi_{g,n}(2),\ Z_j = z_j \bmod \pi_{g,n}(3))$

を持ち、さらに

$gr^m(\pi_{g,n})$：有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群

となる。その rank は m, g, n の式で explicit に表せる（Witt, Labute；[Bo]、[L] 参照）。

4　$\bigcap_{m=1}^{\infty} \pi_{g,n}(m) = \{1\}$　（Magnus, Baumslag；[Bo]、[Ba] 参照）

§2　Mapping class group の filtration

この§では、(topological な) mapping class group の filtration の定義とそれについて知られていることを述べます。そのために、まず mapping class group の代数的な定義から始めます。$\pi_{g,n}$ は§1で述べた群とします。

定義　$\pi_{g,n}$ の外部自己同型群の部分群 $\Gamma_{g,n}$ を

$$\Gamma_{g,n} = \left\{ \tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\pi_{g,n}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \tilde{\sigma}(z_j) \sim z_j \quad \forall j \\ \text{(ii)} \quad \text{"orientation preserving"} \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{Int}(\pi_{g,n})$$

と定め、(pure) mapping class group と呼ぶ(Birman[Bi]参照)。

ただし、$\sim$ は共役、$\mathrm{Int}(\pi_{g,n})$ は $\pi_{g,n}$ の内部自己同型群を表す。又、条件(i)より、$\Gamma_{g,n}$ は $\pi_{g,n}/\pi_{g,n}(2) \simeq H_1(R_g ; \mathbb{Z})$ に作用し、それは intersection form

$$H_1(R_g ; \mathbb{Z}) \times H_1(R_g ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(R_g ; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

と compatible だが、条件(ii)は $\Gamma_{g,n}$ が $H_2(R_g ; \mathbb{Z})$ に identity に作用することを意味する。

条件(i)から $\Gamma_{g,n}$ は $\pi_{g,n}$ の weight filtration を保つことがわかります。これより自然に、次のようにして $\Gamma_{g,n}$ に filtration が誘導されます。

<u>定義</u>　$\Gamma_{g,n}$ の部分群の列 $\{\Gamma_{g,n}[m]\}_{m=0}^{\infty}$ を

$$\Gamma_{g,n}[m] = \left\{ \sigma \in \Gamma_{g,n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma \text{ は次のような } \tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\pi_{g,n}) \text{ で} \\ \text{代表される;} \\ \quad \tilde{\sigma}(x_i)\, x_i^{-1} \in \pi_{g,n}(m+1) \quad \forall i \\ \quad \tilde{\sigma}(z_j) \underset{m}{\sim} z_j \quad \forall j \end{array} \right\}$$

と定める。ただし、$\underset{m}{\sim}$ は $\pi_{g,n}(m)$ の元による共役を表す。

$\{\Gamma_{g,n}[m]\}_{m=0}^{\infty}$ は $\Gamma_{g,n}$ $(=\Gamma_{g,n}[0])$ の正規部分群の減少列となります。

Rem. §1 の Rem.2 から、$g=0$ のときは

$$\Gamma_{0,n}[2m-1] = \Gamma_{0,n}[2m]$$

となっています。

$\Gamma_{g,n}$ の filtration の基本的性質

$\Gamma_{g,n}$ の $H_1(R_g;\mathbb{Z})$ への作用から、条件(ii)により、準同型

$$\rho : \Gamma_{g,n} \longrightarrow Sp(2g;\mathbb{Z}) \ (\subset Aut(H_1(R_g;\mathbb{Z})))$$

が定まります。

1 準同型 ρ は $\Gamma_{g,n}/\Gamma_{g,n}[1] \simeq Sp(2g;\mathbb{Z})$ を引き起こす。
(Nielsen : Magnus-Karrass-Solitar [MKS] 参照。)

2 $\{\Gamma_{g,n}[m]\}_{m=1}^{\infty}$ は $\Gamma_{g,n}[1]$ の central filtration

3 $gr^m(\Gamma_{g,n})$: 有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $(m \geq 1)$ ([A2] 参照)

$\mathbb{Z}$ 加群 $gr^m(\Gamma_{g,n})$ の rank は、一般にはまだわかっていません。下からの評価については Oda [O2]、上からの評価については、Morita [M]、Nakamura [N2] を参照して下さい。

群 $\Gamma_{g,n}$ は、共役をとることにより、$gr^m(\Gamma_{g,n})$ $(m \geq 1)$ に自然に作用します。この作用は 2 により $\Gamma_{g,n}/\Gamma_{g,n}[1]$ の作用を引

き起こしますから、$\underline{1}$ によって $gr^m(\Gamma_{g,n})$ に $Sp(2g;\mathbb{Z})$－加群の構造を定めることになります。更に、$gr^m(\Gamma_{g,n})\otimes\mathbb{Q}$ への $Sp(2g;\mathbb{Z})$ の作用は代数的であることもわかり、結局、$gr^m(\Gamma_{g,n})\otimes\mathbb{Q}$ は $Sp(2g;\mathbb{Q})$－加群の構造を持つことがわかります。現在のところ、この構造は $1\leq m\leq 4$ のときのみ決定されています。（$1\leq m\leq 3$ のとき、Asada-Nakamura [AN]、$m=4$ のとき、Morita（研究集会 Topology of moduli spaces of curves での講演 1993））

$\underline{4}$ $\displaystyle\bigcap_{m=0}^{\infty}\Gamma_{g,n}[m]=\{1\}$ （$(g,n)\neq(2,0)$ のとき。$(g,n)=(2,0)$ のときは成り立つかどうかはわかっていない。Bass-Lubotzky [BL] 参照。）

§3 Pro-ℓ mapping class group の filtration

この§では、pro-ℓ mapping class group の定義とその filtration について知られていることを、§2と対比させながら述べます（Asada-Kaneko [AK], Kaneko [K]、[A2] 等参照）。

$\pi_{g,n}$ は§1で述べた群とし、素数 ℓ を1つ決めます。$\pi_{g,n}$ の pro-ℓ completion を $\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell}$ とします。即ち

$$\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell} = \varprojlim_{N} \pi_{g,n}/N \quad , \quad N \lhd \pi_{g,n} \ , \ [\pi_{g,n} : N] \text{ は } \ell \text{ 巾}$$

$\pi_{g,n}$ から $\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell}$ への自然な準同型は単射であることが知られています。$\pi_{g,n}$ の場合と同様に $\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell}$ にも weight filtration を定めることができます。

<u>定義</u>　$\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell}$ の外部自己同型群の部分群 $\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ を

$$\Gamma_{g,n}^{(\ell)} = \left\{ \tilde{\sigma} \in Aut(\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell}) \ \middle| \ \tilde{\sigma}(z_j) \sim z_j^{\alpha} \ \exists \alpha \in \mathbb{Z}_\ell^{\times} \ \forall j \right\} / Int(\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell})$$

と定め、<u>pro-ℓ mapping class group</u> と呼ぶ。

$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ は自然に profinite group と見做せます。$\Gamma_{g,n}$ の場合と同様に、$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ にも $\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell}$ の weight filtration から filtration が誘導されます。それを $\{\Gamma_{g,n}^{(\ell)}[m]\}_{m=0}^{\infty}$ と書きます。

<u>$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ の filtration の基本的性質</u>

$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ の $gr^1(\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell})$ への作用から、準同型

$$\rho_\ell : \Gamma_{g,n}^{(\ell)} \longrightarrow GSp(2g ; \mathbb{Z}_\ell)$$

が定まります。

<u>1_ℓ</u>　準同型 ρ_ℓ は $\Gamma_{g,n}^{(\ell)}/\Gamma_{g,n}^{(\ell)}[1] \simeq GSp(2g;\mathbb{Z}_\ell)$ を引き起こす。

<u>2_ℓ</u>　$\{\Gamma_{g,n}^{(\ell)}[m]\}_{m=1}^{\infty}$ は $\Gamma_{g,n}^{(\ell)}[1]$ の central filtration

$\underline{3}_\ell$　$gr^m(\Gamma_{g,n}^{(\ell)})$：有限生成自由$\mathbb{Z}_\ell$加群（$m \geq 1$）

であり、その rank は m, g, n の式で explicit に表せる

（[AK]、[K]、[A1]、Nakamura-Tsunogai [NT1] 等参照。）

$\Gamma_{g,n}$の場合と同様に、$gr^m(\Gamma_{g,n}^{(\ell)}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ は $GSp(2g;\mathbb{Q}_\ell)$－加群の構造を持ちます。この構造は原理的には決めることができます。これについては Nakamura-Tsunogai [NT2]を参照して下さい。

$\underline{4}_\ell$　$\bigcap_{m=0}^{\infty} \Gamma_{g,n}^{(\ell)}[m] = \{1\}$　（$\forall (g,n)$）（[A2] 参照。）

$\underline{1}_\ell$、$\underline{3}_\ell$、$\underline{4}_\ell$により、$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$は pro-ℓ group を指数有限部分群として含むことがわかります。

§4　準同型 φ_ℓ と filtration の compatibility

$\pi_{g,n}$の自己同型は$\pi_{g,n}^{pro\text{-}\ell}$の自己同型を自然に定めますから、これより準同型

$$\varphi_\ell : \Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,n}^{(\ell)}$$

が定まります。容易にわかるように、これは filtration を保ちますから、graded module の間の準同型

$$gr^m(\varphi_\ell): \quad gr^m(\Gamma_{g,n}) \longrightarrow gr^m(\Gamma_{g,n}^{(\ell)})$$

が誘導されます。 φ_ℓ 及び $gr^m(\varphi_\ell)$ については、以下のことがわかります（[A2] 参照）。

<u>1</u>　$gr^m(\varphi_\ell)$ は単射である。

これより、§2の<u>4</u>と合わせて、φ_ℓ も単射であることがわかります。（ただし、$(g,n)=(2,0)$ は除く。）

次に $gr^m(\varphi_\ell)$ の像の閉包について述べます。 $m=0$ のときは、 $gr^m(\varphi_\ell)$ は自然な準同型

$$Sp(2g;\mathbb{Z}) \longrightarrow GSp(2g;\mathbb{Z}_\ell)$$

に他なりません。（§2の<u>1</u>、§3の<u>1_ℓ</u>参照）従って、像の閉包は $Sp(2g;\mathbb{Z}_\ell)$ になります。 $m\geq 1$ のときは、 $gr^m(\varphi_\ell)$ は

$$gr^m(\varphi_\ell)_\ell: \quad gr^m(\Gamma_{g,n})\otimes\mathbb{Z}_\ell \longrightarrow gr^m(\Gamma_{g,n}^{(\ell)})$$

を誘導し、この像が $gr^m(\varphi_\ell)$ の像の閉包ですが、

<u>2</u>　$gr^m(\varphi_\ell)_\ell$ は単射である。

となります。

$\Gamma_{g,n}^{(\ell)}$ 内での閉包を $\overline{}$ で表すと、明らかに

$$\overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n})} \cap \Gamma_{g,n}^{(\ell)}[m] \supset \overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n}[m])}$$

ですが、

$\underline{3}$ $g \neq 1$ なら $\overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n})} \cap \Gamma_{g,n}^{(\ell)}[m] = \overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n}[m])}$.

従って

$$\bar{\Gamma}_{g,n} = \overline{\varphi_\ell(\Gamma_{g,n})}$$

$$\bar{\Gamma}_{g,n}[m] = \bar{\Gamma}_{g,n} \cap \Gamma_{g,n}^{(\ell)}[m] \quad (m \geq 0)$$

と定義すると、$\{\bar{\Gamma}_{g,n}[m]\}_{m=0}^{\infty}$ は $\bar{\Gamma}_{g,n}$ の filtration を与えるわけですが、$\underline{1}$、$\underline{2}$、$\underline{3}$ より、$g \neq 1$ なら

$$gr^m(\Gamma_{g,n}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq gr^m(\bar{\Gamma}_{g,n}) \subset gr^m(\Gamma_{g,n}^{(\ell)}) \quad (m \geq 1)$$

となっています。

$\underline{3}$ の証明には $Sp(2g;\mathbb{Z})$ の congruence subgroup property を用いるために、$g \neq 1$ という仮定が必要になります。では $g=1$ の場合はどうかというと、$g=n=1$ の場合には成り立たないということが Bloch [B1] や Nakamura [N1] の結果からわかります。この場合、$\Gamma_{1,1}=\{1\}$ にもかかわらず $\bar{\Gamma}_{1,1}[1] \neq \{1\}$ となっていることがわかるのです。$\bar{\Gamma}_{1,1}[1]$ がどのような群かを調べることは興味深い問題と思われます。

文献

[A1] M. Asada, Two properties of the filtration of the outer automorphism groups of certain groups, to appear in Math. Z.

[A2] M. Asada, On the filtration of topological and pro-l mapping class groups of punctured Riemann surfaces, preprint 1993.

[AK] M. Asada and M. Kaneko, On the automorphism groups of some pro-l fundamental groups, Adv. Studies in Pure Math. 12(1987), 137-159.

[AN] M. Asada and H. Nakamura, On graded quotient modules of mapping class groups of surfaces, to appear in Israel J.

[BL] H. Bass and A. Lubotzky, Linear-central filtrations on groups, to appear in Contemporary Mathematics.

[Ba] G. Baumslag, On generalized free products, Math. Z. 78(1962), 423-438.

[Bi] J.S.Birman, The algebraic structure of surface mapping class groups, Discrete groups and automorphic functions, W. Harvey(ed.), Academic Press, New York, 1977.

[Bl] S. Bloch, A letter to P. Deligne, 1984.

[Bo] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 2 et 3, Hermann, Paris 1972.

[I] Y. Ihara, Braids, Galois groups and some arithmetic functions, Proc. ICM, Kyoto (1990), 99-120.

[K] M. Kaneko, Certain automorphism groups of pro-l fundamental groups of punctured Riemann surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 36(1989), 363-372.

[L] J.P.Labute, On the descending central series of groups with a single defining relation, J. Algebra, 14(1970), 16-23.

[MKS] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, Combinatorial group theory, Interscience Publ. Wiley and Sons, 1966.

[M] S. Morita, Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Math. J., 70(1993), 699-726.

[N1] H. Nakamura, On exterior Galois representations associated with open elliptic curves, UTMS 93-17(1993).

[N2] H. Nakamura, Coupling of universal monodromy representations of Galois-Teichmüller modular groups, RIMS 976(1994).

[NT1] H. Nakamura and H. Tsunogai, Some finiteness theorems on Galois centralizers in pro-l mapping class groups, J. Reine Angew. Math., 441(1993), 115-144.

[NT2] H. Nakamura and H. Tsunogai, Atlas of pro-l mapping class groups and related topics, in preparation.

[NTU] H. Nakamura, N. Takao and R. Ueno, Some stability properties of Teichmüller modular functions with pro-l weight structures, RIMS 973(1994).

[O1] Takayuki Oda, Galois action on the pro-nilpotent completion of the fundamental groups of algebraic curves (in Japanese), in Algebraic Analysis and Number Theory, RIMS report, 810(1992),318-323.

[O2] T. Oda, A lower bound for the graded modules associated with the relative weight filtration on the Teichmüller group, preprint 1992.

[O3] T. Oda, The universal monodromy representations on the pro-nilpotent fundamental groups of algebraic curves, Mathematische Arbeitstagung (Neue Serie) 9-15 Juni 1993, Max-Planck-Institute preprint MPI/93-57.