数理解析研究所講究録
第 887 巻 1994 年 141-150

Minlos の定理の逆

九工大情報工　岡崎悦明 (Yoshiaki Okazaki)

1. Bochner 問題

(E, τ) を局所凸ハウスドルフ空間とし $\mathcal{B}_E$ を E' 上の (E から定まる) cylinder sets 全体から成る algebra とする。(E', $\mathcal{B}_E$) 上に cylinder set measure μ が与えられたとき, その特性関数を $\chi_\mu(x) = \int_{E'} e^{i\langle x, x'\rangle}\, d\mu(x')$ とおけば, $\chi_\mu(x)$: E $\longrightarrow \mathbb{C}$ は次の条件をみたす;

1. $\chi_\mu(x)$ は E 上 正定値
2. $\chi_\mu(x)$ は E の任意の有限次元部分空間上で連続。

逆に 1. 2. をみたす E 上の関数が与えられたとき, これを特性関数とする (E', $\mathcal{B}_E$) 上の cylinder set measure が唯一つ存在する。

[問題]　μ が σ-additive なる条件を $\chi_\mu(x)$ の (適当な位相 σ での) 連続性により特徴付けよ。

記号: $B(\tau, E) := \left\{ \chi(x) : E \to \mathbb{C} \; ; \; \exists\, \mu \ \sigma\text{-additive such that } \chi(x) = \int_{E'} e^{i\langle x, x'\rangle}\, d\mu(x') \right\}$

$$C(\sigma, E) := \{ \chi(x) : E \to \mathbb{C} \ ; \ E\text{上正定値}, \forall\text{有限次元部分空間上連続かつ位相}\ \sigma\ \text{について連続} \}$$

（σ は E 上の vector topology である）

定義　1. σ が sufficient topology $\Leftrightarrow$ $C(\sigma, E) \subset B(\tau, E)$

2. σ が necessary topology $\Leftrightarrow$ $B(\tau, E) \subset C(\sigma, E)$

3. σ が necessary and sufficient topology $\Leftrightarrow$ $C(\sigma, E) = B(\tau, E)$

3. の条件 $C(\sigma, E) = B(\tau, E)$ をみたす位相が一つでもあれば，$C(\sigma, E) = B(\tau, E)$ をみたす最弱の vector topology σ_0 が存在する。この σ_0 は $\mathcal{S}$-topology と呼ばれる。Hilbert 空間において $C(\sigma, E) = B(\tau, E)$ をみたす位相が二つ知られている。Sazonov が与えた $\mathcal{S}$-位相と Gross が与えた measurable seminorms による位相である。次の結果が知られている。

定理　E を approximation property をもつ Banach 空間とし，E'（dual norm）は L^0 にうめ込み可能とする。この時 E 上に $\mathcal{S}$-topology σ_0 が存在し，semi-metrics の系，$p_\nu(x) = \int_{E'} |\langle x, x' \rangle| / (1 + |\langle x, x' \rangle|) \, d\nu(x')$，$\nu$ は E' 上の $\sigma(E', E)$-Radon，で与えられる（Mouchtari）。

定理　(E, τ) が nuclear $\Rightarrow$ $C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$

(Minlos − Yamasaki)

定理　τ, σ を Hilbertian seminorm 型位相とし, $Id: (E, \tau) \longrightarrow (E, \sigma)$ は Hilbert − Schmidt 型とする。

$\Rightarrow$ $C(\sigma, \tau) \subset B(\tau, E)$

(Yamasaki)

定理　(E, τ) を metrizable かつ Hilbertian seminorm 型位相とする。いま $Id: (E, \tau) \longrightarrow (E, \sigma)$ が Hilbert-Schmidt 型なる最弱位相を σ_0 とすると, σ_0 は $\mathcal{S}$−位相である。　(Yamasaki)

定理　(E, τ) を metrizable かつ Hilbertian seminorm 型位相とする。このとき, $C(\sigma, E) \subset B(\tau, E)$ ならば $Id: (E, \tau) \longrightarrow (E, \sigma)$ は Hilbert − Schmidt 型である。

(Minlos − Yamasaki)

特に系として, (E, τ) が metrizable かつ Hilbertian seminorm 型位相のとき, $C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$ ならば (ie, τ が sufficient topology ならば) (E, τ) は核型空間となる。

2. Minlos の定理 の逆

[Minlos の定理の逆問題 (Yamasaki p. 208)]

局所凸空間 (E, τ) にて, τ 自身が sufficient topology, 即ち, $C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$, ならば (E, τ) は核型空間であるか?

この逆問題が一般には成り立たないことは山崎氏により注意されている。実際 Hilbert 空間上の S-位相 σ_0 については $C(\sigma_0, H) = B(\sigma_0, H)$ であるが, H が無限次元ならば σ_0 は核型ではない。山崎氏は関連した次の問題も提出している。

[予想 (Yamasaki p. 208 ~ 211)]

(E, τ) をノルム空間とすると $C(\tau, E) \not\subset B(\tau, E)$ であろう。

本報告において, Minlos の定理の逆問題を十分広い空間にて解決し, 上記の山崎氏の予想が正しいことを報告する。

核型空間を特徴付ける性質のうちで, cylinder 測度と関連しているのは scalarly summable sequence によるものである。特に Pietsch による核型性条件が以下有用である。

(E, τ) を局所凸ハウスドルフ空間とする。

定義　点列 $(x_n) \subset E$ が scalarly summable

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x' \rangle| < \infty \quad \text{for } \forall x' \in E'$$

点列 $(x_n) \subset E$ が absolutely summable

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty \text{ for } \forall \text{ conti. seminorm } p \text{ of } \tau$$

点列 $(x_n) \subset E$ が totally summable

$\Longleftrightarrow \exists B \subset E$: closed, absolutely convex, bounded s.t. $\sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) < \infty$, ここに p_B は B の gauge である。

記号：$sl^1(E) :=$ scalarly summable sequences 全体

$al^1(E) :=$ absolutely summable sequences 全体

$tl^1(E) :=$ totally summable sequences 全体

$sl^1(E)$, $al^1(E)$, $tl^1(E)$ はそれぞれ seminorm 系

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x' \rangle| \qquad (x' \in E')$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \qquad (p : \text{conti. seminorm})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) \qquad (B : \text{closed, abs. convex, bounded})$$

により局所凸ハウスドルフ空間となる。以下で $al^1(E)$ の"有界集合"に言及するが，セミノルム系 $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n)$（$p$ は E 上の conti. seminorm 全体）によるものである。

定義 (E, τ) が Property B を持つ

$\Longleftrightarrow$

任意の有界集合 $\mathcal{B} \subset al^1(E)$ に対して，

$\exists B \subset E$ bounded st $\sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) \leqq 1$ for $\forall (x_n) \in \mathcal{B}$

(Pietsch § 1.5.5)

(E, τ) が Property B をもてば $al^1(E) = tl^1(E)$ である。(E, τ) が metrizable または dual metrizable ならば Property B をもつ。また Property B をもつ空間の inductive limit, projective limit（いずれも可算個の場合）は再び Property B をもつ。

核型性を特徴付ける次の定理が以下基本的である。

定理 (E, τ) は Property B をもち，かつ，$sl^1(E) = al^1(E)$ とする。このとき strong dual E'_b は核型である。

(Pietsch, Th. 4.2.11)

(E, τ) を barrelled space とし，$(x_n') \in s\ell^1(E')$ とすると，$\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n' \rangle|$ ，$x \in E$，は E 上の連続セミノルムである。従ってその特性関数が $e^{-\varphi(x)}$ なる cylinder set measure μ が $(E', \mathcal{B}_E)$ 上に存在する。いま τ 自身が sufficient topology，即ち，$C(\tau, E) \subset B(\tau, E)$，とすると，$\mu$ は σ-additive である。μ が discrete な 1-stable measure であることから実は $\sigma(E', E)$-Radon measure となっている（$\sigma(E', E)$ は weak * topology）。この事実から (x_n') は E_b'（b は strong dual topology）において totally summable なることが証明され，$s\ell^1(E') = t\ell^1(E_b')$ となる。ここで E_b' が property B をもてば，$(E_b')_b'$ は核型であり，従って (E, τ) 自身も核型となる。

補題　F，G を Banach 空間とし，$\psi : G \to F$ を連続線形写像，$\psi' : F' \to G'$ を adjoint とする。$(x_i') \subset F'$，$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i' \rangle| < \infty$ for $\forall x \in F$，とし，μ を特性関数が $\exp(-\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i' \rangle|)$ なる F' 上の 1-stable cylinder set measure とする。今，像 $\psi'(\mu)$ は G' 上の $\sigma(G', G)$-Radon measure とすると，$\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi'(x_i')\|_{G'} < \infty$ である。

上の補題の証明は"任意のBanach空間はcotype 1-stable"という事実の証明と完全に並行している。

補題　(E, τ) をbarrelledとし，$\forall\,(x_i') \in s\ell^1(E')$ に対し，$\exp(-\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i' \rangle|)$ は $\sigma(E', E)$-Radon measureの特性関数とする。このとき $s\ell^1(E') = t\ell^1(E_b')$ となる。

証明　$\mu(K) > 0$ なる $\sigma(E', E)$-compact convex set K をとる。(E, τ) はbarrelledより K は E_b' で有界であり，μ が 0-1 lawをみたすことから $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} nK) = 1$ である。先の補題より $\sum_{i=1}^{\infty} p_K(x_i') < \infty$ となる。

定義．barrelled spaceでstrong dual E_b' がproperty $\mathcal{B}$ をもつものを"クラス $\mathcal{M}$"と呼ぶ。

すでに注意したように LF-space，barrelled DF-space等はクラス $\mathcal{M}$ である。

<u>主定理</u>　(E, τ) をクラス $\mathcal{M}$ とし，τ はsufficient topologyとすると，(E, τ) は核型である。

証明　補題より $sl^1(E') = tl^1(E'_b)$ であり, Pietsch の定理から $(E'_b)'_b$ は核型となる。E は barrelled より (E, T) の位相は $(E'_b)'_b$ から導かれ, E も核型である。

この定理の証明においては, すべての cylinder set measure を考える必要はなく, 特性関数が $\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, x_i' \rangle|\right)$ の形のもの, discrete 1-stable cylinder measure, のみを考えれば十分である。 ところで Gaussian cylinder set measure のみを考えるとどうであろうか。 次の結果は良く知られている。

定理　E を metrizable かつ Hilbertian seminorm をもつ空間とする。もし E' 上のすべての continuous Gaussian cylinder set measure が σ-additive ならば, E は核型である。

(Minlos - Yamasaki)

残念ながら一般の空間においては, すべての continuous Gaussian cylinder set measure on E' が σ-additive だからといって, E が核型であるとは限らない。Fréchet 空間においても反例がある。

補題　E を Banach 空間とし，dual E'_b は cotype q ($2 \leqq q < \infty$) とする。$(x'_n) \subset E'$ に対し，μ を特性関数が $\exp(-\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x'_n \rangle|^2)$ なる Gaussian cylinder set measure とする。μ が $\sigma(E', E)$-Radon であれば，$\sum_{n=1}^{\infty} \| x'_n \|_{E'}^{q} < \infty$ となる。

定理　$2 \leqq q < \infty$。(E, τ) を局所凸ハウスドルフ空間とし，基本セミノルム系 $\{p_\alpha\}$ として，dual $(E, p_\alpha)'$ は cotype q なるものが存在するとする。さらに，(E, τ) はクラス $\mathcal{M}$ であり，すべての E' 上の continuous Gaussian cylinder set measure は σ-additive とする。このとき E は核型である。

文献

1. Y. Okazaki and Y. Takahashi, The converse of Minlos' theorem (to appear in Publ. R.I.M.S., 30-5)
2. A. Pietsch, Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972.
3. Y. Yamasaki, 無限次元空間上の測度（I），紀伊国屋，1978.