数理解析研究所講究録
第 886 巻 1994 年 178-186

行列の加法的数論にあらわれる Dirichlet 級数について

江上繁樹
Shigeki EGAMI

§0　正値対称行列の加法的数論を、代数体の加法的数論のアナロジーとみる考え方は三井[Mi]で展開されており、それに従えば、代数体の場合、有効であった種々の解析的手段の行列の場合の類似を求めることが重要になる。[Mi]の序文にはそのような例として Dirichlet 級数

$$\sum_{\substack{T\in S_n(\mathbb{Z})\\ T>0}} \frac{1}{\mathrm{tr}(T)^s} \qquad (1)$$

$S_n(\mathbb{Z})=\{X\in M_n(\mathbb{Z}) \mid {}^tX=X\}$
'$T>0$' は「T が正定値」をあらわす

の解析接続の問題があげられている。この級数は行列の分割数を、代数体の場合と同じような方法で取り扱おうとするとき、自然にあらわれるものであり、代数体の場合、特に 2 次体 K の場合、対応する級数は Hecke によってくわしく研究されたもの $\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathcal{O}_K,\ \alpha,\alpha'>0}(\alpha+\alpha')^{-s}$

* 本研究は科学研究費補助金（一般研究(C), No. 05640023）を受けた。

，ただし、$\mathfrak{O}_K$はKの整数環，α'はαの共役元，になる。Heckeはこの級数をKの単数群に関するFourier解析を応用することにより研究し、全s－平面への解析接続を示した。同様のことを(1)に対して行なおうとすれば、$g \in SL_n(\mathbb{R})$のパラメータを導入し

$$F(s,g) = \sum_{\substack{T \in S_n(\mathbb{Z}) \\ T>0}} \frac{1}{\operatorname{tr}({}^t g^{-1} T g^{-1})^s} \qquad (3)$$

を考えることになる。容易にわかるように$F(s,g)$は右$SO_n(\mathbb{R})$不変な$SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$の保型関数となり，$L^2(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z}))$のスペクトル分解がFourier解析の自然な対応物と考えられる。この考え方を完全に実行するにはまだいくつかの困難が予想され，実際，(1)の解析接続の問題はどんな$n \geq 2$に対しても解決されていない。この小論では$n=2$の場合で，$S_2(\mathbb{Z})$のかわりにある条件をみたす2次対称行列空間のlatticeをとったものを考える（残念ながら$S_2(\mathbb{Z})$の場合は除外される）。このとき，解析接続の問題が上のような考え方で実際解決される。以下でその概略を見ることにしよう。

§1.

$$S=\{X\in M_2(\mathbb{R})\mid {}^tX=X\}$$

$X\in S$に対し、$X>0$でXが正定値であることを表わす。

$$S^{(0)}=\{X\in S\mid \det X>0\}$$
$$S^{(1)}=\{X\in S\mid \det X<0\}$$

また、

$$S_+^{(0)}=\{X\in S^{(0)}\mid X>0\}$$
$$S_-^{(0)}=\{X\in S^{(0)}\mid -X>0\}$$

とおく。Sには$G=SL_2(\mathbb{R})$が$X\longmapsto {}^tgXg$で作用する。LをSの lattice とするとき$\mathrm{Aut}(L)=\{g\in G\mid {}^tgLg=L\}$とする。$L$に対して、仮定

$\boxed{(*)\quad G/\mathrm{Aut}(L)\text{ は compact}}$

をおく。$L=S_2(\mathbb{Z})$（対称整数行列全体）のときは$\mathrm{Aut}(L)=SL_2(\mathbb{Z})$となり、この条件をみたさない。また、$(*)$をみたす例としては、$q,r\in\mathbb{N}$が条件

$$x^2-qy^2-rz^2+qru^2\neq 0\quad (x,y,z,u)\in\mathbb{Z}^4\setminus\{0\}$$

をみたすとき

$$L_{q,r}=\left\{\begin{pmatrix}x-\sqrt{q}\,y & \sqrt{r}\,z\\ \sqrt{r}\,z & x+\sqrt{q}\,y\end{pmatrix}\,\middle|\, x,y,z\in\mathbb{Z}\right\}$$

がそうなっている。([H2],)

いま、Γを$\mathrm{Aut}(L)$の指数有限の任意の部分群とし、固定する。$(*)$のかわりに"G/Γ は compact"といっても同じ

である．

級数

$$F(s,g,L)=\sum_{x\in L\cap S_+^{(0)}}\frac{1}{tr({}^tg x g)^s}$$

を考える。この級数が $\mathrm{Re}\, s>3$ で絶対かつ広義一様に収束すること，$\mathrm{Re}\, s>2$ で $s=3$ における1位の極を除いて正則な関数に解析接続されることは格子点に関する初等的考察より容易にわかる。また，明らかに

$$F(s,\gamma g k,L)=F(s,g,L),\quad {}^\forall k\in SO_2(\mathbb{R}),\ \gamma\in\Gamma.$$

また，$F\left(s,\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}}\end{pmatrix},L\right)=f(s,x+iy,L)$ とおくと

$f(s,z,L)\in L^2(\Gamma\backslash H)$ （Hは複素上半平面）がわかる。

§2. $L^2(\Gamma\backslash H)$のスペクトル分解の応用

$\Gamma\backslash H$ 上の関数 $f(z)$, $g(z)$ に対し，内積を

$$\langle f,g\rangle \doteqdot \int_{\Gamma\backslash H} f(z)\overline{g(z)}\frac{dx\,dy}{y^2}$$

とおく．$\|f\|^2=\langle f,f\rangle<\infty$ となる関数全体は Hilbert 空間 $L^2(\Gamma\backslash H)$ をなし，その正規直交基底として，次のような関数の列 $\{\varphi_n\}$ がとれる．（[H1], p3~4）， ① $\varphi_n(x+iy)$ は x, y について実解析的，$\varphi_0 \equiv \left(\int_{\Gamma\backslash H} \frac{dx\,dy}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

②. $\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ とおくとき，$\Delta\varphi_n = -r_n\varphi_n$

となる非負実数 λ_n が存在し，$0 = r_0 < r_1 \leqq \cdots \leqq r_n \leqq \cdots$，

③ $u(z) \in L^2(\Gamma\backslash H) \cap C^2(\Gamma\backslash H)$ のとき Fourier展開

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n(z)$$

は $\Gamma\backslash H$ 上一様，絶対収束する．

これを $f(s, z, L)$ $(\mathrm{Re}\, s > 3)$ に適用する．Fourier係数は Selberg 変換を適用して，次のように計算される．

Prop 1.

$$\langle f(s,\cdot,L), \varphi_n \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)} \Gamma\left(\frac{s-\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-1+\lambda_n}{2}\right)\zeta_+\left(\frac{s}{2}, L, \varphi_n\right)$$

ただし，$\lambda_n = \frac{1}{2} - i\sqrt{r_n - \frac{1}{4}}$，また $\zeta_+(s, L, \varphi_n)$ は次節で定義されるゼータ関数である。

§3. 対称行列の保型形式つきゼータ関数

佐藤 [Sa1] [Sa2] の結果を引用する。

H と $D=\{X\in S_+^{(0)}\mid \det X=1\}$ との対応を

$$X=\begin{pmatrix} y+\frac{x^2}{y} & \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y} & \frac{1}{y}\end{pmatrix} \longleftrightarrow z_X=x+iy$$

によって与える。同値関係 $X_1\sim X_2 \Longleftrightarrow {}^t\gamma X_1\gamma=X_2\ {}^\exists\gamma\in\Gamma$ による L の Γ-不変部分集合 L' の同値類の代表系を $\Gamma\backslash L'$ で表わす。$X\in L\cap S^{(0)}$ に対し、$\varepsilon(X)=\#\{\gamma\in\Gamma\mid {}^t\gamma X\gamma=X\}$ とおく。

$$\zeta_+(s,L,\varphi_n)=\sum_{\Gamma\backslash L\cap S_+^{(0)}}\frac{\varphi_n(z_X)}{\varepsilon(X)\det(X)^s}$$

とおく。このようなゼータ関数は Siegel [Si], Maass [Ma], 新谷[Sh] Hejhal [H2], 佐藤 [Sa1], [Sa2] [Sa3] によって研究された。これについて述べるため、記号を準備する。S において、内積 $\langle X,X^*\rangle=\mathrm{tr}(XwX^*w^{-1})$, ただし $w=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, を考え、この内積に関する L の dual lattice を L^* とおく。$X\in L\cap S^{(1)}$ に対し、$(\det X_1)^{-\frac{1}{2}}X=g_xJ_2{}^tg_x$, ただし $J_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ となるような G の元 g_x をとると、これは $SO_2(1,1)$ の右剰余類として一意的に定まる。$g_x^{-1}\Gamma_xg_x$ は $SO_2(1,1)$ の部分群になり、$SO_2(1,1)/g_x^{-1}\Gamma_xg_x$ の基本領域として、ある正実数 p_x が存在して、$\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\middle|\ 1\leqq a\leqq p_x\right\}$ の形のものがとれる。このとき、$M_X(\varphi_n)$ を

$$M_X\varphi_n = \frac{1}{4}\int_1^{p_X} \varphi_n(t\, g_X^{-1} i)\,\frac{dt}{t}$$

とおく。そして、Zeta 関数 $\zeta_-(s,\varphi_n,L)$ を

$$\zeta_-(s,\varphi_n,L) = \sum_{\Gamma\backslash L\cap S^{(1)}} \frac{M_X\varphi_n}{|\det X|^s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > \tfrac{3}{2})$$

と定義する。また同様に $\zeta_\pm(s,\varphi_n,L^*)$ が定義される。これらはすべて、全平面に有理型に解析接続され、さらに

Prop. 3. (Siegel – Maass – Shintani – Hejhal – Sato)

$$v(L)\begin{pmatrix}\zeta_+(\frac{3}{2}-s,\varphi_n,L)\\ \zeta_-(\frac{3}{2}-s,\varphi_n,L)\end{pmatrix} = 2^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}-2s}\Gamma\left(s+\frac{\lambda_n-1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{\lambda_n}{2}\right)$$

$$\times\begin{pmatrix}\cos\pi s & \dfrac{\pi\,\Gamma(1-\frac{\lambda_n}{2})\sin(\frac{\pi\lambda_n}{2})}{2^{\lambda_n}\Gamma(1-\lambda_n)}\\[2ex] \dfrac{2^{\lambda_n}\Gamma(1-\lambda_n)}{\pi\,\Gamma(1-\frac{\lambda_n}{2})^2}\cos(\frac{\pi\lambda_n}{2}) & \sin(\pi s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_+(s,\varphi_n,L^*)\\ \zeta_-(s,\varphi_n,L^*)\end{pmatrix}$$

$\alpha_n = \max\limits_{z\in\Gamma\backslash H} |\varphi_n(z)|$ とおくと、$\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{2}$ では

$$\zeta_\pm(s,\varphi_n,L) \ll \alpha_n$$

上の関数等式と Phragmén–Lindelöf 定理により。

Cor. 任意の帯領域 $c_1 \leqq \mathrm{Re}\, s \leqq c_2$ について、ある $c>0$ が存在
($\frac{3}{2}$ の近傍は除く)

$$\zeta_+(s,\varphi_n,L) \ll \alpha_n(\mathrm{Im}\, s)^c$$

§3. α_nの評価と主定理.

Fourier展開の収束のため，α_nを評価しなければならないが，Selberg核関数をうまく選び，Fourier展開を考えることにより，次の評価を得る.

Prop.4 任意の$\nu>0$に対し

$$\alpha_n \ll_{\nu} |n|^{-\nu} e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{|m|}}$$

注，最近，Iwaniec氏がこの種のはるかによい評価を得ていることを本橋氏に教示いただいた。

Prop.1 〜 4により，極を除いた任意の領域でFourier展開が広義一様収束することが示され，次を得る

Theorem. $f(s,z)$は全s-平面に有理型に解析接続される.

後記．級数(1)の解析接続の問題は，1982年(頃?)三井先生の数学会での講演の中で述べられました。佐藤(文広)氏は保型形式(2)として考えることの重要性を指摘されました。また，佐藤，荒川両氏には，対称行列のゼータ関数や関連する話題について多くの教示をいただき，深く感謝いたします。

References

[H1]. D.A. Hejhal, The Selberg trace formula for $PGL(2,\mathbb{R})$, Springer Lecture Note 548.

[H2]. ________, Proc. Jap. Acad., 58 (1982), 413–417

[Ma]. H. Maass, Math. Ann 138 (1959), 287–315

[Mi]. T. Mitsui, 学習院大レクチャーノート 1983.

[Sa 1] F. Sato, 2行2列対称行列空間の保型形式つきゼータ関数 (preprint, 1993)

[Sa 2]. ________, Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms (preprint, 1993)

[Sa 3] ________. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (1982), 585–604.

[Sh]. T. Shintani, J. Fac. Sci. Univ Tokyo 22 (1975), 25–65.

[Si]. C.L. Siegel, Math. Z. 44 (1939), 398–426

所属 富山大学工学部, 〒930 富山市五福3190

Address Faculty of Engineering, Toyama Univ.
Gofuku 3190, Toyama, 930