数理解析研究所講究録
第 884 巻 1994 年 124-128

On the existence of unramified p-extensions of exponent p

金沢大・自然　野村　明人 (Akito Nomura)

この講演の目的は、不分岐 p 拡大の存在についての Boston の問題が肯定的に成り立つための十分条件を与えることである。この問題はガロア表現に関する Fontaine– Mazur 予想と密接な関係があることが Boston[2] により指摘されている。

§1 Motivation

p を素数、$\widetilde{K}$を代数体 K の最大不分岐 p 拡大とする。Golod–Shafarevich[4] が ガロア群 $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ が無限群になる十分条件、即ち K の p 類体塔が無限に続く十分条件、を与えたが $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ の構造については未だによくわかっていない。Fontaine–Mazur が数論的幾何の立場から、ガロア表現に関する次の予想を提出した。

Conjectur(Fontaine–Mazur)

任意の代数体 K と任意の自然数 n に対して$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to GL_n(\mathbf{Z}_p)$ を K の絶対ガロア群の至る所不分岐な p 進表現とする。このとき、Im ρは有限である。

この予想はガロア群を p 進 Lie 群に限定してしまうとそのような無限次不分岐拡大が存在しないことを示唆しており、Golod–Shafarevich の結果と合わせてみると興味深い。Boston[2] が、この予想と関係付けて次の問題を出した。

Question $B(K,p)$

pを奇素数とし、Lを代数体Kの Hilbert p-類体とする。Lの類数がpで割り切れるとき、次の条件 (1)、(2) を満たすガロア拡大$M/L/K$は存在するか？

(1) $[M:L]=p$かつM/Lは不分岐、

(2) $exp\mathrm{Gal}(M/K) = exp\mathrm{Gal}(L/K)$

さらに Boston は同じ論文の中で次のことを注意している。

Remark(Boston)

(i) Fontaine–Mazur 予想が正しく、Kの p–類体塔が無限に続けば $B(K,p)$ は肯定的である。

(ii) Kが 2 次体ならば $B(K,p)$ は肯定的である。

§2 Result

l、pは異なる奇素数で、$p^f \equiv 1 \bmod l$ を満たす最小の自然数 fは偶数であるとする。

Theorem

$K/\mathbf{Q}$はlアーベル拡大でKの類数はpで割り切れているとする。このとき、不分岐非アーベル p拡大 M/Kで $exp\mathrm{Gal}(M/K) = p$を満たすものが存在する。

次の系は定理から容易に導かれる。

Corollary

$K/\mathbf{Q}$がlアーベル拡大ならば Boston の問題 $B(K,p)$ は肯定的である。

定理の証明のために補題を 2 つ用意する。最初の補題は Nomura[6] の主定理である。

補題 **1**(Nomura [6;Theorem 8])

$L/K/\mathbf{Q}$ はガロア拡大で次の条件 (1)(2) を満たす。

(1) 拡大次数 $[K:\mathbf{Q}]$ は p と素。

(2) L/K は不分岐 p 拡大。

さらに、分裂しない中心拡大 $1 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to E \to \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}) \to 1$ が存在するとする。

このとき、ガロア拡大 $M/L/\mathbf{Q}$ で条件

(i) M/L は不分岐、

(ii) $\mathrm{Gal}(M/\mathbf{Q}) \cong E$

を満たすものが存在する。

次の補題は純粋に群論的なもので、名城大学の伊藤先生に教えて頂きました。

補題 **2**(Itô)

l、p は異なる奇素数で、$p^f \equiv 1 \bmod l$ を満たす最小の自然数 f は 1 と異なるとする。群 G は次の条件 (1)(2)(3) を満たすとする。

(1) p シロー群 G_p は正規部分群でかつ初等アーベル p 群。

(2) 商群 G/G_p は巡回群でその位数は l 巾。

(3) $\{ G_p \ni x \,;\, l$ シロー群 G_l の全ての元 σ に対して $\sigma x \sigma^{-1} = x\} = \{1\}$ 。

さらに、$1 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to E \to G \to 1$ を群論的中心拡大とする。このとき、E の p シロー群 E_p は非アーベル群でその指数は p である。

(Theorem の証明の概略) 精細は Nomura[7] を参照して下さい。

Fröhlich の類数公式 (cf.[3;Theorem 3.2 Corollary]) より、$K/\mathbf{Q}$ の部分体 K_1 で条件

(1) $K_1/\mathbf{Q}$ は巡回拡大、

(2) K_1の類数は pで割り切れる、

(3) K_1の任意の真部分体の類数は pで割り切れない。

さらに、このときガロア拡大 $L_1/K_1/\mathbf{Q}$ で条件

(1) L_1/K_1 は不分岐、

(2) $\mathrm{Gal}(L_1/K_1)$ は初等 pアーベル群。

を満たすものが存在する。コホモロジー群に関する Hall の分解定理 (cf[1]) より

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(L_1/\mathbf{Q}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \neq 0$$

従って分裂しない中心拡大

$$1 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to E \to \mathrm{Gal}(L_1/\mathbf{Q}) \to 1$$

が存在し、補題 1 より、ガロア拡大 $M_1/L_1/\mathbf{Q}$ で条件

(1) M_1/L_1 は不分岐、

(2) $\mathrm{Gal}(M_1/\mathbf{Q}) \cong E$、

を満たすものが存在する。

このとき、補題 2 より、Eの pシロー群 E_pの指数は pであり、

$$\mathrm{Gal}(M_1K/K) \cong \mathrm{Gal}(M_1/K_1) \cong E_p.$$

従って定理は証明された。

Remark Kが２次体でpが奇素数のとき、Nomura[5] により、

Kのイデアル類群のp-rank が２以上ならば不分岐ガロア拡大M/Kでそのガロア群が

$$< x, y, \mid x^p = y^p = z^p = 1,\ xyx^{-1} = yz,\ zx = xz,\ zy = yz >$$

となるものが存在することがわかる。このことから、Kが２次体の場合もBoston の問題は肯定的である。

参 考 文 献

[1]. A.Babakhanian, Cohomological Method in Group Theory, Dekker, 1972.

[2]. N.Boston, Some Cases of the Fontaine–Mazur Conjecture, J.Number Theory. **42** (1992) 285–291

[3]. A.Fröhlich, On The Class Group of Relatively Abelian Fields, Quart.J.Math. Oxford.**3** (1952), 98–106

[4]. E.Golod and I.Shafarevich, On class field towers, Amer. Math. Soc. Transl. **48** 91–102

[5]. A.Nomura, On the existence of unramified p–extensions, Osaka.J.Math. **28** (1991) 55–62

[6]. A.Nomura, On the class number of certain Hilbert class fields, Manuscripta.Math. **79** (1993) 379–390

[7]. A.Nomura, A remark on Boston's question concerning to the existence of unramified p–extensions, (in preparation)