数理解析研究所講究録
第 885 巻 1994 年 235-247

統計演算子の定義と量子的測定

近大・理工学部　牧　二郎（Ziro MAKI)

§1　序論

量子力学が物理的実在の世界にかかわる理論であるためには、この理論にふくまれる物理量（限定的にはオブザーバブル）を測定する手段が（量子力学に従う）1つの物理的過程として与えられていなければならない。すなわちそのオブザーバブルがその測定の対象となる系（S）が与えられたとして、測定器械（M）をSと相互作用させ、Sのオブザーバブルに関する知識（実験結果）を得る過程を「測定」と呼ぶが、このとき何が測定できる量であるかは‘理論自体によって定められる’（A. Einstein）ことであると共に、測定を通じて系Sの実在性が客観的事実として定着される。この事情はすべての物理理論に共通であるが、量子力学では（一般に）非可換な作用素として表現されるオブザーバブル（複数）があらわれるところに古典論との相違があり、このことと量子論の

確率的性格とは深く結びついている。

量子力学の通常の公理論的構成では、測定結果が一般には一意確定的とならず一定の頻度比をもって分布することを（経験法則として）容認し、（規格化正値）1次汎関数によってオブザーバブルの測定結果の期待値を特定化する概念として系Sの”状態”ρが定義される。理論で求めたρを実証（ないし反証）するためにはSの統計集団を用意することが必要である。従って一般の状態ρの主語たるべき系Sとは、正確には系Sの統計集団である。純粋状態は一般の状態の特殊な場合として定義され、状態が‘純粋’でない場合にこれを‘混合’と呼ぶことも周知の通りである。この公理論的構成には、素朴な表現として、ボルンの確率規則がふくまれていることは断るまでもあるまい。

ところで他方、可換オブザーバブルの最大組の1つをとれば、夫々について確定した固有値の組に対応する状態が一意的に定まることは、この状態にある純粋集団を実現する実験過程が存在することと共に量子力学の基本仮定の一つである。したがって、この過程の存在を出発点の要請として量子力学の論理体系を組み立てることも可能であって、古くからJ. Schwingerの「測定代数の方法」として知られている。

この報告は、この方法を一部拡張することにより、一般の

統計集団を直接に与える統計演算子の定義法を考察しようとするものである。得られる結果は通常の定義法からのものと異ならないが、期待値公理（または確率規則）を経由する必要がない点が注目される。

§2　測定記号の導入とその‘代数’

測定は個々の系に対して行われ、それは countableで、かつ repeatable であると仮定する。以下、Sの可換オブザーバブルの最大組の一つを簡単のため1つのオブザーバブルAによって代表させ、対応するエルミート作用素Aの固有値（a_1, a_2, …）は有限離散的かつ非縮退とする。以下の討論の範囲内ではこの単純化は一般性を失わない。

いまSの物理量Aに或る（一回の）測定が行われたとすると、測定器の指針座標（a_1に対しては$\underline{a_1}$, …などと書く）が$\underline{a_k}$ を示したときSは「固有値a_kに対応する状態にある」と言える（これが理想的測定の意味である。）から、このSを$S(\underline{a_k})$と書く。測定器Mはこのとき指針$\underline{a_k}$を示しているから、これを同様に$M(\underline{a_k})$と書こう。するとこの一回の測定操作（$m(\underline{a_k};\underline{a_k})$と記す）によって与えられるもの（物理的対象）は$S(\underline{a_k})$と$M(\underline{a_k})$の一組みである。以下添字 k を省略するが、この操作と対象との関係を記号的に

$$m(a;\underline{a}) \sim \{S(a);M(\underline{a})\} \tag{1}$$

のように表そう。（〜は givesあるいはrepresents と読む）

この（物理的に同一と見てよい）操作が極めて多数回（回数 $N \gg 1$ ）遂行されれば、それによって得られるものは $S(a)$と$M(\underline{a})$のN組の集合であり、言い換えればN個の組より成るSとMの純粋集団である。以下これを$E(a;\underline{a})$と書く。ここで(1)の左辺$m(a;\underline{a})$の代わりに「測定$m(a;\underline{a})$のN回の遂行」を記号$\mu(a;\underline{a})$で表せば、(1)に代わって

$$\mu(a;\underline{a}) \sim E(a;\underline{a}) \tag{2}$$

なる‘関係’が得られる。この関係〜は、左辺（操作の集合）が、右辺（$S+M$の集合）を‘与える’という物理的意味を持つ。ただ一つの測定 $m(a;\underline{a})$を問題にする場合には、測定遂行後に器械を取り去っても残された対象は状態aにあることは自明であるから、(2)においてSのみの（純粋）集団$E(a)$を残し、$\mu(a;\underline{a})$を略して$\mu(a)$と書き、$\mu(a)\sim E(a)$の関係を置けばよい。Schwinger の測定記号$M(a)$はここでの$\mu(a)$であって「選択的測定」を意味するが、彼の場合、「統計集団を与える」という内容は捨象されている。しかし、ここでは統計集団との対応を保持しつつ議論を進め

る。

［集団の規格化］集団を構成するS（またはM）の個数Nを$N \gg 1$として便宜的な大きさに固定する。やはり$\gg 1$なる他の数N_αから成る集団は、Nに規格化された集団$E(a;\underline{a})$の$N_\alpha / N \equiv \alpha$倍の集団であるから、これを$E(a;\underline{a})_\alpha$と書き、対応する測定記号を$\mu(a;\underline{a})$の「$\alpha$倍」として$\alpha\mu(a;\underline{a})$と表す。こうして記号$\mu(a;\underline{a})$に正の有理数$\alpha$を掛ける演算が定義される。すなわち(2)と同様に次の対応

$$\alpha\mu(a;\underline{a}) \quad \sim \quad E(a;\underline{a})_\alpha \tag{3}$$

が（定義により）成立する。

［集団の和］Aの他の固有値a'（$\neq a$）に対しても同様に規格化された集団$E(a';\underline{a}')$やそのβ倍の集団$E(a';\underline{a}')_\beta$を考える。すると$E(a;\underline{a})_\alpha$と$E(a';\underline{a}')_\beta$とを一まとめにした集団もまた実現可能である。それを$E(a;\underline{a})_\alpha + E(a';\underline{a}')_\beta$と書き、この‘和集団’を与える測定記号を「$\alpha\mu(a;\underline{a})$と$\beta\mu(a';\underline{a}')$との和」と呼び、同じ和記号を用いて

$$\alpha\mu(a;\underline{a}) + \beta\mu(a';\underline{a}') \tag{4}$$

と記す。記号＋による演算は数に対する＋と同じである。こ

の「和」は、Aとは異なる他のオブザーバブル（の最大可換の組）Bに対する測定記号$\mu(b;\underline{b})$などに拡張してよい。

上式で$\alpha+\beta=1$ならば、それが与える集団（複合集団）も規格化された集団である。

［逐次測定］$\mu(a;\underline{a})$なる選択測定によって得られた集団の個々の系に対して$m(a';\underline{a'})$なる測定を遂行する場合を考える。二度目の測定の集合を表す記号$\mu(a';\underline{a'})$を最初の測定記号の左に置き、$\mu(a';\underline{a'})\circ\mu(a;\underline{a})$なる「積」を約束する。第二の測定は最初の測定の完了した系から次々に遂行されるものとする。ただし両測定間の系の時間的変化は衝撃的測定の近似の下で無視する。このとき理想的測定の物理的性質から$a'=a$ならば

$$\mu(a;\underline{a})\circ\mu(a;\underline{a})=\mu(a;\underline{a}) \qquad \text{（ベキ等性）} \qquad (5)$$

$a'\neq a$ならば

$$\mu(a';\underline{a'})\circ\mu(a;\underline{a})=0 \qquad \text{（直交性）} \qquad (6)$$

が成立する。上式の右辺0は、対応する集団が存在しないこと（あるいは空集団に対応すること）を示す。

（注意）

1．Aと異なるオブザーバブルBの測定$\mu(b;\underline{b})$と$\mu(a;\underline{a})$

との「積」は定義しない。

2. $\alpha\mu(a;\underline{a})\circ\beta\mu(a;\underline{a})=(\alpha\beta)\mu(a;\underline{a})$の意味は$\alpha<\beta$の場合には明らか。

3. ここに述べた測定記号間の関係が代数的に閉じるためには Schwinger が行ったように選択的測定とは異なる測定記号を補わなければならない。

§3 測定記号を表す作用素

測定記号の関係(4)(5)(6)は、SとMのヒルベルト空間$\mathcal{H}^S$と$\mathcal{H}^M$とのテンソル積空間における一次作用素のそれによって再現され、とくに(5), (6)から明らかなように$\mu(a;\underline{a})$に対応する作用素は

$$M[a]\equiv|a\rangle\langle a|\otimes|\underline{a}\rangle\langle\underline{a}| \tag{7}$$

として与えられる。ただし$A|a\rangle=a|a\rangle$であり、$|\underline{a}\rangle$は対応するMの指針状態とする。これは簡略化のためであり、$|\underline{a}\rangle\langle\underline{a}|$は測定器の他の変数について跡をとったもので置き換えるのが正しい。議論の詳細はここでは省略する。

この対応を認めれば、われわれは(2)を

$$M[a]\sim E(a;\underline{a}) \tag{8}$$

に読み替えてよい。すなわち作用素$M[a]$は（純粋）集団$E(a;\underline{a})$を与える。他の式も同様。

$M[a]$は$\mathcal{H}^S \otimes \mathcal{H}^M$における他の一次作用素と共に環をなしているが、この中に統計集団を与える測定記号（とその関係）に対応する要素がふくまれるわけである。これは例えば複素数体の中に物を数えるための正整数がふくまれていることに似ている。

さきに$\mu(b;\underline{b})\circ\mu(a;\underline{a})$なる積は定義しないと述べたが$M[a]$, $M[b]$等には任意の積が定義され、(8)によって１つの統計集団に対応するものもふくまれる。

$S+M$の集団$E(a;\underline{a})$から測定器部分を取り去ることは、$M[a]$において$M[a]=|a\rangle\langle a|$のみを残すことで、式(7)の場合には指針状態$|\underline{a}\rangle\langle\underline{a}|$の trace をとればよい。

一般の複合集団

$$\sum_n w_n E(n;\underline{n}) \quad (\sum w_n=1,\ w_n \geqq 0) \qquad (9)$$

から測定器を取り去ったものが<u>混合</u>であって、これを表す作用素は(9)に対応する$\sum w_n M[n]$において測定器部分の trace をとれば得られる：

$$\sum_n w_n \mathrm{tr} M[n] \sim \sum w_n E(n). \qquad (10)$$

ここで和の各項における$M[n]$ $(=|n\rangle\langle n|\otimes|\underline{n}\rangle\langle\underline{n}|)$の標識$n$ならびに$\underline{n}$は$n$毎に異なるオブザーバブルに対応してもよく、一般には$\langle n|n'\rangle\neq 0$ $(n\neq n')$である。しかし測定器の目盛$\underline{n}$については、異なる$\underline{n}$, $\underline{n}'$に対応する測定器の状態は十分良い近似で incoherent であると考える。（さもなければ(9)のごとき複合集団を用意することはできない。）$\mathrm{tr}M[n]$を単に$|n\rangle\langle n|$に置き換えたものが通常用いられる統計作用素ρである：

$$\rho=\sum_n w_n|n\rangle\langle n|. \qquad (11)$$

（注意）

1. (10)の対応を導く過程で確率規則（または期待値公理）は用いられていない。
2. 選択的測定を表す$M[a]$を用いて

$$M_A=\sum_a M[a] \qquad (12)$$

を定義すれば、これは Schwinger の非選択 (nonselective) 測定を表し$M_A{}^2=M_A$を満たす。彼の与えたM_Aは

$$M_A=\sum_a |a\rangle\langle a|e^{i\phi_a} \quad (\phi_a\text{は乱雑位相}) \qquad (12')$$

であったが、乱雑位相の意味が明らかでなく位相相関の消去

も証明されていないので、(12)の方が正しい表現であると考える。この他にも種々異なる測定作用素を導入することができる。

§4 量子的測定と確率規則

測定過程は

$$|b\rangle\langle b| \otimes |\underline{0}\rangle\langle \underline{0}| \to \sum_{a} |\langle a|b\rangle|^{2} M[a] \qquad (13)$$

と表せる。$|\underline{0}\rangle\langle\underline{0}|$は指針座標 $\underline{0}$ に対応する測定開始前のMの状態である。いわゆる干渉項の消失した右辺を得ることが観測理論の1つのキィ・ポイントであるが、ここでは事実においてこのような状態収縮が実現していることを前提とする。(言い換えれば(13)を与える理論がともかく可能であると想定する。しかし数学的に厳密な取扱いで(13)を証明する満足なモデルは未だ知られていない。そのような理論を完成することは本報告とは別の課題である。)

(13)の右辺に対応する複合集団はこれまでの議論により

$$\sum_{a} w_{ab} E(a;\underline{a}) \qquad w_{ab} \equiv |\langle a|b\rangle|^{2} \qquad (14)$$

であり、w_{ab}はこの集団の中で系が状態$|a\rangle$に見出される頻度分岐比(経験的確率)に他ならない。

ここで測定されるべき状態 $|b\rangle$ は物理的に実現されるどんな状態でもよい。これをあらためて $|\phi\rangle$ と書けば、$|\phi\rangle$ は何らかのオブザーバブルの固有ベクトルとなっていると考えてよいからである。荒木のＥＴＨ講義(1962)にこの言及があり朝永の量子力学Ⅱ(1966)ではこれが積極的に仮定されている。

これまで一般に $[A,B]\neq 0$ と仮定してきたが，$|\langle a|b\rangle|^2$ が (0,1)の nontrivial な値を取り得るのはそのためである。すなわちあるオブザーバブル B の固有状態によって用意された純粋集団に対して、B と非可換なオブザーバブル A の測定をするために確率 $|\langle a|b\rangle|^2$ があらわれることになる。仮りに $[A,B]=0$ ならば $|\langle a|b\rangle|^2$ は 0，1 以外の値を持つことは不可能である。

こうして $|\langle a|b\rangle|^2$ に物理的意味がつけられたから、(14)の複合集団から測定器を取り去れば通常の統計作用素(11)から任意のオブザーバブルの平均値（期待値）$\mathrm{Tr}(\rho A)$ を計算する場合にあらためて確率規則を仮定する必要はない。

われわれの場合が通常の論理構成と異なる一つの点は、測定（とそれに伴う状態収縮）に fuzzy な因子があれば、$|\langle a|b\rangle|^2$ を確率と同定することも近似的な言明となることである。この問題については別の機会に論じたい。

§5　結び

選択的測定（の集合）$\mu(a;\underline{a})$に作用素$M[a]$を対応させる議論（§3）は plausibility argument であるから、むしろこの対応を極大観測による状態の一義的決定という量子力学の基本仮定の数学的表現として$M[a]$の存在を仮定することが論理的であろう。これは抽象的には

「一般に任意の波動関数ψで表される状態は或る命題が確かに実現される状態であると考えることが許されよう」

という伏見の表現（「確率論及統計論」1942年）に沿っていえば「或る命題が確かに実現される状態」を作り出す操作に対応する作用素の存在を要請することと同等である。量子力学は、他の理論と同じく、物理的に実現される状態を同定することが可能な理論でなければならないから、このような要請は自然であろう。本報告は量子力学の構成に関するこのような立場からの一つの考察である。

小嶋　泉氏（京大数理研）には荒木氏の文献に関し御教示を得た。松井伸之氏（近大・理工）には原稿作製に御協力を頂いた。両氏ならびに研究会世話人の方々にお礼申し上げる。

文献

(§1)　J.Schwinger, Proc. Nat.Acad.Sc.45(1959),1542;

46(1960),257,570.

K.Gottfried, *Quantum Mechanics*,Vol.1(Benjamin, 1966).

(§§2,3) J.Schwinger, *ibid*.

Z.Maki, Prog.Theor.Phys.84(1990),574.

Z.Maki, preprint YITP/K-948(Sept.1991).

(§4) H.Araki, Einfuhrung in die Axiomatische Quantenfeld theorie Ⅰ,Ⅱ, ETH lecture note (1962).

S.Tomonaga, 量子力学[Ⅱ](みすず書房,1963).

(英訳) Quantum Mechanics Vol.Ⅱ(North-Holland, 1966).

Z.Maki,Prog.Theor.Phys.82(1989),638; YITP/K-948.

(§5) 伏見康治, 「確率論及統計論」(河出書房, 1942)

K.Husimi, Proc.Phys-Math Society of Japan,3rd Series 19(1937),766.

牧 二郎, 『科学基礎論研究』(No.75)20(1990) No.1,1;(No.77)20(1991)No.3,21.

他にも多くの文献を挙げたいが本稿では省略した。