

界面振動における進行する脈動波解⁽¹⁾

宮原 あゆみ (日新システムズ (株)) 池田 勉 (龍谷大学理工学部)
Ayumi Miyahara (Nisshin Systems) and Tsutomu Ikeda (Ryukoku University)

1. はじめに 反応拡散方程式系は、自然科学の様々な分野における非線形現象の数
理モデルとして、時間空間構造 (パターン) の形成・発展機構の解明に対して理論的な
側面から貢献してきた。この報告では、2つの内部遷移層を持つ「パルス解」の振る舞
いやその形態変化について考察する。

次の4つの形態のパルス解を扱う：

- Standing Pulse,
- Traveling Pulse,
- Standing Breather,
- Traveling Breather.

定常解である Standing Pulse、進行波解である Traveling Pulse、Standing Pulse の不安定化
によって出現する Standing Breather (内部遷移層が周期振動する解) はすでに様々な文
献において考察されている ([1], [3] など)。2つの内部遷移層を振動させながら進行
する進行脈動波解 (Traveling Breather) も、Static-Hopf 分岐点の近傍において存在する
ことが指摘されているが ([2])⁽²⁾、本稿の特徴は、数値計算によってではあるが、
Traveling Breather を Traveling Pulse の不安定化によって発現するものとして捕らえよう
としたことにあり、この文脈の下で Traveling Breather の存在を示した最初の論文とし
て位置づけられるであろう。

2. 促進化因子-抑制化因子系 有限区間 $(0, \ell)$ における 促進化因子-抑制化因子系：

$$(1) \quad u_t = u_{xx} + f(u, v), \quad v_t = Dv_{xx} + \beta \cdot g(u, v) \quad \text{in } (0, \infty) \times (0, \ell)$$

⁽¹⁾本稿は、第1著者による、龍谷大学理工学部数理解析学科1993年度卒業論文「Traveling and standing breathers between traveling pulses and standing pulses」をベースとしたものである。

⁽²⁾2重 Hopf 分岐点の近傍における Waving Breather の存在も [2] で述べられている。

を周期境界条件の下で考える。ここに、 $u(t, x)$ は促進化因子の密度、 $v(t, x)$ は抑制化因子の密度を表す。 D と β は、おのこの、抑制化因子と促進化因子の拡散率との相互作用の速さの比を表し、相互作用を与える $\{f, g\}$ は

$$(2) \quad f(u, v) = u(1-u)(u-a) - v, \quad g(u, v) = u - \gamma v$$

である (図1)。ここに、 a は $0 < a < 1$ を満たすパラメータ、 γ は正の定数である。本稿では、方程式系(1)に含まれる5つの非負の定数 l, D, β, a, γ のうち l, β, γ を

$$(3) \quad l \gg 1, \quad \beta \ll 1, \quad \gamma > 0$$

を満たすように固定して、 $D \geq 0$ および a に依存して、(1) のパルス解の振る舞いやその形態がどのように変化するかを調べる。

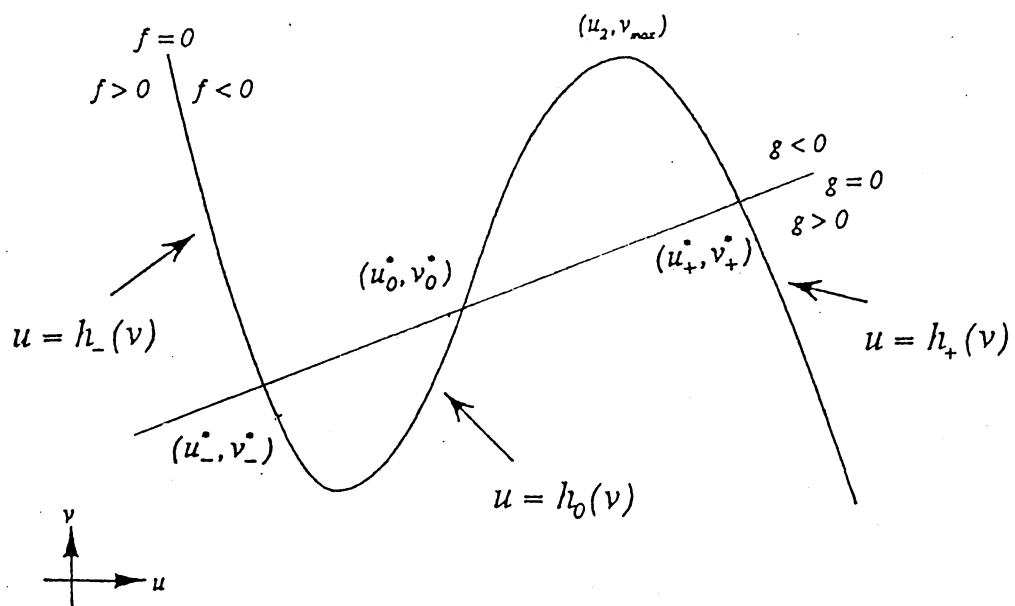


図1 相互作用を与える $\{f, g\}$

3. 内部遷移層の発現 変数変換 $x/l \rightarrow x, \beta t \rightarrow t$ によって、(1) は

$$(4) \quad \alpha \varepsilon u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u, v), \quad v_t = \varepsilon \frac{D}{\alpha} v_{xx} + g(u, v) \quad \text{in } (0, \infty) \times (0, 1)$$

と書き換えられる。ここに、 $\varepsilon = 1/l \ll 1, \alpha = \beta/\varepsilon = \alpha(1)$ である。滑らかな初期値に対して、(4) はしばらくの間

$$(5) \quad \alpha \varepsilon u_t = f(u, v), \quad v_t = \varepsilon \frac{D}{\alpha} v_{xx} + g(u, v)$$

で近似される。固定された v に対して $f(u, v)$ は双安定であり、 ε は小さいので、短時間で促進化因子のプロファイルに内部遷移層が形成され、区間 $(0, 1)$ が2つの領域に分離されることを直観的に理解できるだろう。すなわち、その一方では促進化因子の密度が高く ($u \cong h_+(v)$ 、図1参照)、他方では低くなる ($u \cong h_-(v)$)。促進化因子のこの2つの状態はその値が急激に変化する遷移層によって結ばれる。本稿で扱うパルス解はこのようにして形成されるものである。なお、抑制化因子の密度はなめらかに変化する。

4. パルス進行波解とパルス定常解 方程式系(1)を無限区間上で考え、 $D=0$ としたものは FitzHugh-Nagumo (FHN) 方程式に他ならない。FHN 方程式が安定な Traveling Pulse や Traveling Pulse Train を持つことはよく知られている。また、 $D=0$ ではなくても、 D が十分小さければ同様であることも知られている ([4])。

このことを反映して、有限区間上の方程式である(1)も $0 \leq D \ll 1$ のとき、Traveling Pulse を持つ。実際、(1)の Traveling Pulse は FHN 方程式の Traveling Pulse Train である。一方、 D が十分大きければ、Standing Pulse が(1)の安定なパルス解になることもよく知られた事実である。

それでは、まったく性質の異なるこの2種類のパルス解は、 D や a の値に依存してどのように選択されるのであろうか、また、その選択のメカニズムはどのようになっているのだろうか。

5. パルス解のパラメータ依存性 前節で述べた疑問に対する解答の方向を探るための数値計算を行った。数値計算に際しては、 $l = 400.0$, $\beta = 0.002$, $\gamma = 6.0$ に固定した。 $\gamma = 6.0$ にすると、 $0 < a < 1$ を満たす任意の a に対して、 $\{f, g\}$ は双安定な系を与えることに注意する。

a の値は2つの空間一様な安定平衡解 (u_+^*, v_+^*) と (u_-^*, v_-^*) の吸引領域を決定する (図1参照)。 a が大きいならば (u_-^*, v_-^*) の吸引領域の方が広く、 a が小さいならば (u_+^*, v_+^*) の吸引領域の方が広くなる。このことに対応して、次の3通りに a の値を固定して拡散率の比 D によるパルス解の形態変化を数値計算によって調べた：

- (A) $a = 0.075$ ((u_+^*, v_+^*) の吸引領域の方が広い) 、
- (B) $a = 0.15$ ((u_-^*, v_-^*) の吸引領域の方が広い) 、
- (C) $a = 0.1$ (吸引領域の広さがほぼ同じ) 。

おのおの場合について、Standing Pulse が安定であるような大きな D から出発して少しずつ D を小さくしながら形態変化を観察し、かつ、Traveling Pulse が安定であるような小さな D から出発して少しずつ D を大きくしながら形態変化を観察する方法を採用した。(利用した数値計算法は、拡散項に対してのみ陰的近似を用いる差分法であり、 $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.1$ とした。)

Standing Pulse が安定であるような大きな D から出発して少しずつ D を小さくする方向 (図2で左向き矢印の方向) では、(A), (B), (C) のいずれの場合についても同様の形態変化が観測される。すなわち、当初は安定であった Standing Pulse が (a に依存して定まる) あるクリテカルな D の値において Hopf - 分岐により不安定化し、代わりに Standing Breather が安定なパルス解として出現してくる。さらに D を小さくすれば、いずれの場合も、Standing Breather の振幅がしだいに大きくなり、 (a に依存して定まる) ある $D > 0$ 以下では Standing Pulse や Standing Breather は存在しなくなる。

逆に、Traveling Pulse が安定であるような小さな D から出発して少しずつ D を大きくする方向 (図2で右向き矢印の方向) では、ほぼ同じ形態変化が (A) と (B) の場合には観測されるが、(C) の場合には (A) や (B) の場合にはない形態変化のプロセスがある。

(A) や (B) の場合には、 D の増加につれて Traveling Pulse の速度はしだいに遅くなり、 (a に依存して定まる) あるクリテカルな D の値以上では Traveling Pulse は存在しなくなるだけのことである。

しかし、2つの空間一様な安定平衡解の吸引領域の広さがほぼ同じである (C) の場合には、しだいに速度を低下させた Traveling Pulse がある D の値において不安定化し、代わりに、内部遷移層を振動させながら進行する進行脈動波解 (Traveling Breather) が新たに安定なパルス解として発現する (図2~3)。この Traveling Breather はおそら

く Traveling Pulse の Hopf - 分岐により現れてくるものであろう。

Traveling Breather が安定に存在する D の範囲は極めて狭い。 D の増加とともに Traveling Breather は進行速度を低下させ振幅を大きくしてゆくが、ある D 以上では観測されなくなり、代わりに、Standing Breather が安定なパルス解となる。この Standing Breather は Standing Pulse が安定であるような大きな D から少しずつ D を小さくしたときに現れたものと同じものである。この形態の変化は跳躍的に起こる。また、Traveling Breather の D - 依存性を詳細に調べることにより、 D の増加とともに Traveling Breather はサドル・ノード分岐により安定性を失い、Standing Breather へジャンプすると推測されている。

Traveling Breather の数理解析は緒についた段階にすぎない。しかし、「Traveling Pulse の Hopf - 分岐により現れる Traveling Breather」という特徴づけは近い将来において Traveling Breather の数理解析ができることを保証しているように思える。

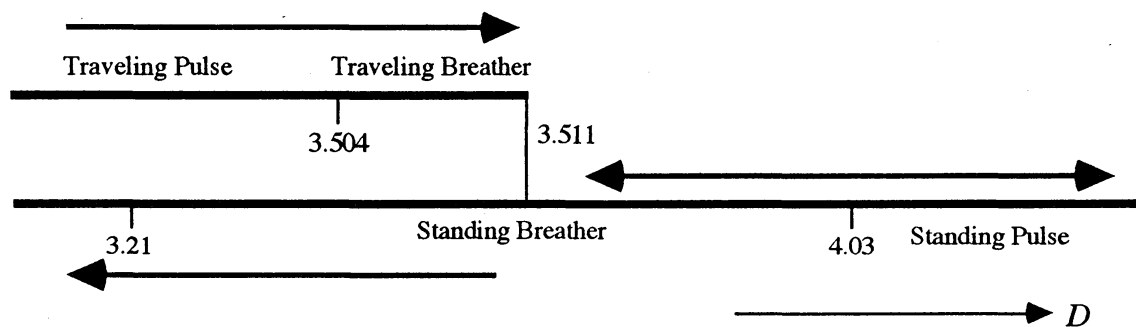


図2 パルス解の形態変化 ($a = 0.1$)

図3 は次ページに

- 参考文献** [1] T. Ikeda and Y. Nishiura, Pattern selection for two breathers, SIAM J. Appl. Math. 54 (1994), 195-230.
 [2] T. Ikeda, Numerical simulation for nonlinear oscillation of internal layers, Abstract of the Second Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics, University of Electro-Communications, Chofu, 1994.
 [3] Y. Nishiura and Y. Mimura, Layer oscillations in reaction-diffusion systems, SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), 481-514.
 [4] T. Ogawa, Travelling wave solutions to a generalized system of nerve equations, Japan J. Appl. Math. 7 (1990), 255-276.

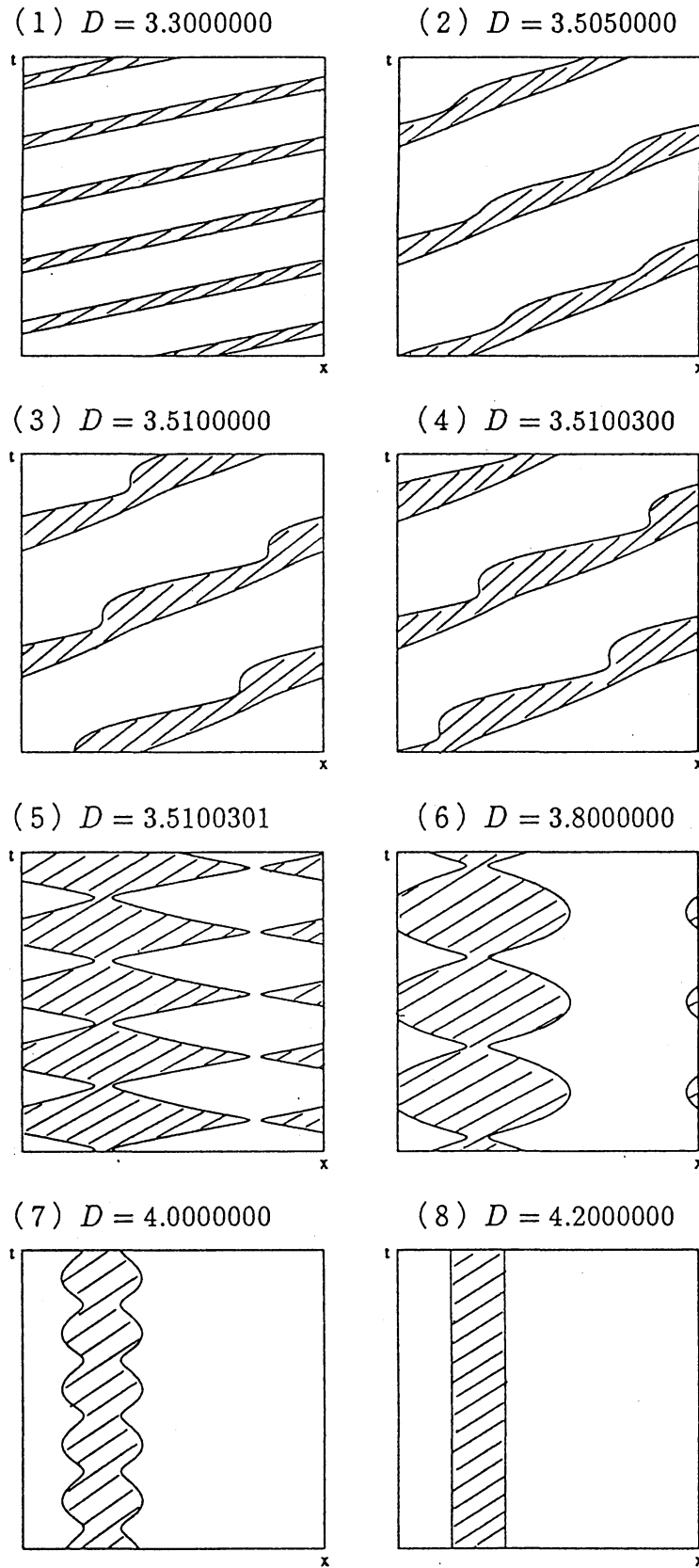


図3 パルス解の形態変化その2 ($a = 0.1$)

横軸は x 、縦軸は t 、斜線部は促進化因子の密度が低い所 ($u \cong h(v)$)