数理解析研究所講究録
第 884 巻 1994 年 184-191

On the residue of the Eisenstein series and the Siegel-Weil formula

京都大理　池田　保

Siegel-Weil の公式の analogy を Eisenstein series の留数に対して与えることを考える。ここでは証明を与えることよりもアイデアの説明をすることに力点をおく。

まず古典的な Siegel-Weil の公式を復習することから始める。k を標数 2 でない大局体とし、k の adele 環を $\mathbb{A}$ で表す。$\mathbb{A}/k$ の non-trivial な additive character ψ を固定する。(Q, U) を k 上の rank m の二次形式、H をその直交群とする。$G = \mathrm{Sp}_n$ とおき、$\widetilde{G(\mathbb{A})} = \widetilde{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A})}$ をその metaplectic covering とする。この時、$\widetilde{G(\mathbb{A})}$ の Schwartz space $\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ 上の表現 (Weil 表現) ω_Q が定義できる。

$$\omega_Q\left(\left(\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, \zeta\right)\right)\Phi(X) = \zeta^m \frac{\gamma_Q(1)}{\gamma_Q(\det A)}|\det A|^{\frac{m}{2}}\Phi(XA),$$

$$\omega_Q\left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}, \zeta\right)\right)\Phi(X) = \zeta^m \psi(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(QXB\,{}^tX))\Phi(X),$$

$$\omega_Q\left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}, \zeta\right)\right)\Phi(X) = \zeta^m \mathcal{F}_Q\Phi(-X),$$

$X \in U^n(\mathbb{A})$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, $B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{A})$.

ここで γ_Q は Q に付随した Weil constant で、$\mathcal{F}$ は Fourier transform

$$\mathcal{F}_Q\Phi(X) = \int_{X(\mathbb{A})} \Phi(Y)\psi(\mathrm{tr}(QX\,{}^tY))dY.$$

である。ω_Q は $H(\mathbb{A})$ の $\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ 上への自然な表現

$$\lambda(h)\Phi(X) = \Phi(h^{-1}X)$$

と可換である。$\Phi \in \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ をとる時、$(G(k)\backslash\widetilde{G(\mathbb{A})}) \times (H(k)\backslash H(\mathbb{A}))$ 上の theta 関数

$$\Theta^\Phi(g.h) = \sum_{l \in U^n(k)} \omega_Q(g)\Phi(h^{-1}l)$$

を考える。Θ^Φ の $H(\mathbb{A})$ 上の積分

$$I_Q(g;\Phi)=\int_{H(k)\backslash H(\mathbb{A})}\Theta^\Phi(g,h)\,dh$$

を考えると、これは r を (Q,U) の Witt index とする時、$r=0$ または $m-r>n+1$ の時に（任意の $\Phi\in\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ に対して）絶対収束することが知られている。ここで $H(\mathbb{A})$ の Haar measure dh は $H(k)\backslash H(\mathbb{A})$ の体積が 1 になるように正規化する。一方、$P_G\subset G$ を Siegel parabolic subgroup

$$P_Q=\left\{\begin{pmatrix}A & *\\ \mathbf{0}_n & {}^tA^{-1}\end{pmatrix}\in \mathrm{Sp}_n\right\}$$

とし、$\widetilde{K_G}$ を $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ の standard maximal compact subgroup とする。$\widetilde{G(\mathbb{A})}$ の元 g は $g=pk$, $p\in\widetilde{P_G(\mathbb{A})}$, $k\in\widetilde{K_G}$ と Iwasawa 分解されるが、$p=\left(\begin{pmatrix}A & \mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n & {}^tA^{-1}\end{pmatrix},\zeta\right)$ の時、$a(g)=|\det A|$ は Iwasawa 分解のとりかたによらずに定まる。s を複素変数とし、$s_0=\frac{m-n-1}{2}$ とおき、

$$f_\Phi^{(s)}(g)=a(g)^{s-s_0}\omega_Q(g)\Phi(0)$$

を考える。ω_Q の性質より、$p=\left(\begin{pmatrix}A & \mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n & {}^tA^{-1}\end{pmatrix},\zeta\right)\in\widetilde{P_G(\mathbb{A})}$ の時、

$$f_\Phi^{(s)}(pg)=\zeta^m\frac{\gamma_Q(1)}{\gamma_Q(\det A)}|\det A|^{s+\frac{n+1}{2}}f_\Phi^{(s)}(g)$$

が成り立つ。Eisenstein series

$$E(g;f_\Phi^{(s)})=\sum_{\gamma\in P_G(k)\backslash G(k)}f_\Phi^{(s)}(\gamma g)$$

は $\mathrm{Re}(s)>\frac{n+1}{2}$ において絶対収束し、Φ が $\widetilde{K_G}$-finite ならば、全 s-平面に meromorphic に解析接続される。特に $m>2n+2$ ならば $E(g;f_\Phi^{(s)})$ は $s=s_0$ において絶対収束する。この時は $2r\le m$ より $I_Q(g;\Phi)$ も絶対収束するが、実は

$$E(g;f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0}=I_Q(g;\Phi)$$

であるというのが古典的な Siegel-Weil の公式である。$m\le 2n+2$ の時に $E(g;f_\Phi^{(s)})$ の $s=s_0$ における挙動を考えることにする。m が偶数であって、$I_Q(g;\Phi)$ が（任意の $\Phi\in\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$

に対して） 絶対収束する場合、すなわち $m-r>n+1$, または $r=0$ の場合には Kudla と Rallis により、$E(g;f_{\Phi}^{(s)})$ は $s=s_0$ において正則で、Siegel-Weil の公式

$$E(g;f_{\Phi}^{(s)})|_{s=s_0}=\kappa I_Q(g;\Phi)$$

$$\kappa=\begin{cases}1 & m>n+1\\ 2 & m\leq n+1\end{cases}$$

が成り立つことが証明されている。

さて、Siegel-Weil の公式の "表現論的" な説明を試みよう。$\mathcal{A}(G(k)\backslash\widetilde{G(\mathbb{A})})$ を $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ 上の automorphic form の空間とする。$\mathcal{A}(G(k)\backslash\widetilde{G(\mathbb{A})})$ には $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ が right translation で作用するものとする。Siegel-Weil の公式の右辺 $I_Q(g;\Phi)$ を、$\Phi\in\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ に対して $\mathcal{A}(G(k)\backslash\widetilde{G(\mathbb{A})})$ の元を対応させる写像、すなわち $\mathcal{A}(G(k)\backslash\widetilde{G(\mathbb{A})})$ に値をもつ $U^n(\mathbb{A})$ 上の distribution とみる。この distribution は明らかに $H(\mathbb{A})$-不変であり、$\widetilde{G(\mathbb{A})}$-equivariant でもある。一方、$\widetilde{G(\mathbb{A})}$ 上の関数 f で $p=\left(\begin{pmatrix}A & \mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n & {}^tA^{-1}\end{pmatrix},\zeta\right)\in\widetilde{P_G(\mathbb{A})}$ に対して

$$f(pg)=\zeta^m\frac{\gamma_Q(1)}{\gamma_Q(\det A)}|\det A|^{s+\frac{n+1}{2}}f(g)$$

を満たすもののなすベクトル空間を $I(\chi_Q,s)$ とすると、$\Phi\in\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ に対して $f_{\Phi}^{(s)}$ を対応させる写像

$$\iota_s\colon\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))\to I(\chi_Q,s)$$

は $H(\mathbb{A})$-不変である。$I(\chi_Q,s)$ には $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ が right translation で作用するものとすると $s=s_0$ の時、ι_{s_0} は $\widetilde{G(\mathbb{A})}$-equivariant である。

さて、Rallis の invariant distribution theorem は、$\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ 上の $H(\mathbb{A})$-不変な distribution は ι_{s_0} を経由することを主張する。さらに Kudla-Rallis により、$\widetilde{G(\mathbb{A})}$-equivariant な写像

$$\iota_{s_0}(\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A})))\to\mathcal{A}(G(k)\backslash\widetilde{G(\mathbb{A})})$$

の空間は高々 1 次元であることが知られている。従って、$f_{\Phi}^{(s)}$ に対して $E(g;f_{\Phi}^{(s)})|_{s=s_0}$ を対応させる写像が $\widetilde{G(\mathbb{A})}$-equivariant ならば（これはたとえば $E(g;f_{\Phi}^{(s)})$ が $s=s_0$ で絶対収束であれば明らかに成り立つ。）Siegel-Weil の公式の両辺は定数倍を除いて一致する。これが Siegel-Weil の公式の "表現論的" な説明である。

さてでは $E(g;f_\Phi^{(s)})$ が $s=s_0$ において正則でない場合のことを考えてみよう。$E(g;f_\Phi^{(s)})$ の挙動は $\mathrm{Re}(s)<0$ においては解析が難しいので $s_0\geq 0$, すなわち $m\geq n+1$ の場合を考える。この場合は $E(g;f_\Phi^{(s)})$ は $s=s_0$ において高々 1 位の極をもつことがわかる。従って $\Phi\in\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ に対して $\mathrm{Res}_{s=s_0}E(g;f_\Phi^{(s)})$ を対応させれば $H(\mathbb{A})$-不変な写像

$$\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))\to\mathcal{A}(G(k)\backslash\widetilde{G(\mathbb{A})})$$

を得る。まえにも述べたように $m-r>n+1$ ならこの留数はつねに 0 なので、$m-r\leq n+1$ であるとする。この時、$\mathcal{H}$ を hyperbolic plane とする時、$Q=Q'\oplus\mathcal{H}^{m-n-1}$ となる二次形式 Q' が存在する。

さて、intertwining operator $M_w:I(\chi_Q,s)\to I(\chi_Q,-s)$ を $f\in I(\chi_Q,s)$ に対して

$$M_wf(g)=\int_{N_G(\mathbb{A})}f(w^{-1}ng)\,dn,$$

$$N_Q=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n & B\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n\end{pmatrix} B={}^tB\right\},$$

$$w=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

で定義する。M_w は $\mathrm{Re}(s)>\frac{n+1}{2}$ で絶対収束し、全 s-平面に meromorphic に解析接続できる。Kudla と Rallis によれば、$M_wf_\Phi^{(s)}$ は $s=s_0$ において高々 1 位の極をもち、$s=s_0$ における留数は $\iota_{-s_0}(\mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))$ に属する。ここで U' は Q' の underlying vector space である。さらに、Φ によらない定数 α が存在して、

$$\mathrm{Res}_{s=s_0}M_wf_\Phi^{(s)}=f_{\Phi'}^{(-s_0)},$$

となる $\Phi'\in\mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))$ をとれば、

$$\mathrm{Res}_{s=s_0}E(g;f_\Phi^{(s)})=\alpha I_{Q'}(g;\Phi')$$

が成り立つことが示されている。ここで、右辺の theta integral は一般に発散するのであるが、適当な意味で regularize して、有限な automorphic form を得ることができることも示されている。

従って、$\alpha\Phi'$ を具体的に与えることができれば Eisenstein series の留数に対して Siegel-Weil の公式が得られるわけである。以下、$m-r=n+1$ と仮定する。この場合は Q' は

anisotropic となるので、 $I_{Q'}(g;\Phi')$ は絶対収束する theta integral で表される。直和分解 $Q=Q'\oplus\mathcal{H}^r$ において $\mathcal{H}^r$ を互いに complementary な maximal totally isotropic subspace X と Y の直和に分解する。

$$Q=Q'\oplus Y\oplus X$$

$H=O_Q$ の元で X を stabilize するものからなる部分群を P, また X と Y を共に stabilize するものからなる部分群を M とおく。$\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ から $\mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))$ への写像 $\pi_Q^{Q'}$ を

$$\pi_Q^{Q'}\Phi(u')=\int_{X^n(\mathbb{A})}\Phi\begin{pmatrix}u'\\0\\x\end{pmatrix}dx$$

で定義する。また、 $H(\mathbb{A})$ の極大 compact 部分群 K で Iwasawa 分解 $H(\mathbb{A})=P(\mathbb{A})K$ が成り立つものをとり、

$$\pi_K\Phi(u)=\int_K\Phi(ku)dk$$

とおく。ここで K の Haar measure dk は K の体積が 1 になるよう正規化する。$H'=O_{Q'}$ とおき、 積分

$$I_{Q'}(g;\pi_Q^{Q'}\pi_K\Phi)$$

を考える。この積分は $H(\mathbb{A})$-不変であることがわかるので、いままでに述べたことより、Φ によらない定数 c が存在して、

$$\mathrm{Res}_{s=s_0}E(g;f_\Phi^{(s)})=cI_{Q'}(g;\pi_Q^{Q'}\pi_K\Phi)$$

が成り立つことがわかる。以下、我々はさらにこの定数 c を具体的に与えることができる。さて、 P の unipotent radical を N とすると $P=MN$ である。$H'(\mathbb{A})$ 上には $H'(k)\backslash H'(\mathbb{A})$ の体積が 1 になるよう正規化された Haar measure dh' を与え、$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ 上には標準的な Tamagawa measure dm を与える。これにより、$M(\mathbb{A})\simeq H'(\mathbb{A})\times\mathrm{GL}_(\mathbb{A})$ 上に積測度 $dh'dm$ が定まる。また、$N(\mathbb{A})$ 上には $N(k)\backslash N(\mathbb{A})$ の体積が 1 になる Haar measure dn を与えておく。$P(\mathbb{A})$ 上の measure $dp=dh'dmdn$ は左不変であるので

$$\int_{H(\mathbb{A})}f(h)dh=c_K\int_K\int_{P(\mathbb{A})}f(pk)dpdk,\quad\forall f\in L^1(H(\mathbb{A}))$$

となる定数 c_K が存在する。この時上の定数 c は実は c_K に等しい。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 1: $m-r=n+1$ とする。$\Phi \in \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ に対し

$$\mathrm{Res}_{s=s_0} E(g; f_\Phi^{(s)}) = c_K I_{Q'}(g; \pi_Q^{Q'} \pi_K \Phi)$$

が成り立つ。

この定理の証明は rkQ' に関する帰納法による。rk$Q'=0$ の場合は両辺は共に定数となるので両辺を直接計算することにより証明することができる。rk$Q'>0$ の場合は両辺の Fourier-Jacobi 係数をとって m' と n が小さい場合に帰着することができる。

さらに我々は c_K の値を具体的に計算することができる。Q を定数倍しても $H=O_Q$ は同形なので m が奇数の場合は $\det Q = 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} \mod (k^\times)^2$ と仮定してよい。k の各素点 v に対して Q_v は

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \underbrace{ \iddots }_{} & \\ & & & \underbrace{1 \quad\quad}_{r} & & \\ & & Q'_v & & & \\ & 1 & & & & \\ \iddots & & & & & \\ \underbrace{1 \quad \iddots \quad 1}_{r} & & & & & \end{pmatrix}.$$

と同値であり、Q'_v は

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & 1 & & \\ & & Q^0_v & & & \\ & 1 & & & & \\ \iddots & & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}.$$

の形の二次形式で Q^0_v が anisotropic となるものと同値である。v が archimedean の時は $Q^0_v = \pm \mathbf{1}_{l_v}$ としてよい。v が complex なら $l_v \le 1$ である。$H(k_v)$ の極大 compact 部分群 K_v を

$$K_v = \begin{cases} O_Q(\mathbb{R}) \cap O(m) & k_v = \mathbb{R} \\ O_Q(\mathbb{C}) \cap U(m) & k_v = \mathbb{C} \end{cases}$$

と決める。v が non-archimedean の場合は rk$Q^0_v \le 4$ である。k_v の maximal order, その maximal ideal を $\mathcal{O}_v$, $\mathcal{P}_v$ で表す。

$\boxed{0}$ rk$Q^0_v = 0$ の場合。この時は K_v を $\mathcal{O}_v^m$ の stabilizer とする。

$\boxed{1}$ $\mathrm{rk}Q_v^0=1$ の場合。$Q_v^0=2$ としてよい。この時も K_v を $\mathcal{O}_v^m$ の stabilizer とする。

$\boxed{2}$ $\mathrm{rk}Q_v^0=2$ の場合。この時は Q_v^0 は k_v のある 2 次拡大 F_v/k_v の norm 形式 N_{F_v} の定数倍に等しい。

$$Q_v^0=2\varepsilon N_{F_v},\quad \varepsilon_v\in k_v^\times$$

とする。F_v/k_v が分岐拡大の場合は $\varepsilon_v\in\mathcal{O}^\times$ としてよい。F_v/k_v が不分岐拡大の場合は $\varepsilon_v\in\mathcal{O}^\times$ であるかまたは ε_v は k_v の素元であるとしてよい。この時は K_v は $\varepsilon_v\mathcal{O}^{\frac{m-2}{2}}\oplus\mathcal{O}_{F_v}\oplus\mathcal{O}^{\frac{m-2}{2}}$ の stabilizer とする。

$\boxed{3}$ $\mathrm{rk}Q_v^0=3$ の場合。$\mathbb{D}$ を k_v 上の四元数体とし、$\mathrm{tr}_{\mathbb{D}}$, $N_{\mathbb{D}}$ を $\mathbb{D}$ 上の被約 trace, 被約 norm とする。$\mathbb{D}_0=\{x\in\mathbb{D}|\mathrm{tr}_{\mathbb{D}}x=0\}$ とおくと Q_v^0 は二次形式 $(\mathbb{D}_0,-2N_{\mathbb{D}})$ としてよい。この場合は極大 compact 部分群の取り方は 2 通りある。$K_v^{(1)}$ を $\mathcal{O}^{\frac{m-3}{2}}\oplus(\mathcal{O}_{\mathbb{D}}\cap\mathbb{D}_0)\oplus\mathcal{O}^{\frac{m-3}{2}}$ の stabilizer, $K_v^{(2)}$ を $\mathcal{P}^{\frac{m-3}{2}}\oplus(\mathcal{P}_{\mathbb{D}}\cap\mathbb{D}_0)\oplus\mathcal{O}^{\frac{m-3}{2}}$ の stabilizer とする。ここで $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$, $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}$ は $\mathbb{D}$ の maximal order, その maximal ideal を表す。

$\boxed{4}$ $\mathrm{rk}Q_v^0=4$ の場合。この時は $Q_v^0=(\mathbb{D},N_{\mathbb{D}})$ としてよい。K_v を $\mathcal{O}^{\frac{m-4}{2}}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{D}}\oplus\mathcal{O}^{\frac{m-4}{2}}$ の stabilizer とする。

このように K_v をとり、$K=\prod_v K_v$ とおく時、c_K の値は次のようになる。まず $\mathrm{rk}Q'$ が奇数の場合を考える。

定理 2: $m'=\mathrm{rk}Q'$ は奇数であるとする。$m'=1$ ならば

$$c_K=\frac{1}{2}\frac{\rho_k}{\xi_k(2r)}\prod_{i=1}^{[\frac{r-1}{2}]}\frac{\xi_k(2i+1)}{\xi_k(2r-2i)}$$

であり、$m'\geq 3$ ならば

$$\begin{aligned}c_K=&\frac{\rho_k}{\xi_k(m')}\prod_{i=2}^{r}\frac{\xi_k(i)}{\xi_k(m'+i-1)}\prod_{i=1}^{[\frac{r+1}{2}]}\frac{\xi_k(m'+2i-2)}{\xi_k(2r+m'-2i+1)}\\&\times\prod_{v\in\mathfrak{S}_f^{(1)}}q_v^{-r}\frac{\zeta_v(2r+m'-1)}{\zeta_v(m'-1)}\\&\times\prod_{v\in\mathfrak{S}_f^{(2)}}q_v^{-2r}\frac{\zeta_v(r+\frac{m'-1}{2})}{\zeta_v(\frac{m'-1}{2})}\\&\times\prod_{v\in\mathfrak{S}_\infty}\prod_{j=1}^{r}\prod_{i=1}^{[\frac{l_v-1}{4}]}\frac{m'-l_v+2j+4i-2}{m'+l_v+2j-4i-2}\end{aligned}$$

である。ここで $\mathfrak{S}_f^{(1)}$（または $\mathfrak{S}_f^{(2)}$ ）は k の有限素点 v で $\mathrm{rk}Q_v^0 = 3$ で $K_v = K_v^{(1)}$（または $K_v = K_v^{(2)}$ ）となるものの集合、$\mathfrak{S}^\infty$ は k の実素点の集合とする。また、

$$\zeta_v(s) = \begin{cases} (1-q_v^{-s})^{-1} & v < \infty, \\ \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}) & v = \mathbb{R}, \\ 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s) & v = \mathbb{C}, \end{cases}$$

$$\xi_k(s) = |\mathfrak{D}_k|^{\frac{s}{2}} \prod_v \zeta_v(s),$$

$\mathfrak{D}_k$ は k の discriminant, ρ_k は $\xi_k(s)$ の $s=1$ における留数である。

$m' = \mathrm{rk}Q'$ が偶数を考える。k の拡大 $F = k(\sqrt{(-1)^{\frac{m}{2}}\det Q})$ に対応する $\mathbb{A}^\times/k^\times$ の character を χ_Q とする。ただし、$F = k$ の場合は $\chi_Q = 1$ とする。χ_Q の conductor を $\mathfrak{f}$ とする。$\mathfrak{S}_f^u$ を k の有限素点 v で $\mathrm{rk}Q_v^0 = 2$ で F_v/k_v が不分岐二次拡大で $\varepsilon_v \notin \mathcal{O}_v^\times$ であるものの集合、$\mathfrak{S}_f^q$ を k の有限素点 v で $\mathrm{rk}Q_v^0 = 4$ であるものの集合とする。また、$\mathfrak{S}_\infty^+$（または $\mathfrak{S}_\infty^-$ ）を k の実素点 v で $l_v \equiv 0 \mod 4$（または $l_v \equiv 2 \mod 4$ ）となるものの集合とする。

定理 2:　$m' = \mathrm{rk}Q'$ は偶数であるとする。$m' = 0$ ならば

$$c_K = \frac{\rho_k}{\xi_k(r)} \prod_{i=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \frac{\xi_k(2i+1)}{\xi_k(2r-2i)}$$

であり、$m' \geq 2$ の場合は

$$\begin{aligned} c_K =& |\mathfrak{f}\mathfrak{D}_k|^{-\frac{r}{2}} \frac{\rho_k}{\xi_k(m')} \frac{L(\frac{m'}{2},\chi_Q)}{L(r+\frac{m'}{2},\chi_Q)} \prod_{i=2}^{r} \frac{\xi_k(i)}{\xi_k(m'+i-1)} \prod_{i=1}^{[\frac{r}{2}]} \frac{\xi_k(m'+2i-1)}{\xi_k(2r+m'-2i)} \\ &\times \prod_{v\in\mathfrak{S}_f^u} q_v^{-r} \\ &\times \prod_{v\in\mathfrak{S}_f^q} q_v^{-r} \frac{\zeta_v(r+\frac{m'}{2}-1)\zeta_v(r+\frac{m'}{2})}{\zeta_v(\frac{m'}{2})\zeta_v(\frac{m'}{2}-1)} \\ &\times \prod_{v\in\mathfrak{S}_\infty^+} \prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{\frac{l_v}{4}} \frac{m'+2j-4i}{m'+2j+4i-4} \\ &\times \prod_{v\in\mathfrak{S}_\infty^-} \prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{\frac{l_v-2}{4}} \frac{m'+2j-4i-2}{m'+2j+4i-2}. \end{aligned}$$

である。