数理解析研究所講究録
第886巻 1994年 201-213

On the sum of four cubes and a product.

Koichi Kawada (University of Tsukuba)
川田 浩一 (筑波大学大学院)

§1. はじめに。

加法的整数論と呼ばれる分野では，Goldbach問題，双子素数問題，Waring問題，加法的約数問題などのように，素数や，平方数，立方数などの巾乗数，あるいは指定された個数の因子の積による和（または差）の形で，自然数を表す問題を扱う。上に例として挙げた有名な問題はいずれも，素数だけの和，立方数だけの和，といったように一種類のタイプの数の和に関する問題であるが，それ以外に，素数と2個の平方数の和などのように異なった種類の数の和（mixed sum などといわれる）に関しても多くの研究がある。

単に mixed sum といってもいろいろな形がありうる。が，自然数Nを指定された形の和で表すときの表し方の個数に対する漸近式（asymptotic formula）を得ることを目標とした場合，この分野での有力な方法であるHardy-Littlewoodの circle methodに関してすでに得られている結果を用いて簡単に扱えるものを

除くと，自然数 N の mixed sum による表し方として次の四種類がある。

（ア） $N = m_1^2 + m_2^3 + m_3^5$ のようないくつかの巾乗数の和。

（イ） $N = p +$（いくつかの巾乗数の和） の形。（ただし，以下 p は常に素数を表す。）

（ウ） $N = n_1 n_2 \cdots\cdots n_\ell +$（いくつかの巾乗数の和） の形。（$\ell \geq 2$，$n_j$ は自然数）

（エ） $N = p + n_1 n_2 \cdots\cdots n_\ell$ の形。（$\ell \geq 2$，n_j は自然数）

このうち本稿では，（イ）および（ウ）の形について扱う。内容の詳しい部分については，プレプリント［6］を参照されたい。

§2. circle method を用いる場合。

自然数 N に対して，

$$N = p + m_1^k + m_2^k + \cdots\cdots + m_u^k \quad (p \text{ は素数},\ k \geq 2,\ m_j \text{ は自然数})$$

の解の個数を $r_{k,u}(N)$ とし，

$$N = n_1 n_2 \cdots\cdots n_\ell + m_1^k + m_2^k + \cdots\cdots + m_u^k \quad (\ell \geq 2,\ k \geq 2,\ n_j, m_j \text{ は自然数})$$

の解の個数を $R_{\ell,k,u}(N)$ とする。これらを扱う際には，u は小さくなるほど，また ℓ は大きくなるほど，問題は難しくなる。

$r_{k,u}(N)$ および $R_{\ell,k,u}(N)$ に対して予想される漸近式がほとんどすべての N について成立することは，$u=1$ の場合の Miech

($k=2$) および筆者 ($k\geq 3$) の議論によりわかっている。そこで，u をどのくらい大きくすれば，すべての(十分大きい) N に対して漸近式を示すことができるか，を考えることにする。まず，この§2では circle method を用いてこの問題を扱う際のポイントについて触れておく。

次のように関数を定義する。

$$P(\alpha)=\sum_{p\leq N} e(p\alpha), \quad D_\ell(\alpha)=\sum_{n\leq N} d_\ell(n)e(n\alpha), \quad F_k(\alpha)=\sum_{m\leq N^{1/k}} e(m^k\alpha)$$

ここで，$e(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$ であり，$d_\ell(n)$ は自然数 n を ℓ 個の自然数の積として $n=n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdots n_\ell$ と表すときの因子の組 $(n_1,n_2,\cdots\cdots,n_\ell)$ の個数である。すると，

$$r_{k,u}(N)=\int_0^1 P(\alpha)F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\,d\alpha,$$

$$R_{\ell,k,u}(N)=\int_0^1 D_\ell(\alpha)F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\,d\alpha$$

とかける。どちらでも同様なので，しばらく $R_{\ell,k,u}(N)$ についてのみかくことにする。

パラメーター Q_1, Q (これらはあとでうまく選ぶわけだが) に対して，

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{q\leq Q_1}\ \bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left[\frac{a}{q}-\frac{1}{qQ},\ \frac{a}{q}+\frac{1}{qQ}\right]$$

$$\mathfrak{m}=\left[\frac{1}{Q},\ 1+\frac{1}{Q}\right]\setminus\mathfrak{M}$$

と定義し，

$$I_{\mathfrak{M}} = \int_{\mathfrak{M}} D_\ell(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\,d\alpha,$$

$$I_{\mathfrak{m}} = \int_{\mathfrak{m}} D_\ell(\alpha) F_k(\alpha)^u e(-N\alpha)\,d\alpha$$

とすれば，

$$R_{\ell,k,u}(N) = I_{\mathfrak{M}} + I_{\mathfrak{m}}$$

となる。$R_{\ell,k,u}(N)$の予想される大きさは$N^{u/k}(\log N)^{\ell-1}$の定数倍くらいなので，$R_{\ell,k,u}(N)$の漸近式を示すためには，

$$I_{\mathfrak{M}} = (\text{期待される主項}) + o\left(N^{\frac{u}{k}}(\log N)^{\ell-1}\right)$$

$$I_{\mathfrak{m}} = o\left(N^{\frac{u}{k}}(\log N)^{\ell-1}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

を示せばよいわけである。この2つを比べると後者のほうが難しく，結局$R_{\ell,k,u}(N)$に対する漸近式が得られるためのuの条件は，①が示せるuの条件ということになる。そこで，いわゆる minor arc 上の積分$I_{\mathfrak{m}}$をどうおさえるかが問題になる。

その$I_{\mathfrak{m}}$をおさえる簡単な方法は二つあり，一つは Cauchy-Schwartz の不等式を用いて，

$$|I_{\mathfrak{m}}| \le \left(\int_0^1 |D_\ell(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathfrak{m}} |F_k(\alpha)|^{2u} d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

とするものである。ここで，

$$\int_0^1 |D_\ell(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n\le N} d_\ell(n)^2 \ll N(\log N)^{\ell^2-1}$$

であるから，①を示すには，任意に固定した正の定数Aに対して，

$$\int_{\mathfrak{m}} |F_k(\alpha)|^{2u} d\alpha \ll N^{\frac{2u}{k}-1} (\log N)^{-A} \quad \cdots\cdots ②$$

が示せれば十分である。この②は，大雑把にいうと，Nを$2u$個のk乗数の和として表すWaring問題について，その表し方の個数に対する漸近式が示せる，ということである。

例えば，Huaの不等式により$2u \geq 2^k+1$ならば②は示せるので，

$u \geq 2^{k-1}+1$ ならば $R_{\ell,k,u}(N)$の漸近式は示せる

ということになる。

もう一つの方法は，

$$|I_{\mathfrak{m}}| \leq \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |D_\ell(\alpha)| \int_0^1 |F_k(\alpha)|^u d\alpha$$

とするもので，これは例えば

$u = 2^{k-1}$, $\ell \leq k-1$

のときに②を，したがって$R_{\ell,k,u}(N)$の漸近式を与える。

§3. $R_{\ell,k,u}(N)$について。

さて，$R_{\ell,k,u}(N)$を初めて扱ったのはPageである。彼の議論[8], [9]はcircle methodに基づくもので，それにより$k=2$のとき，$u \geq 3$, $\ell \geq 2$ および $u=2$, $\ell=2$ の場合に$R_{\ell,2,u}(N)$の漸近式が示された。$k=2$の場合はその後Hooley[3]により$u=1$, $\ell=2$の場合が解決され，Linnik[7]は彼のdispersion methodにより$u=2$, $\ell \geq 3$の場合も扱えることを示した。以上

をまとめると(下の図1参照), $k=2$ の場合に残っているのは $u=1$, $\ell \geq 3$ のときとなる。

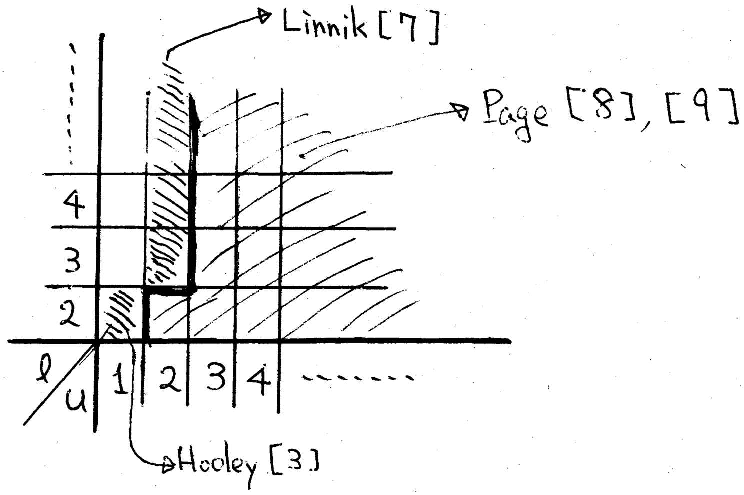

図1. $k=2$ のときの $R_{\ell,2,u}(N)$ の漸近式の示された部分

次に $k=3$ の場合を考える。§2で示したように,

$u \geq 5$ および $u=4$, $\ell=2$

のときは circle method により $R_{\ell,3,u}(N)$ の漸近式が比較的容易に証明できる。その限界を越えるため, Hooley は circle method と異なるアプローチを考え, その方法によって

$u=4$, $\ell=3$ ([4]) および $u=3$, $\ell=2$ ([5])

の場合を解決した(図2)。

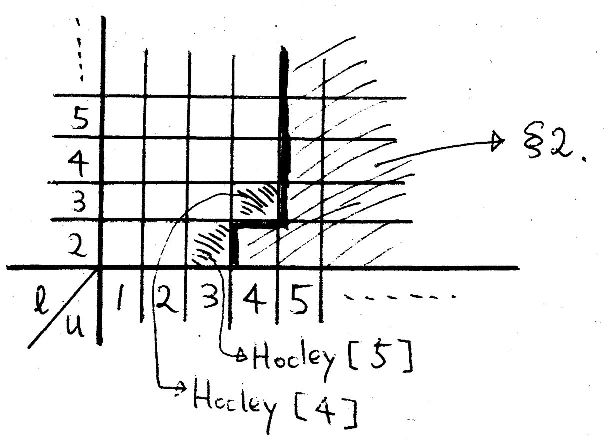

図2. $k=3$ のときの $R_{\ell,3,u}(N)$ の漸近式の示された部分

本稿で報告する主結果の一つは，$u=4$, $l\geq 3$ の場合である。

定理1. $l\geq 3$に対して，

$$R_{l,3,4}(N)=N^{\frac{4}{3}}\sum_{j=0}^{2}\xi_l^{(j)}(N)(\log N)^{l-1-j}+O\left(N^{\frac{4}{3}}(\log N)^{l-4}(\log\log N)^{\frac{l(l-1)(l+4)}{6}+3}\right)$$

ここで$\xi_l^{(j)}(N)$は具体的に表示できる数で，$\xi_l^{(j)}(N)\ll 1$，また$\xi_l^{(0)}(N)\gg 1$をみたす。O記号や≪記号に含まれる定数はlのみに依存する。

$l=3$の場合，この定理1は[4]に含まれるHooleyの結果の改良になっている。

§4. $r_{k,u}(N)$について。

$k=2$の場合は，$u\geq 3$なら§2で扱ったようにcircle methodでできるわけだが，その限界をこえてLinnik[7]によって$r_{2,2}(N)$の漸近式が示されている。

$k=3$の場合は，§2で扱ったようにできる限界は$u\geq 5$である。$u=4$に対しては，十分大きいNに対して$r_{3,4}(N)>0$となること，つまり十分大きい自然数は1つの素数と4つの立方数の和として表わせることは知られている。これはDavenport[1]による「ほとんどすべての自然数は4つの立方数の和と

して表せる」という形の結果から容易に導かれるものである。このの$\mathfrak{r}_{3,4}(N)$に対しての漸近式を，定理1と同じ方法によって示すことができる。

定理2.

$$\mathfrak{r}_{3,4}(N)=\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\mathfrak{S}_0(N)\int_{2}^{N}\frac{(N-t)^{\frac{1}{3}}}{\log t}\,dt+O\left(\frac{N^{\frac{4}{3}}(\log\log N)^{4}}{(\log N)^{4}}\right)$$

ここでΓはガンマ関数を表し，$\mathfrak{S}_0(N)$は特異級数と呼ばれる具体的に表示できる数で，$1\ll\mathfrak{S}_0(N)\ll 1$をみたす。

§5. 証明の概略。

1986年，Vaughan [10] はWaring問題の研究において，circle methodに関して新しい巧妙な方法を開発した。それによって，Huaの結果を改良して$2u=2^k$，つまり$u=2^{k-1}$に対して不等式②が証明された（$k\geq 3$）。ただし，②における定数Aはいくらでも大きくとれるわけではなく，ある正の定数Aに対して②を示したのである。例えば$k=3$の場合は$0<A<1$でなければならない。よって§2で示したようにCauchy-Schwartzの不等式を用いて$R_{\ell,3,4}(N)$や$\mathfrak{r}_{3,4}(N)$の扱いをすぐにWaring問題のVaughanの結果に帰着することはできない。そこで，この点にもう一つ工夫を加えるわけである。

いま，適当に固定する正の定数$B(\geq 5)$に対し，

$$\mathcal{A} = \{m \leq N^{\frac{1}{3}};\ m\text{は}(\log N)^{5B} < p \leq N^{\frac{1}{21}}\text{なる素因数}p\text{をもたない。}\}$$

とし，$\overline{\mathcal{A}}$を$N^{\frac{1}{3}}$以下の自然数全体に対する$\mathcal{A}$の補集合，つまり，

$$\overline{\mathcal{A}} = \{m \leq N^{\frac{1}{3}};\ m\text{は}(\log N)^{5B} < p \leq N^{\frac{1}{21}}\text{なる素因数}p\text{をもつ。}\}$$

とする。また集合$\mathcal{B}$に対して

$$F(\alpha;\mathcal{B}) = \sum_{\substack{m \leq N^{1/3} \\ m \in \mathcal{B}}} e(m^3\alpha)$$

とおく。するとVaughan[10]の方法は，任意の集合$\mathcal{B}$に対して，

$$\int_{\mathfrak{m}} |F(\alpha;\overline{\mathcal{A}})|^2 |F(\alpha;\mathcal{B})|^4 |F_3(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^{\frac{5}{3}}(\log N)^{-B} \quad \cdots\cdots ③$$

を示すことができるのである。もちろん$\mathfrak{m}$をうまく定義して，つまりパラメーターQ_1, Qをうまく選んで，ということである。そこで

$$V_1(N) = \sum_{\substack{m_1^3+m_2^3+m_3^3+m_4^3 < N \\ m_1, m_2, m_3 \in \mathcal{A}}} d_\ell(N - m_1^3 - m_2^3 - m_3^3 - m_4^3)$$

とおき，

$$V_0(N) = R_{\ell,3,4}(N) - V_1(N)$$

とすると，

$$V_0(N) = \int_0^1 D_\ell(\alpha) F_3(\alpha)^4 e(-N\alpha)d\alpha - \int_0^1 D_\ell(\alpha) F(\alpha;\mathcal{A})^3 F_3(\alpha) e(-N\alpha)d\alpha$$

となる。この右辺の2つの積分をmajor arc $\mathfrak{M}$上の積分と，minor arc $\mathfrak{m}$上の積分とに分けると，§2で述べたように$\mathfrak{M}$上の積分については，知られている結果を用いて十分な漸近式を得ることができる。$\mathfrak{m}$上の積分については，

$$\int_{\mathfrak{m}} D_\ell(\alpha)\{F_3(\alpha)^3-F(\alpha;\mathscr{A})^3\}F_3(\alpha)e(-N\alpha)\,d\alpha$$

$$=\int_{\mathfrak{m}} D_\ell(\alpha)F(\alpha;\overline{\mathscr{A}})\{F_3(\alpha)^2+F_3(\alpha)F(\alpha;\mathscr{A})+F(\alpha;\mathscr{A})^2\}F_3(\alpha)e(-N\alpha)\,d\alpha$$

$$\ll\left(\int_0^1|D_\ell(\alpha)|^2d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathfrak{m}}|F(\alpha;\overline{\mathscr{A}})|^2\{|F_3(\alpha)|^4+|F(\alpha;\mathscr{A})|^4\}|F_3(\alpha)|^2d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

とすれば，最後の部分に③を用いて

$$\ll\left(N(\log N)^{\ell^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(N^{\frac{5}{3}}(\log N)^{-B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll N^{\frac{4}{3}}(\log N)^{-\frac{1}{2}(B-\ell^2+1)}$$

したがってBを大きくとっておけばminor arc $\mathfrak{m}$上の積分に対して十分な評価が得られる。これによって$T_0(N)$に対しての漸近式を示すことができる。

一方，ふるいの方法によって，集合$\mathscr{A}$に含まれる自然数の個数$\#\mathscr{A}$について，

$$\#\mathscr{A}\ll\frac{N^{\frac{1}{3}}\log\log N}{\log N}$$

を示すことができる。それをもとにして，

$$V_1(N) \ll N^{\frac{4}{3}}(\log N)^{l-4}(\log\log N)^{C_l} \quad (C_l \text{は} l \text{のみに依存する定数})$$

が証明できる。以上をあわせて，

$$R_{l,3,4}(N) = V_0(N) + V_1(N)$$

に対して，目標とする漸近式を得ることができるわけである。$r_{3,4}(N)$に対する証明も同様である。

上の方法は，不等式②において定数Aを十分大きくとれなくても，Vaughanによる結果の場合は，$R_{l,k,u}(N)$および$r_{k,u}(N)$についての漸近式を与えることを示している。

このVaughanの方法とHeath-Brown [2] のHuaの不等式の改良の方法を合わせると，$k \geq 6$ならば $2u \geq \frac{7}{8}\cdot 2^k$，つまり $u \geq 7\cdot 2^{k-4}$ に対して不等式②を示すことができる（ある正の定数Aに対して，であるが）。したがって上に示した方法と合わせることで，

$$u \geq 2^{k-1} \quad (3 \leq k \leq 5)$$

$$u \geq 7\cdot 2^{k-4} \quad (6 \leq k \leq 9)$$

に対して$R_{l,k,u}(N)$，$r_{k,u}(N)$の漸近式を得ることができる。$k \geq 10$の場合は，WooleyによるVinogradov methodの改良[11]を用いて，§2の議論と合わせた方がいい結果となる。

References.

[1] Davenport, H. "On Waring's problem for cubes", Acta Math., 71 (1939) pp. 123–143.

[2] Heath-Brown, D. R. "Weyl's inequality, Hua's inequality and Waring's problem", J. London Math. Soc. (2) 38 (1988) pp. 216–230

[3] Hooley, C. "On the representation of a number as the sum of a square and a product", Math. Z. 69 (1958) pp. 211–227.

[4] Hooley, C. "On a new approach to various problems of Waring's type," in Recent Progress in Analytic Number Theory vol. 1 (Academic Press, 1981) pp. 127–191.

[5] Hooley, C. "Waring's problem for two squares and three cubes", J. Reine Angew. Math. 328 (1981) pp. 161–207

[6] Kawada, K. "On the sum of four cubes and a product of k factors", preprint.

[7] Linnik, Ju. V. "An asymptotic formula in an additive problem of Hardy-Littlewood," Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 24 (1960) pp. 629–706. (Russian)

[8] Page, A. "On the representation of a number as a sum of squares and products, I. and II.", Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1933) pp. 241–256 and pp. 471–484.

[9] Page, A. "On the representation of a number as a sum of squares and products, III.", Proc. London Math. Soc. (2) 37 (1934) pp. 1–16.

[10] Vaughan, R.C. "On Waring's problem for cubes", J. Reine Angew. Math. 365 (1986) pp. 122 – 170.

[11] Wooley, T.D. "On Vinogradov's mean value theorem", Mathematika, 39 (1992) pp. 379 ~ 399