数理解析研究所講究録
第887巻1994年1-34

非可分性の取扱いについて

辰馬　伸彦 (Nobuhiko Tatsuuma)

§0 Introduction

ここでの”可分性”とは，数学的概念に現れる色々な意味での”可算性”をこめたつもりである.

我々が通常に扱う数学的対象の多くは可算性を持っている．自然数，整数，有理数の全体はいうにおよばず，実数体，複素数体等も集合としては非可算であるが，位相をあわせて考えると第二可算公理をみたし，よく扱われるベクトル空間達も，距離を導入できるものは第一可算公理をみたすから，そう言った意味も含めると考えるほとんどの対象は”可分性”を持つ．そしてそれらの上に構築される多くの理論も，それらの”可分性”をベースとし，この性質を有効に使って導き出すことが多い.

たとえば本シンポジュームの主題の1つである測度論においても，定義自体からして，測度の”完全加法性”すなわち可算和に対する連続性を基調にしているので，本質的に”可分性”の範疇の上に成り立っているものと言える.

したがってこの理論に現れる種々の結果も，”可算性”を基本

としている．Lebesgue-Fatouの定理は関数の可算列に対して成り立つものであるし，Radon-Nikodymの定理，Jordan分解の存在定理，Fubiniの定理などは，通常”全σ-有限”の仮定の下に証明され，その仮定を外した時の反例もよく知られている．

ただ”可分性”の仮定が必要であるか？．いいかえると，もっとゆるい仮定に置き換えられないかという疑問が残る．

こう言った議論から考えると，”非可分性”を問題にする事は，病的な例，若しくは人工的に無理に作った場合のみに対応するようにも考えられるが，例えば可分無限次元 Hilbert空間も，弱位相で考える時は非可分である．ただノルム空間の中の単位球が ＊－弱コンパクトである性質は，多くの理論で有効に使われている性質である．これらから見ても非可分性を持った位相は決して病的なもののみに現れるものとは言えないだろう．

§1 Borel 集合 と Lindelöf の性質

空間 X の上の Borel構造（Borel場とも言う）とは，通常次の (1),(2) を満たす X の部分集合の族 $\mathfrak{B} \equiv \{ B \}$ を言う．

(1) $\forall B \in \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad B^c \in \mathfrak{B}$ （B^c は B の補集合）．

(2) $\forall \{B_j\}_j$[可算集合]$\subset \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad \cup_j B_j \in \mathfrak{B}$． 」

ここである X の部分集合の族 $\mathfrak{E} \equiv \{ E \}$ を含む最小の Borel場が $\mathfrak{B} \equiv \{B\}$ である時，$\mathfrak{E}$ は Borel場 $\mathfrak{B}$ を***生成***すると言う．

普通，位相空間 X の上に与えられる Borel構造は

(3) $\mathfrak{S}\equiv\{$ X の任意の開集合 $\}$ で生成される Borel場 $\mathfrak{B}$,

である．この $\mathfrak{B}\equiv\{B\}$ の元を Borel集合 と呼ぶ．

すなわち X の開集合の全体が $\mathfrak{B}$ の生成元である．

例１－１　一般の局所コンパクト群 G には Haar測度（０でなく，(右)移動にたいし不変な）μ が存在して，それは正の常数倍を除いて一意的であることは，A.Weil の有名な結果である．

G には，単位元の任意のコンパクト近傍より生成させることにより得られる開（従って閉）の部分群 G_0 があり，それによる剰余類分解を $G=\Sigma_\alpha G_0 g_\alpha$ (disjoint sum)とする．

今 G を非離散，非σ-コンパクトとすれば全ての１点集合はμ測度 0 である．μ を１つ定め，ここで次の形の集合全てを考える．

$E\equiv\{g_\alpha'\in G_0 g_\alpha\}_\alpha$ ，つまり各 G_0-剰余類よりその代表元を１つづつ任意に選び、取り出したものとする．このような E は明らかに閉集合だから，定義により $\mathfrak{B}$ に入るので，測度 μ の値を定めなくてはならないが，ここでこのような E をすべて一斉に

a) $\mu(E)=0$ と置く，　　b) $\mu(E)=\infty$ と置く，

の２つの選択枝があり，その何れからも矛盾なく G 上の右移動不変測度が定義されることは，容易に確認される．

さらに上の μ と離れて，次で μ_0 を定義する．

c) その閉包が σ-コンパクト集合である様な可測集合 F には

$\mu_0(F) = 0$ ，その他では $\mu_0(F) = \infty$.

このような μ_0 がまた G 上の右移動不変測度を定義することも容易にわかる.

つまり G 上に互いに同値ではない３種の右移動不変測度が有ったことになり， Weil の結果と矛盾するように見える.

この現象を解釈するために，もう１度 A.Weil の証明を辿ってみると，Weil は μ の存在および一意性を μ を Radon測度として示している．すなわち $C_c(G)$ （ G の台がコンパクトな連続関数の全体）の双対の正元として与えるので，後で示す様に Radon測度が Baire測度や regular Borel測度とある解釈の下で、同義であることを考えると，意味のある可測集合はその閉包が σ-コンパクト集合である様なもの限られる．結局上記の E は可測とは考えず，μ の値を定めていない．この視点から先ず定義の仮定（1）を検討する.

上記の例で Radon測度での可測集合は，全てその閉包が σ-コンパクト集合である様なもの限られる．と言う事は全空間が σ-コンパクトでない時に（1）の様に ”$\forall B \in \mathfrak{B} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{B}$” とすれば，必然的にその閉包が σ-コンパクトでない集合が $\mathfrak{B}$ に入る事になり，不都合が生じる．そこで（1）の条件を

（1'） $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad B_1 - B_2 \in \mathfrak{B}$.

と置き換える．以後我々は Borel場の定義については，（1）の代わりに（1'）を用いる事とする.

次に X が位相空間である時，定義（3）を置くと，X の上のBorel場は開集合全体を含み，即ちσ-コンパクトでない集合を含むので同じ問題が生じる．そこで例えば 局所コンパクト空間 X では，「$\mathfrak{B}$ は X のσ-コンパクト開集合全てを含む」，つまり $\mathfrak{B}$ の生成元を ”X のσ-コンパクト開集合全体” と変更するのが適当と思われる．ここで（2）により，この仮定は $\mathfrak{B}$ の生成元を ”X のコンパクト集合全体”とする事と同値である事に注意して置く．

ただ一般の位相空間では，コンパクト集合が十分多く存在する事が期待出来ないので，$\mathfrak{B}$ の生成元として，”σ-コンパクト開集合全体”に代わるものを考える事が必要である．

定義１－２　位相空間 X の部分集合 E が ***Lindelöfの性質を持つ***とは，任意の開集合の族 $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_\alpha$ による被覆 $E\subset\cup_\alpha U_\alpha$ に対して，$\mathfrak{U}$の可算部分族 $\{U_j\}_j$ があって，$E\subset\cup_j U_j$ となる事をいう．」

以下 Lindelöfの性質を持つ集合を ***L-集合***と略記する．

Lindelöfの性質については次が成り立つ．

補題１－３ 1）可算個の Lindelöfの性質を持つ集合 E_j（$j=1,2,\cdots$）の和集合 $\cup_j E_j$ は又 Lindelöfの性質を持つ．

2）Lindelöfの性質を持つ集合 E の中の相対閉部分集合 F は，又 Lindelöfの性質を持つ．

証明　1）は殆ど明らかである．

2) F の与えられた開被覆を $F \subset \cup_\alpha U_\alpha$ とする．E の中の相対開集合 E - F に対して，X の開集合 O を $O \cap E = E - F$ を満たす様に取れば，$E \subset \cup_\alpha U_\alpha \cup O$ は E の開被覆である．E に対する Lindelöfの性質 から可算部分族 $\{U_j\}_j$ があって，$(F \subset) E \subset \cup_j U_j \cup O$．$O \cap F = \emptyset$ だから $F \subset \cup_j U_j$ となる． ∎

コンパクト集合，従ってσ-コンパクト集合は明らかに Lindelöfの性質を持つ．

位相空間についても，"局所コンパクト" をゆるめた概念として

定義1－4 位相空間 X が *局所Lindelöf（局所-L）である*とは，X が T_2-分離公理を満たし，さらに $\forall x \in X$ に対して 開L-集合よりなる基本近傍系が存在する事を言う． 」

局所コンパクト空間は，当然局所 Lindelöfである．さらに§1の最後に触れた例では次が言える．

補題1－5 Banach空間 B の双対空間 B^* は，B より入れた＊－弱位相によりL-空間であると同時に局所-L-空間でもある．

証明 B^* の単位球 $U \equiv \{ f \mid \|f\| \leqq 1 \}$ は ＊－弱位相コンパクトである．故に $B^* = \cup_n nU$ は σ-コンパクトであるから Lindelöfの性質を持つ．＊－弱位相で各点 $x \in B^*$ は開集合

$$E(a, x_1, x_2, \cdots, x_m) \equiv \{ f \mid |f(x - x_j)| < a \ (j = 1, 2, \cdots, m \}$$

を基本近傍系として持つが $E(a, x_1, x_2, \cdots, x_m)$ は閉 L-集合

$$F_k(a, x_1, x_2, \cdots, x_m) \equiv \{ f \mid |f(x - x_j)| \leqq a - (1/k) (j = 1, 2, \cdots, m) \}$$

の可算和で L-集合であり,したがって B^*は局所-L-空間である. ■

以下の話では位相空間は局所 Lindelöfを仮定することとする.

さてこの定義を用いて Borel集合全体 $\mathfrak{B}$ の定義で条件 (3) は

(3') $\mathfrak{B}$は { X の全ての閉 L-集合} で生成される.

で置き換える事とする.

ここで我々の改訂した定義を確認する.

定義1－6　空間 X の上の ***Borel構造*** (***Borel場***) とは, 次の (1),(2) を満たす X の部分集合の族 $\mathfrak{B} \equiv \{ B \}$ を言う.

(1) $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad B_1 - B_2 \in \mathfrak{B}$.

(2) $\forall \{B_j\}_j$[可算集合]$\subset \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad \cup_j B_j \in \mathfrak{B}$.

又, 局所 L-空間 X の上の Borel構造 $\mathfrak{B}$ には次をとる.

(3) $\mathfrak{B}$は { X の全ての 閉 L-集合} で生成される.　」

この $\mathfrak{B} \equiv \{B\}$ の元を ***L-Borel集合*** と呼ぶ.

すなわち X の 閉 L-集合の全体が $\mathfrak{B}$ の生成元である.

X が局所コンパクト空間である時, こう定めた Borel場はコンパクト集合から生成される Borel場に一致する.

但しこの様な Borel場の定義を採用する場合には, その上の測度 μ が与えられた時, 関数空間 $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ ($1 \leqq p < \infty$) については通常通り "P-乗可積分の可測関数の全体" として定義出来るが $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ の元例えば定数関数は, 通常の定義では一般には可測にならないで, 以下に定義する "局所可測" 関数の範疇に属する.

定義1－7　X の部分集合 F が（$\mathfrak{B}$-）***局所可測*** であるとは，

”$\forall B \in \mathfrak{B} \Rightarrow B \cap F \in \mathfrak{B}$” を満たす事をいう．

又 X 上の $\mathfrak{B}$-測度 μ について $\mathfrak{B}$-局所可測集合 F が ***μ-局所 0*** であるとは，”$\forall B \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mu(B \cap F) = 0$” となる事をいう．

X 上の実数値関数 f が（$\mathfrak{B}$-）***局所可測*** であるとは $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して X の部分集合 $F_a \equiv \{ x \in X \mid f > a \}$ が $\mathfrak{B}$-局所可測になる事をいい，実-$\mathfrak{B}$-局所可測関数 f_1, f_2 により，$f = f_1 + i f_2$ と書ける複素数値関数も（$\mathfrak{B}$-）***局所可測関数*** と呼ぶ．そして

$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) \equiv$

$\equiv$ {f：$\mathfrak{B}$-局所可測関数 ｜ $\{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$が μ-局所 0}

と定義する．

§2　Borel測度と L-Borel測度

X が局所コンパクト空間である場合，X の上の位相に適合した標準的な Borel場は X のコンパクト集合全体から生成される $\mathfrak{B}$ である．以下局所コンパクト空間 X について，このような $\mathfrak{B}$ の上の測度を ***Borel測度***と呼ぶ．

ところで X の位相を確定し，その上の多くの有用な関数空間を定義する為の基本となる重要な空間として次がある．

$C_0(X) \equiv$ { X 上のあるコンパクト集合に台が入る連続関数 }．

X 上の測度は，$C_0(X)$ の全ての元を可測，可積分にすることが

望ましい．$C_0(X)$ の全ての元を可測にするには，Borel集合全体の作る Borel場を採用する必要はなくて，コンパクト集合の可算和として書ける様な開集合（ ***F_σ-開集合*** ）と，可算個の開集合の積集合として書ける様なコンパクト集合（ ***G_δ-コンパクト集合*** ）のそれぞれ全体から生成される Borel場 $\mathfrak{B}_0$ を考えれば十分である． $\mathfrak{B}_0$ の元を ***Baire集合***といい，その上の測度を ***Baire測度***と呼ぶ．

また $C_0(X)$ の全ての元を可積分にする為には「全ての可測コンパクト集合が有限測度を持つ．」事が必要十分であるが，後の議論でも使える意味で一般位相空間については次の条件を考える．この条件は局所コンパクト空間で上の条件と同値になる．

[F]　**$\forall x \in X$ に有限測度の可測近傍が有る．**

以下 Baire測度，Borel測度にはこれを仮定する事とする．こうすれば，この測度については次の定理がある．

Rieszの定理 局所コンパクト空間 X の上の $C_0(X)$ の非負値元の全体を $C_0^+(X)$ と書く．

$C_0^+(X)$ から $\mathbb{R}^+$への対応 $C_0^+(X) \ni f \to I(f) \in \mathbb{R}^+$ が

$$I(af+bh) = aI(f) + bI(h) \quad (0 \leqq \forall a,b < +\infty , \forall f,h \in C_0^+(X))$$

を満たす時，X 上の Baire測度 μ が存在して $I(f)=\int f(x)d\mu(x)$ となる．　」

定理の $I(\cdot)$ は $C_0(X)$ の双対の正元で，つまり ***Radon測度*** と呼ばれるものである． Baire測度による積分が上の Radon測度の公

理を満たす事は明らかだから，Rieszの定理は Radon測度を与えることと，Baire測度を与えることの同等性を示すものである．

勿論 $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}_0$ であるから，Borel測度 μ を $\mathfrak{B}_0$ に制限すれば，Baire測度が得られる．しかし Baire測度を $\mathfrak{B}$ 上に拡大してBorel測度にするのは必ずしも一意的ではないので，基準的な拡大として，Borel測度 μ に関する次の正則性の条件を考える．

[正則性] 全ての Borel集合 F に対して

$$\mu(F) = \inf\{\mu(U) \mid F \subset U, U \text{ は可測開集合 }\}$$

$$= \sup\{\mu(C) \mid C \subset F, C \text{ は可測コンパクト集合 }\}.」$$

与えられた Baire測度 μ_0 と Borel集合 F に対して

$$\mu(F) \equiv \inf\{\mu_0(U_0) \mid F \subset U_0, U_0 \text{ は } F_\sigma\text{-開集合 }\}$$

と定義すると，μ は正則 Borel測度となり，μ_0 の唯一の正則Borel測度としての拡張となる．

即ち 正則 Borel測度 μ と Baire測度 μ_0 とは，μ が μ_0 の拡張であるという意味で，1対1に対応している． Rieszの定理と組み合わせると，正則 Borel測度 ，Baire測度，Radon測度を与える事は上の様な意味で全て同値である．

さて X が局所-L-空間である場合，上の議論の類似として，X の上の位相に対応して， X の閉 L-集合全体から生成されるBorel場 $\mathfrak{B}$ を取る．以下，このような $\mathfrak{B}$ の元を ***L-Borel集合***，その上で定義され、先の仮定 [F] を満たす測度を ***L-Borel測度***と呼ぶ．この

X の位相を確定する関数空間には次が考えられる.

$C_L(X) \equiv$ { $\forall a \in \mathbb{R}^+$ で $\{x \mid f(x) \geqq a\}$ が L-閉集合

となる X 上の正値連続関数 f} の一次結合の全体.

X 上の ”測度”としては, $C_L(X)$ の全ての元を可測とし、更にその内多くの元（例えば $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ の稠密部分空間の元）を可積分とする事が望ましい. そこでやはり条件 [F] は仮定する.

次に, 局所コンパクトの時を真似て, $C_L(X)$上で定義された積分を L-Borel測度にまで標準的な方法で一意的に拡張する目的で, L-Borel測度 μ に対して次の ***L-正則性***の条件を定義して置く.

「**L-正則性**」全ての L-Borel集合 F に対して

$\mu(F) = \inf\{\mu(U) \mid F \subset U$,U は開 L-集合 }

$= \sup\{\mu(C) \mid C \subset F$,C は閉 L-集合 }. 」

§ 3 Localization（局所化）

§ 1の考察からわかるように, 可分性の仮定を落として議論する際には, 測度を定義する Borel場が余りにも大きなときや, $(0,\infty)$-型の測度は, 病的現象を招来するという意味で, 好ましくないと考えられるので, これを除外する工夫が次に述べる”局所化”である.

定義3－1 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が ***局所化可能*** であるとは, 互いに交わらない $0 < \mu(X_\alpha) < +\infty$ を満たす X の可測部分集合 $X_\alpha \in \mathcal{B}$ の族が存在し

(*) $$X = N + \Sigma_\alpha X_\alpha$$

と書くとき，

(**) $\forall F \in \mathfrak{B}$ に対して $\mu(F) = \Sigma_\alpha \mu(F \cap X_\alpha)$

が成立する． 」

つまり沢山の有限測度を横に並べたものと思えばよい．この性質で大切なのは

定理３－１ 我々の Borel場の定義の下で，局所化可能測度空間では Radon-Nikodym の定理，Jordan 分解の存在定理，Fubini の定理など 全σ-有限の測度空間で成り立つ定理の多くが成立する．

証明 有限測度に対しては，これらは全て成立している．一般の場合はσ-有限の可測集合を取って，それらの上に制限した測度として，これらの定理を check できれば，局所化の形から，そのつなぎ合わせとして，全体で成立する． ∎

次が成り立つ．

局所化可能定理 (1) 局所-L-空間 X 上の L-Borel測度 （前§の条件 [F] を満たす）μ に対して，X を互いに交わらぬ μ-有限，μ-非 0 の L-Borel部分集合の族 X_α と部分集合 N を取り分割 (*) と測度 μ に対して，(**) が成立するように出来る．

(2) 局所コンパクト空間 X に対しては，X の互いに交わらぬ相対コンパクト且つ局所閉の部分集合の族 X_α と部分集合 N をにより (*) と分割し，X の上の任意のBorel測度（やはり条件 [F] を満た

す）μ に対して一様に(**) が成立するようにできる.　　　」

([T]Chap3§3(p33)で μ の正則性を仮定したが，これは不要である.)

証明　任意の分割 (*) に対して $\mu(F) \geqq \Sigma_\alpha \mu(F \cap X_\alpha)$ は常に成立する. 従って (**) を示すには等号が成立する事を言えばよい.

(1) X が局所-L-空間であるとする. 先ず次の i)-iv) を満たす X の部分集合の族 $\mathfrak{S} \equiv \{Y(\alpha)\}_\alpha$ を考える.

i)　$\forall \alpha$ で $Y(\alpha)$ は μ-有限の L-Borel集合,

ii)　$\alpha \neq \beta \Rightarrow Y(\alpha) \cap Y(\beta) = \emptyset$,

iii)　$X(\mathfrak{S}) \equiv \cup_\alpha Y(\alpha)$ は開集合,

iv)　$E \subset X(\mathfrak{S})$ なる任意の L-Borel集合について

$$\mu(E) = \Sigma_\alpha \mu(E \cap Y(\alpha)).$$

この様な族 $\mathfrak{S}$ の全体の集合 ψ に包含関係で順序を入れる.

ψ はその元として空集合を含むから，ψ 自身は空ではない.

又 ψ の中の単調増加族 $\{\mathfrak{S}_\tau \equiv \{Y(\alpha)^\tau\}\}$ に対して，集合族 $\mathfrak{S} \equiv \cup_\tau \mathfrak{S}_\tau$ を考える. この族で上記の性質 i), ii) は $Y(\alpha)$, $Y(\beta)$ が同時に属している $\mathfrak{S}_\tau$ の中の性質 i), ii) によって $\mathfrak{S}$ でも成立する.

次に $X(\mathfrak{S}) \equiv \cup_\tau \cup_\alpha Y(\alpha)^\tau = \cup_\tau X(\mathfrak{S}_\tau)$ だから，開集合の和集合として $X(\mathfrak{S})$ は開集合となり iii)は $\mathfrak{S}$ に対しても成り立つ.

$F \subset X(\mathfrak{S}) = \cup_\tau X(\mathfrak{S}_\tau)$ なる閉 L-集合について，F の L-性から可算個の $\{\mathfrak{S}_{\tau j}\}$ があって $F \subset \cup_j X(\mathfrak{S}_{\tau j})$となる. 一方

$F - X(\mathfrak{S}_\tau)$ は閉 L-集合だから L-Borel可測．従って $F \cap X(\mathfrak{S}_\tau) = F - (F - X(\mathfrak{S}_\tau)) \subset X(\mathfrak{S}_\tau)$ も L-Borel可測で，$\mathfrak{S}_\tau$ についての性質 iv)から $\mu(F\cap X(\mathfrak{S}_\tau)) = \Sigma_\alpha \mu(F\cap Y(\alpha)^\tau)$．$\mu$ の可算加法性から $\mu(F) = \lim_j \mu(F\cap X(\mathfrak{S}_{\tau j})) = \Sigma_\alpha \mu(F\cap Y(\alpha))(\mathfrak{S} \equiv \{Y(\alpha)\}_\alpha)$ となる．つまり $X(\mathfrak{S})$ 上の L-Borel場の生成元に対して iv) が示された．所で iv) の成立する集合の全体は Borel場をつくるから，$X(\mathfrak{S})$ の L-Borel集合に対して iv) が成立する．すなわち $\mathfrak{S} \in \psi$ となるから ψ は帰納的である．

従って Zornの補題により極大元が存在する．その元をやはり同じ $\mathfrak{S}$ で示そう．$X = X(\mathfrak{S})$ を言う．

今 $F_\infty \equiv X - X(\mathfrak{S}) \neq \emptyset$ とする．F_∞ は閉集合である．$x \in F_\infty \subset X$ の μ-測度有限の開 L-近傍 U_x を取り，可測 L-集合 $Y(\infty) \equiv F_\infty \cap U_x$ を作り，集合族 $\mathfrak{S}_\infty \equiv \{Y(\infty)\} \cup \mathfrak{S}$ について，性質 i)-iv) を確かめる．

先ず i)-iii) は明らかである．また $E \subset X(\mathfrak{S}_\infty) = Y(\infty) \cup X(\mathfrak{S}) = Y(\infty) \cup (\cup_\alpha Y(\alpha))$ なる L-Borel集合 E に対して $\mu(E) = \mu(E\cap Y(\infty)) + \mu(E\cap X(\mathfrak{S})) = \mu(E\cap Y(\infty)) + \Sigma_\alpha \mu(E\cap Y(\alpha))$ となるから $\mathfrak{S}_\infty$ は i)-iv) を満たす族であり，従って $\mathfrak{S}_\infty \in \psi$ でしかも $\mathfrak{S}_\infty > \mathfrak{S}$，即ち $\mathfrak{S}$ を極大に取った事に反する．

最後に $\{X_\alpha\} \equiv \{Y(\alpha) \mid \mu(Y(\alpha)) > 0\}$，

$$N \equiv \Sigma_\alpha Y(\alpha) \quad (\mu(Y(\alpha)) = 0)$$

と置いて (1) が示された.

(2) X が局所コンパクトなら上で性質 i),iv) をそれぞれ

i) $\forall\alpha$ で $Y(\alpha)$ は 相対コンパクトの Borel集合,

iv) $E \subset X(\mathfrak{S})$ なる任意の Borel集合と, 任意の Borel測度

μ について $\mu(E) = \Sigma_\alpha \mu(E \cap Y(\alpha))$.

とし, $F \subset X(\mathfrak{S})$ をコンパクトとして同様の議論を繰り返せば (2)

が示される. ∎

局所化可能なら当然 $(0,\infty)$-型測度は対象から除外されるが,

局所化可能という条件がどのくらい強い条件であるかと言うことに

ついて, 次の定理がある.

棚卸し定理 任意の測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ にたいし, $(0,\infty)$-型

測度空間 $(X_\infty, \mathfrak{B}_\infty, \mu_\infty)$ と局所化可能測度空間 $(X_f, \mathfrak{B}_f, \mu_f)$

を取り, 積を保つ対応

$$\cup_p \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \mu) \ni f \mapsto f^\sim \in \cup_p \mathcal{L}^p(X_f + X_\infty, \mathfrak{B}_f + \mathfrak{B}_\infty, \mu_f + \mu_\infty)$$

$$(1 \leqq p \leqq +\infty),$$

を作り $1 \leqq \forall p \leqq +\infty$ で

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \mu) \cong \mathcal{L}^p(X_f + X_\infty, \mathfrak{B}_f + \mathfrak{B}_\infty, \mu_f + \mu_\infty)$$

と出来る. 」

証明 $\psi = \{X_\alpha\}$ を $X_\alpha \in \mathfrak{B}$ で $0 < \mu(X_\alpha) < +\infty$, しかも $\forall\alpha \neq \beta \Rightarrow \mu(X_\alpha \cap X_\beta) = 0$ を満たす X の部分集合の族とし, それぞれ

” $\forall F \in \mathfrak{B}$ について, $\mu_\alpha(F) \equiv \mu(F \cap X_\alpha)$ ” で μ_α を定義し

$(X_\alpha', \mathfrak{B}_\alpha, \mu_\alpha) \equiv (X_\alpha, \mathfrak{B}|_{X_\alpha}, \mu_\alpha)$ とする．また同様に

”$\forall F \in \mathfrak{B}$ について，$\mu_\infty(F) = 0$ （F が σ-有限の時）

$\mu_\infty(F) = \infty$ （その他）”

によって μ_∞ を定義し $(X_\infty, \mathfrak{B}_\infty, \mu_\infty) \equiv (X, \mathfrak{B}, \mu_\infty)$と置く．

今 ψ の全体の集合 Ψ に包含関係による順序を入れる．これにより Ψ が帰納的集合になることは容易に判るから，Zornの補題を適用して Ψ の内の 極大元を $\psi = \{X_\alpha\}$ とする．ここで $\mu(F) < +\infty$ なる $\forall F \in \mathfrak{B}$ にたいして $\mu(F) = \Sigma_\alpha \mu(F \cap X_\alpha)$ となる．それはまず任意有限個の $\{X_j\} \subset \psi$ について $\mu(F - \cup_j X_j) = \mu(F) - \Sigma_j \mu(F \cap X_j) + \Sigma_{jk} \mu(F \cap X_j \cap X_k) - \Sigma_{jkl} \mu(F \cap X_j \cap X_k \cap X_l) + \cdots$ の展開にさいして，$\mu(F \cap X_j \cap X_k \cap X_\ell \cap \cdots) < \mu(X_j \cap X_k) = 0$ 等から $0 \leqq \mu(F - \cup_j X_j) = \mu(F) - \Sigma_j \mu(F \cap X_j)$ となる．すなわち各 F 毎に $\{\alpha \mid \mu(F \cap X_\alpha) \neq 0\}$ は高々可算集合であり，$\Sigma_\alpha \mu(F \cap X_\alpha) = \Sigma_j \mu(F \cap X_j)$．そこでもし $\mu(F) > \Sigma_\alpha \mu(F \cap X_\alpha)$ となる F があったとすれば，$Y \equiv F - \Sigma_j F \cap X_j$ とおくと $+\infty > \mu(F) \geqq \mu(Y) = \mu(F) - \Sigma_j \mu(F \cap X_j) = \mu(F) - \Sigma_\alpha \mu(F \cap X_\alpha) > 0$．さらに $\forall \beta$ で $\mu(Y \cap X_\beta) = \mu(F \cap X_\beta) - \Sigma_\alpha \mu(F \cap X_\beta \cap X_\alpha) = \mu(F \cap X_\beta) - \Sigma_\alpha \delta_{\alpha\beta} \mu(F \cap X_\beta \cap X_\alpha) = 0$ となるから，$\{Y\} \cup \{X_\alpha\} = \{Y\} \cup \psi$は Ψ に入る ψ より大きい元であり，ψの極大性に反する．

X_α' を別々の離れた空間として，それらの直和 $X_f \equiv \Sigma_\alpha X_\alpha'$ を取る．対応して Borel場 $\mathfrak{B}_f \equiv \Sigma_\alpha \mathfrak{B}_\alpha$，測度 $\mu_f \equiv \Sigma_\alpha \mu_\alpha$ も直和と

して定義すると $\forall F \in \mathcal{B}$ にたいして $\chi_F(\cdot)$ に $\Sigma_\alpha \chi_{F \cap X_j'}'$ を対応させる写像を，線型且つ等長的に各 $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ に拡張したものが結果を与える．ここで $\chi_{F \cap X_j}'$は上の F が乗っている X_j について特性関数 $\chi_{F \cap X_j}$をつくり，それを X_j'へ移したものである．∎

§4　Thickness（厚さ）

可算性を仮定した空間では，条件等も可算個に帰着されることが多く，従って”それぞれの条件が測度空間（$X, \mathcal{B}, \mu$）の μ-0集合を除いた点で成立する”事がいえると，”全ての条件が同時に測度空間（$X, \mathcal{B}, \mu$）の μ-0集合を除いた点で成立する”事がいえる．だが条件の数が非可算個ある場合はそれぞれの条件の成立する μ-0集合を除いた点の集合を，全条件を走らせて共通集合のみを取ると，消えてしまうおそれが有るので同じような論法を用いることができない．

そこで”全ての条件が成立する点集合”を確定して，それが測度 μ で測って十分沢山有ることをいう必要がある．しかしこの場合”全ての条件が成立する点集合”は必ずしも可測とは限らない．そこで Thickness の概念が必要になる．

定義4－1　与えられた測度空間（$X, \mathcal{B}, \mu$）の中の X の部分集合（可測とは限らない）X_0 が ***μ-thick*** であるとは次が成立することである．

$B \cap X_0 = \emptyset$ となる $\forall B \in \mathfrak{B}$ について $\mu(B) = 0$.　」

Thick な集合の上に，測度が移せることはよく知られた命題である.

命題4－2 測度空間（$X, \mathfrak{B}, \mu$）の Thickな部分集合 X_0 に対して $\mathfrak{B}_0 \equiv \{ B \cap X_0 \mid B \in \mathfrak{B} \}$ は X_0 の上の Borel場を与え，$\mu_0(B \cap X_0) \equiv \mu(B)$ により，μ_0 はその上の測度を与える.

すなわち（$X_0, \mathfrak{B}_0, \mu_0$）は測度空間であり，$\chi_B \to \chi_{B \cap X_0}$ の対応で次が成立する.

$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{B}, \mu) \cong \mathcal{L}^p(X_0, \mathfrak{B}_0, \mu_0)$　$(1 \leqq \forall p \leqq +\infty)$ 」

証明 $\mathfrak{B}_0$ が X_0 の上の Borel場を与える事は明らかである.

そこで $\forall B_0 (= B \cap X_0) \in \mathfrak{B}_0$ に対して $\mu_0(B_0) \equiv \mu(B)$ は $B (\in \mathfrak{B})$ の取り方によらない事を示せば μ_0 が $\mathfrak{B}_0$ 上の測度を与えることも容易に判る.

$B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ が $B_1 \cap X_0 = B_2 \cap X_0$ となる μ-有限可測集合であるなら，$(B_1 \triangle B_2) \cap X_0 = \emptyset$. 即ち thickness の仮定から $\mu(B_1 \triangle B_2) = 0$. 従って $\mu_0(B_1 \cap X_0) = \mu(B_1) = \mu(B_1) - \mu(B_1 - B_2) + \mu(B_2 - B_1) = \mu(B_2) = \mu_0(B_2 \cap X_0)$.

$\mathcal{L}^p$同士の対応は，関数の間の対応から直ちに出る. ▮

逆に次も成立する.

補題4－3 X 上の Borel場 $\mathfrak{B}$ に対し，部分集合 $X_0 (\subset X)$ の Borel場 $\mathfrak{B}_0 \equiv \{ B \cap X_0 \mid B \in \mathfrak{B} \}$ を作る. $\mathfrak{B}_0$ 上の測度 μ_0 から

$\mu(B) \equiv \mu_0(B \cap X_0)$ と定義すれば，μ は（X，$\mathfrak{B}$）上の測度であり，X_0はX中 μ-thick である． 」

証明は定義から殆ど明らかである．

この Thickness の概念が有効な実例として，巡回ユニタリ表現の既約分解の理論がある．巡回ベクトルを v（ $\|v\| = 1$)とする局所コンパクト群 G のユニタリ表現を $\mathfrak{D} \equiv (\mathfrak{H}, U_g, v)$ とする．このとき$\mathfrak{H}$の内積 $<\cdot, \cdot>$より作った G 上の関数 $\varphi(g) \equiv <U_g v, v>$ は $\varphi(e)=1$ となる G 上の連続正定値関数になり，GNS-構成法によりもとの $\mathfrak{D}$ をこれから再構成することができる．勿論 $\mathfrak{D}$ の巡回ベクトルは1本とは限らないので，φ と $\mathfrak{D}$ が1対1に対応する等ということはいえない．

さて G 上の連続正定値関数の全体は，$\mathcal{L}^\infty(G)$ の元と見られるから，$\mathcal{L}^1(G)^*$ の元として，＊-弱位相が入る．そしてその単位球 $P^1 \equiv \{\varphi \mid G$ の連続正定値関数で $\varphi(e)=1\}$ はこの位相で凸コンパクト集合になる．そして φ にGNS-構成で対応する表現を $\mathfrak{D}_\varphi$と書くと "$\mathfrak{D}_\varphi$ が既約 $\Leftrightarrow$ $\varphi \in ex(P^1)$（P^1の端点の集合）" が成立つ．

したがって，与えられた巡回表現 $\mathfrak{D}_\varphi$ に対する連続正定値関数 φ が $ex(P^1)$ の上の元で

$$(***) \qquad \varphi = \int_{ex(P1)} \varphi_z d\nu(z)$$

と積分型に展開されるなら，この展開に沿って成分の連続正定値関数 φ_z に GNS-構成で対応する G の既約ユニタリ表現$\mathfrak{D}_z$ により

$$\mathfrak{D}_{\varphi} \cong \int_{ex(P1)} \mathfrak{D}_z d\nu(z)$$

と直積分で既約分解されたこととなる.

ここで（***）の展開を与えるのは，次の Choquet-Bishop-de Leeuwの理論で，この理論は有名な Krein-Milmanの定理の定量化とも言えるものである.

定理４－４ （Choquet-Bishop-de Leeuw） E を実位相ベクトル空間 V の中の凸コンパクト集合とする. ここで E 上の実連続関数 $p(x)$ （$x \in E$）がアファイン型であるとは,

$$0 \leqq \forall\lambda \leqq 1 \quad p(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y)$$

を満たすとする. この定義のもとで

$\forall z \in E \quad \exists \nu_z$(E 上の測度） で　$p(z) = \int_E p(x)\, d\nu_z(x)$

ただしここで　$ex(E)$ は E の中で ν_z-thick である.　」

これを我々の場合に適用し，先の命題を使うと積分は実質 $ex(\mathbb{P}^1)$ の上でのものとして良く，これが既約分解を与える.

この端点の集合 $ex(\mathbb{P}^1)$ は位相的には勿論，V が非可分の場合では可測性等示す事はできないので，この場合示すことのできるのは，ν_z に関する thickness のみで，非可分の場合はこうした形の結果しか得られない.

§５　Stone空間

今局所化可能測度空間（ $X, \mathfrak{B}, \mu$ ）とある意味で同等な局所コ

ンパクト空間 $X^{\sim}$ と,その上の Borel場 $\mathfrak{B}^{\sim}$ および正則 Borel測度 $\mu^{\sim}$ を作る事を考える. $\mathfrak{H} \equiv \mathcal{L}^2(X,\mu)$ と置く. $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ の元 φ を取ると,これに対し $\mathfrak{H} \ni f \mapsto \varphi \times f \in \mathfrak{H}$ の写像は,Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素 T_φ を与える.

$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \ni \varphi \mapsto T_\varphi \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ($\mathfrak{H}$上の有界作用素の全体)

は, $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ から $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$の作用素ノルムでの等長の線形写像で,その像 $\mathcal{M}$ は $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の中の極大*-可換環,特に von Neumann環となる. 逆に次が成り立つ.

定理5－1 $\mathcal{M}$ を Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素全体 $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の中の極大*-可換環とする. このとき $\mathcal{M}$ は von Neumann環であり,ある局所化可能測度空間 (Y , $\mathfrak{F}$, ν) を取り,

i) $\mathfrak{H}$ と $\mathcal{L}^2(Y,\nu)$ の Hilbert空間としての同型があって

ii) その同型対応により $\mathcal{M}$ は $\mathcal{L}^\infty(Y,\nu)$ の元を掛ける作用素全体の作る環に移る.

iii) また対応する Y の局所化 $Y = N + \Sigma_\alpha Y_\alpha$ で, $N = \emptyset$, 各 Y_α には,ある射影作用素 $P_\alpha \in \mathcal{M}$ が対応して, Y_α は von Neumann環 $P_\alpha \mathcal{M}$ の Gelfand双対である Stone空間, $\nu_\alpha \equiv \nu|_{X_\alpha}$ はその上の任意のコンパクト集合が有限測度で,また任意の可測開集合が正測度を持つ様な正則 Borel完全測度とする事が出来る. 」

証明は [T] p38 参照のこと.

ここで ***Stone空間***とは,その全ての開部分集合の閉包がまた開

集合になる様なコンパクト空間であり，ν_α が***完全測度***であるとは，任意の有界可測関数 f に対して，有界連続関数 $f^\sim$ があって ν_α に関して殆ど到る所で $f = f^\sim$ となる事を言う．

Stone空間の直和である局所コンパクト空間を，***局所 Stone空間***と呼ぼう．即ち上の Y は局所 Stone空間である．

補題５－２ Hilbert空間 $\mathfrak{H}$ の上の有界作用素環 $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の可換部分環 $\mathcal{M}$ が巡回元 $v \in \mathfrak{H}$ (i.e. $(\mathcal{M}v)^- = \mathfrak{H}$) を持てば，$\mathcal{M}$ が生成する von Neumann環は $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の中で極大可換環である．

特に巡回可換 von Neumann環 $\mathcal{M}$ はある Stone空間 X の上の Borel集合全体 $\mathfrak{B}$ に定義された有界完全測度 μ により，$\mathfrak{H} \sim \mathcal{L}^2(X,\mu)$ の上の $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ の元を掛ける作用素の環として実現される．　」

(cf.[T]補題３．４．２)

以下考える測度空間 (X, $\mathfrak{B}$, μ) に対し次の仮定 [A]を置く．

[A] (1) X は 局所 L-空間,

(2) μ は L-正則 L-Borel測度.　」

補題５－３　次の X_c は X 中 μ-thick な閉集合である．

$X_c \equiv \{x \in X \mid \forall \alpha \ \mu(U_\alpha)>0$ **を満たす x の基本近傍系**$\{U_\alpha\}_\alpha$**がある**$\}$

証明 $X - X_c \equiv \{x \in X \mid \mu(U) = 0$ なる x の近傍 U がある$\}$ は開集合だから，X_c は閉集合である．

M ($\subset$ X)を $X_c \cap M = \emptyset$ なる可測集合として，$\mu(M) = 0$ を示す．

μ の L-正則性より $\forall F$(L-閉集合)$\subset M$ に対して，$\mu(F)=0$ を言えばよい．$X_c \cap F=\emptyset$ だから，$\forall x \in F$ の L-近傍 U_xで $\mu(U_x)=0$ となるものが有る．開被覆 $F \subset \cup_{x \in F} U_x^\circ$ (U_x°は U_xの内点の集合)について F の L-性を適用して，可算個の族 $\{U_{xj}\}$ を取り $F \subset \cup_j U_{xj}$ と出来るが，$\forall j$ $\mu(U_{xj})=0$ だから $\mu(F)<\Sigma_j \mu(U_{xj})=0$ となる． ∎

補題により X を 相対位相を入れた X_c で置き換えて，以下

[*] $\forall x \in X$ で$\forall \alpha$ $\mu(U_x^\alpha)>0$ となる x の基本近傍系$\{U_x^\alpha\}_\alpha$がある

とする．

こうすると明らかに

補題５－４ 仮定 [*] のもとでは，任意の可測開集合は μ-正測度を持つ．

定理５－５ Stone空間 $X^\sim$ 上の完全測度 ν で正測度Baire コンパクト集合 K から測度 0 の集合を除き，開且つ閉集合に出来る．

証明 $K=\cap_j U_j$ となる開集合の単調減少可算族 $\{U_j\}$ をとる．要すれば U_j を小さく置き換える事により，各 U_j は全て開且つ閉であるとして良い．特に $\lim_j \nu(U_j \triangle K)=\lim_j \nu(U_j-K)=0$ である．

一方 ν は完全測度としたから，開且つ閉の集合 V が有って，$\nu(V \triangle K)=0$ となる． 従って $0=\lim_j \nu(U_j \triangle V)=\lim_j \nu(U_j-V)+\lim_j \nu(V-U_j)$．しかし第２項 $\lim_j \nu(V-U_j)$ は広義単調増大であるから常に値は 0 でなくてはならない．しかるに V, U_j は共に開

且つ閉であるから，$V-U_j$ は開集合．その ν-測度が 0 であるから $V-U_j=\emptyset$．つまり $\forall j$ で $V \subset U_j$．即ち $V \subset \cap_j U_j = K$ となり，$K \supset V$ で，$\nu(K-V)=0$ だから，V が求めるものである．■

系　Stone空間 $X^\sim$ の上の完全測度 ν では，稠密な部分集合は ν-thickである．」

一般に与えられた測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ に対して，$\mathfrak{H} \equiv \mathcal{L}^2(X, \mu)$，$\mathcal{M} \equiv \{T_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)\}$ ととると，上の定理より iii) をみたすような 測度空間 $(X^\sim, \mathfrak{B}^\sim, \mu^\sim)$ が取れて，$\mathfrak{H} \simeq \mathcal{L}^2(X^\sim, \mu^\sim)$ となる．明らかに $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ の $(0, \infty)$-部分は除外された形になり，関数空間で $\mathcal{L}^2(X, \mu) \simeq \mathcal{L}^2(X^\sim, \mu^\sim)$ となる．（棚おろし定理の一部に対応する．）

$X^\sim$ は局所コンパクトであり，$\mu^\sim$ はその上の Radon測度として定義されるから，$\mu^\sim$ は正則 Borel測度と考えてよい．

ここで，$\mu(E) > 0$ なる X の可測集合に対して，$\chi_E \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ を掛ける作用に対応する $\mathfrak{H} \equiv \mathcal{L}^2(X, \mu)$ 上の作用素 $T_{\chi E} \in \mathcal{M}$ は 0 でない射影作用素であり，その Gelfand表現は Stone空間 $X^\sim$ の中のある開かつ閉集合 $E^\sim$ の特性関数となる．

$X \supset E \to \chi_E \to T_{\chi E} \to \varphi_E \to E^\sim \subset X^\sim$ の図式によって，E に $X^\sim$ の中の開かつ閉の集合 $E^\sim$ が対応する．以下 $\varphi(E) \equiv E^\sim$ の記号を用いる．$\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$ なら $\varphi(E_1) = \varphi(E_2)$ である．

我々の仮定［A］の下に，元の空間 X と今構成した局所 Stone

空間 $X^{\sim}$ との関係を調べる．

先ず X が T_2-空間であるとの仮定から $\forall x\in X$ に対して，$\forall\alpha$ $\mu(U_x^{\alpha})>0$ となる x の可測近傍系 $\{U_x^{\alpha}\}$ が有り，$\{x\}=\cap_{\alpha}U_x^{\alpha}$．明らかに$\{E_x^{\alpha}\equiv\varphi(U_x^{\alpha})\}_{\alpha}$ は有限交差性をもつから，$E_x\equiv\cap_{\alpha}E_x^{\alpha}\neq\emptyset$．

所で $x_1\neq x_2\in X$ に対して，それぞれの可測近傍 U_1，U_2 を $U_1\cap U_2=\emptyset$ ととれば，対応する $X^{\sim}$ 中の開かつ閉集合 E_1,E_2 で $E_1\cap E_2=\emptyset$ となるから $E_{x1}\cap E_{x2}=\emptyset$ である．

$X^{\sim}{}_c\equiv\cup_x E_x$ $(\subset X^{\sim})$ と置く．

$\forall y\in X^{\sim}{}_c$ に対して，$y\in E_{x(y)}$ となる $x(y)\in X$ が定まる．$X^{\sim}$ から制限することにより入れた $X^{\sim}{}_c$ の Borel構造に対して，この $X^{\sim}{}_c\ni y\mapsto x(y)\in X$ の写像は可測である．従って $X^{\sim}{}_c$ の上の測度 ν から X の上の測度 $\nu^{\vee}$ を，　$\nu^{\vee}(F)\equiv\nu(x^{-1}(F))$ により定義する事が出来る．更に

補題５－６　$X^{\sim}$ 上の $X^{\sim}{}_c$ を thick集合にする様な Borel測度 ν に対して，X 上の L-Borel測度 $\nu^{\vee}$ を

(**)　　$\nu^{\vee}(F)\equiv\nu^{\sim}(x^{-1}(F))$

但しここで，$\nu^{\sim}$ は $\nu^{\sim}(E\cap X^{\sim}{}_c)\equiv\nu(E)$ で定義した $X^{\sim}{}_c$ 上の測度である．　」

定理５－７　μ を X 上の L-正則な L-Borel測度とし，先に述べた手順により $X^{\sim}$及びその上の μ に対応する完全測度 $\mu^{\sim}$を作る．

この時 $X^{\sim}{}_c$ は $X^{\sim}$ の中の $\mu^{\sim}$-thick部分集合である．

証明　簡単の為に局所化して，μ は有限測度，従って $X^{\sim}$ はStone空間であるとして示す．一般の場合はつなぎ合わして考えればよい．

先ず，$\forall x \in X$ に対して μ の L-正則性から，

$\mu(\{x\}) = \lim\downarrow_j \mu(U_j)$ となる x の近傍 U_j の単調減少列が有る．仮定 [F] より $\mu(U_j) > 0$ だから，対応する $X^{\sim}$ の開且つ閉の部分集合 $U_j^{\sim}$ に対して $E_x = \cap_j U_j^{\sim}$ になる．

今 $X^{\sim}_c$ が $\mu^{\sim}$-thick でないとすれば，$X^{\sim}$ 中のある Baireコンパクト集合 K が有って，$K \cap X^{\sim}_c = \emptyset$，しかも $\mu^{\sim}(K) > 0$.

定理 5－5 により，K は開且つ閉であり，X 上のある L-可測集合 M で，$\mu(M) = \mu^{\sim}(K) > 0$ となるものが対応する．μ のL-正則性により，X 上の 閉 L-集合 $M^{\vee}$ ($\subset M$) で，$\mu(M^{\vee}) > 0$ としてよい．もし $\forall x \in M^{\vee}$ で x の 開 L-近傍 U_x が存在して，$\mu(M^{\vee} \cap U_x) = 0$ と出来るならば，開被覆 $M^{\vee} \subset \cup_{x \in M} U_x$ から選んだ可算開被覆 $M^{\vee} \subset \cup_j U_{xj}$ を考えると，$\mu(M^{\vee}) \leqq \Sigma_j \mu(M^{\vee} \cap U_{xj}) = 0$ となり，$\mu(M^{\vee}) > 0$ に反する．

従って $\exists x \in M^{\vee}$ で $\forall U^{\alpha}$ (x の L-可測近傍) に対して，$\mu(M^{\vee} \cap U^{\alpha}) > 0$ ．従って Gel'fand変換を用いて対応する $X^{\sim}$ の集合に対して，$K^{\vee} \cap U^{\alpha\sim}$ ($K^{\vee}$ は $M^{\vee}$ に Gel'fand変換により対応する $X^{\sim}$ の開且つ閉の集合) は $\mu(K^{\vee} \cap U^{\alpha\sim}) = \mu(M^{\vee} \cap U^{\alpha}) > 0$ ．また $\cap U^{\alpha\sim} = E_x$ より $K \cap X^{\sim}_c \supset K^{\vee} \cap X^{\sim}_c \supset$

$K^{\vee} \cap U^{\alpha\sim}$，$K^{\vee}$，$U^{\alpha\sim}$は共にコンパクトであり，有限交叉性をもつから $\emptyset \neq K^{\vee} \cap (\cap U^{\alpha\sim}) = K^{\vee} \cap E_x$．これは K の取り方に反する．■

§6　軌道による分解，エルゴード分解

位相空間 X の上に同相変換群 G が働いているとき，開集合のある G-不変な族から生成されるBorel場 $\mathfrak{B}$ の上に定義された測度 μ を各 G-軌道にのる測度の和または G-エルゴード部分の和（積分型連続和を含む）に分解する問題は，よく現れる問題である．

X が可分である時は通常この各 G-軌道が可算分離的であるとの仮定の下に，直和成分になる測度が定義出来る為の多くの条件の1つが満たされない様な軌道は 0-測度の集合をなす事を示し，それらの例外集合を除外して行くいった論法を可算回繰り返す事により，最終的に軌道空間の殆ど到るところを占める部分集合の上で直和成分となる測度が定義されて，与えられた測度はそれらの積分として表示されるとの結果を導く．

しかし X が非可分である時は，条件の数が非可算個となり，前§で述べたようにこの論法を使うことはできない．したがってむしろ全条件が成立するある軌道の集合を確定して，その集合が μ でthickである事を示す論法を取る事を考える．

X を局所コンパクト空間とし，X の Borel集合全体の作るBorel場 $\mathfrak{B}$ の上に定義された 正則 Borel測度 μ を1つ固定する．

定義6－1 ある測度空間（Z, $\mathfrak{F}$, ν）と $\forall z \in Z$ に付随した X の測度 μ_z によって，与えられた μ が X 上の任意の可測関数 f について

$$\mu(f) \equiv \int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_Z \{\int_X f(x)\, d\mu_z(x)\}\, d\nu(z)$$

となる時，μ は **Z-空間上で分解された**と言い，

(*) $\mu = \int_Z \mu_z d\nu(z)$ と書く．

特に Z が適当な Borel構造 $\mathfrak{F}$ を入れた X 上の G-軌道の作る空間 X/G であって，測度 μ_z がそれぞれ $z \in Z$ に対応する G-軌道 $\omega_z \equiv xG$ を μ_z-thick とする時，(*) を **μ の G-軌道による分解**と言う．一方各測度 μ_z がエルゴード測度である時，(*) を **μ のエルゴード分解**と言う． 」

X 上の変換群 G による G-軌道の空間への μ の分解を考える為には G が $\mathfrak{B}$ を全体として不変にしている事，即ち Borel構造を保つ変換である事が必要である．局所コンパクト空間の上の Borel 集合全体を $\mathfrak{B}$ とするなら，同相変換群 G はこの条件を満たす．

次に一般に G が大きい時，$\mathfrak{B}$-可測集合は G-不変とならない場合がある．その為には Z の Borel構造 $\mathfrak{F}$ を定める G-軌道毎の集合は，X 上の局所可測集合まで広げる必要がある．

上の考察から，Z の Borel構造 $\mathfrak{F}$ は G-軌道毎の集合の族により与えられるとし，X 上の G-軌道の空間を直接考える代わりに，G-軌道毎の局所可測集合の特性関数をかける $\mathfrak{H} \equiv \mathcal{L}^2(X, \mu)$ 上の作

用素が生成する可換 von Neumann環 $\mathcal{M}$ を考える．$\mathfrak{H}$ を $\mathcal{M}$-巡回部分の直和に $\Sigma_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$ と分け，それぞれの巡回部分 $\mathfrak{H}_\alpha$ への $\mathcal{M}$ の制限に補題5－2を適用して $\mathfrak{H}_\alpha \equiv \mathcal{L}^2(X_\alpha, \mu_\alpha)$ となる (X_α, μ_α) を作り，$X \equiv \Sigma_\alpha X_\alpha$，$\mu \equiv \Sigma_\alpha \mu_\alpha$ と置く事により，$\mathcal{M}$ を局所 Stone空間 X の上の局所化可能測度 μ による $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$の中に実現する事が出来る．

今，G-軌道による分解と言う設定から離れて，もっと一般に，X 上の Borel構造 $\mathfrak{B}$ について局所可測である様な集合の全体の作る Borel構造 $\mathfrak{F}^\sim$ の部分 Borel場 $\mathfrak{F}$ が与えられたとして，”μ を $\mathfrak{F}$ に対応して分解する”と言う問題に変えて検討する．

以下で紹介する事は，[T] に述べた事なので，概略を筋道に従って説明する．詳細は [T] を参照されたい．

以下 Borel場 $\mathfrak{F}$を上で与えたものとし，$\mathfrak{H} \equiv \mathcal{L}^2(X, \mu)$ の上の $\mathfrak{F}$ の元の特性関数を掛ける作用素の生成する可換 von Neumann環を $\mathcal{M}$ とする．$\mathcal{M}$をその Gelfand双対である局所 Stone空間 Zの上の連続関数環として実現する．§５ の議論から $\forall F \in \mathfrak{F}$ に対して，Z の可測集合 $F^\sim$ が対応する．$F^\sim$ の生成する Borel場を $\mathfrak{Z}$と書く．$f \in C_0(X)$ に対して $f \times \chi_F$ は可測であるから，f を固定する毎に

$$\mathfrak{Z} \ni F^\sim \mapsto \nu_f(F^\sim) \equiv \int_X f(x) \chi_F(x)\, d\mu(x)$$

は (Z, $\mathfrak{Z}$) 上の測度を与える．ここで次の性質を定義する．

定義６－２　$(Z, \mathfrak{Z})$上の測度の族 $\{\nu_\alpha\}_\alpha$ が $\mathfrak{Z}$ に関して一様

に局所化可能とは,ある有限完全測度 ν(**底測度**と言う)が有り,

$\forall\alpha$ で $+\infty > \exists m_\alpha > 0$ で $m_\alpha \nu \geqq \nu_\alpha$ となる事を言う.」

以下,我々の $\{\nu_f \mid f \in C_0(X)\}$ に対して次を仮定する.

仮定6－3 $\{\nu_f \mid f \in C_0(X)\}$ は $\mathfrak{Z}$ に関して一様に局所化可能である.その底測度を ν とする.　」

局所コンパクト空間 X の上に,局所コンパクト群 G が同相変換群として作用し,μ が G-準不変測度であり連続な密度関数を持つとする.先の $\mathfrak{Z}$ を G-不変局所可測集合の全体とすれば,仮定6－3 は満たされる.(cf.[T] 補題3.7.15)

さて上の仮定を置くと ν_f は ν に絶対連続であるから,ある有界可測関数 ψ_f が有って,$d\nu_f(z) = \psi_f(z) d\nu(z)$ となる.所で ν は完全測度としたから,ψ_f は $[\psi_f] = [\nu_f]$ を満たす連続関数としてよい.そして容易に $\forall z \in Z$ で $C_0(X) \ni f \mapsto \psi_f(z) \in \mathbb{C}$ が線型であり,$f \in C_0^+(X) \Rightarrow \psi_f(z) \geqq 0$ である事が示される.従って §2 の Rieszの定理他の議論を使う事により,X 上の正則Borel測度 μ_z が有って,$\psi_f(z) = \int_X f(x)\, d\mu_z(x)$ と書ける.

これらの式をつなぐと

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_Z d\nu_f(z) = \int_Z \psi_f(z)\, d\nu(z)$$

$$= \int_Z \{\int_X f(x)\, d\mu_z(x)\}\, d\nu(z)$$

が得られる.これを測度の部分だけ抜き出してみると,

定理6－4 局所コンパクト空間 X の上の正則 Borel測度 μ

は，局所可測集合の作る Borel場 $\mathfrak{F}$ に対して上記の手順で作った測度の族 $\{\nu_f\}$ が一様に局所化可能なら $\mu = \int_Z \mu_z \, d\nu(z)$ と Z 上で分解される．」

さらに次が言える．([T]補題3．7．10)

補題6－5 $z_1 \neq z_2 \in Z \Rightarrow \mu_{z1} \perp \mu_{z2}$．」

さて我々の場合，簡単に示される条件の下に次が成立する．

定理6－6 (cf．[T]定理3．7．12) 定理6－4 の分解で，ある X_0 ($\subset X$) が μ-thick であったとすれば，集合 $\{ z \mid X_0$ が μ_z-thick である$\}$($\subset Z$) は ν-thick である．」

これらの議論と，§5 で示した事を組み合わせる．

局所 L-空間 X の上に，L-正則 L-Borel測度 μ が与えられ，それより §5 で述べた手順で局所 Stone空間 $X^\sim$ とその上の，完全測度による局所化可能測度 $\mu^\sim$ を作る．

一方 X 上の局所可測集合の族の作る Borel場 $\mathfrak{F}$ により，その Gel'fand双対 Z の上で，$\mu^\sim$ が一様に局所化可能の条件の下に $\mu^\sim = \int_Z \mu_z^\sim \, d\nu(z)$ と分解する．

ここで，$X^\sim$ 中の $X^\sim_c$ は $\mu^\sim$-thick であるから，前定理により，$X^\sim_c$が $\mu_z^\sim$-thickで有るような $z \in Z$ の全体 Z_0 は ν-thick であり，上の分解は Z_0 上の積分は $\mu^\sim = \int_{Z_0} \mu_z^\sim \, d\nu(z)$ と書き直す事が出来る．

所で補題5－6 により，$X^\sim_c$ を thick集合とする $X^\sim$ 上の測

度 $\mu_z{}^{\sim}$ から，対応する X 上の測度 μ_z を作る事が出来る．この測度により上の積分を解釈すると，最初の局所 L-空間 X 上の L-正則 L-Borel測度の展開として， $\mu = \int_{Z0} \mu_z \, d\nu(z)$ が得られる．

まとめて

定理６－７ 局所 L-空間 X の上の L-正則 L-Borel測度 μ は，局所可測集合の作る Borel場 $\mathfrak{F}$ に対して上記の手順で作った測度の族 $\{\nu_f\}$ が一様に局所化可能なら $\mu = \int_Z \mu_z \, d\nu(z)$ と Z 上で分解される． 」

この結果をエルゴード分解に当てはめて見る．

X を局所 L-空間，G をその上に同相変換群として作用する局所コンパクト群，μ を X 上の G-不変測度とする．この時 $\mathfrak{H} \equiv \mathcal{L}^2(X,\mu)$ の上の G による移動の作用素で，G のユニタリ表現 $\mathfrak{D} \equiv \{\mathfrak{H}, T_g\}$ が自然に定義出来る．一方 $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ の元を掛ける作用素の生成する可換 von Neumann環のユニタリ元の全体の作る可換離散群を $\mathfrak{A}$ とすれば，G は $\mathfrak{A}$ の上の同型変換を引き起こし，半直積群 $G \ltimes \mathfrak{A}$ のユニタリ表現 $\{\mathfrak{H}, T_g \times \mathfrak{A}\}$ が得られる．上で分解を導いた可換 von Neumann環 $\mathcal{M}$ としては，$\{T_g \times \mathfrak{A}\}'$（可換子環）の中の極大可換環を 1 つ選び固定する．こうすれば，得られた分解は $G \ltimes \mathfrak{A}$ のユニタリ表現 $\{\mathfrak{H}, T_g \times \mathfrak{A}\}$ の既約分解に対応するものとなる．つまり，$z \in Z$ に対応する X 上の測度 μ_z から作った $\mathcal{L}^2(X,\mu_z)$ の上の $G \ltimes \mathfrak{A}$ の表現による直積分分解を与える．しか

し，この分解は§４の後半に引用した通り，Choquet- Bishop-de Leeuwの定理（定理４－４）を用いるもので，全ての $z \in Z$ に対応する表現が既約である事を保証するものではなく，既約である z の全体の集合 Z_0 が ν-thick集合となる事を言う．そこで §４ に従って，分解を Z_0 に制限した形で既約分解を作る事が出来る．$G \ltimes \mathfrak{A}$ のユニタリ表現 $\{\mathcal{L}^2(X, \mu_z), (T_g \times \mathfrak{A})_z\}$ が既約であるとは，$\mathcal{L}^2(X, \mu_z)$ 上で $\{(T_g \times \mathfrak{A})_z\}$ の可換子環がスカラーとなる事であり，即ち μ_z がエルゴード的である事に他ならないから，上の既約分解はそのまま μ のエルゴード分解を与えるものである．まとめて

定理６－８ X を局所 L-空間，G をその上に同相変換群として作用する局所コンパクト群，μ を X 上の G-不変測度とする時，μ のエルゴード分解が存在する． 」

次に軌道分解を考える．

局所コンパクト空間 X ，局所コンパクト同相変換群 G ，X 上の G-準不変測度 μ が連続な密度関数を持つとする．

定義６－９ X の中の G-軌道 xG が全て局所閉集合である時，X/G $(=\{xG\})$ に X の G-不変開集合の像から生成される商位相を入れた空間を，局所閉軌道空間と言う． 」

この性質が有ると，先の $\mathfrak{S}$ を X 上の G-不変局所可測集合全体の作る Borel場として，定理６－４の議論により構築した Z 上の μ の分解を X/G に持ち込む事が出来る．(cf.[T]補題３．７．１９)

補題６－１０ X/G が局所閉軌道空間なら，定理６－４の分解の空間 Z から X/G への埋め込み写像が有り，ある X/G 上の測度 ν_1 により（Z，ν）と（X/G，ν_1）は同型になる．さらに μ_z は z に対応する軌道 xG を thick集合とする．」

これは軌道分解を与えるものである．

[T] 辰馬伸彦，位相群の双対定理，紀伊国屋書店数学叢書，1994