

## 三次元境界層の不安定性に対する流線曲率の影響

航技研 伊藤 信毅 (Nobutake Itoh)

### 1. はじめに

航空機の後退翼表面に発達する境界層では、主流の方向と圧力勾配の方向が異なるために、外部非粘性流の流線が圧力の低い方向に彎曲し、境界層内にはその流線に直角で彎曲の内側に向かう流れ、すなわち横流れが発生する。横流れの存在を特徴とする三次元境界層は、二次元境界層には無い不安定機構を伴うために (Gregory et al. 1955)、それよりずっと低いレイノルズ数で不安定になる。最近の研究 (Itoh 1994a, b) によると、後退翼下面のように三次元境界層が凹曲面に沿う場合には、横流れと壁面曲率の影響が共に無視できなくなり、粘性、横流れおよび遠心力に基づく三種類の不安定性が競合する。また、平行流近似に基づくテイラー・ゲルトラー方程式に境界層の非平行性の一部を付け加えることによって、遠心力不安定の臨界点が無限小波数の位置に定まるという従

来の欠陥を取り除くことができる。本研究では、これらの研究手法を拡張して流線曲率の問題に適用する。三次元境界層の上に重ねられた微小攪乱の発達を記述するために、流線曲率を表わす無次元パラメータを陽に含む簡単な線形攪乱方程式を近似的に導く。この方程式は数学的に厳密な過程から導かれたものではないので、一種のモデル方程式であるが、簡単に数量的な安定特性の評価を通じて現象の本質的な部分を理解するという目的には十分有効である。

## 2. 基本流

三次元境界層の速度分布は物体の形状や一様流の方向によって様々に変化するので、一般的な分布形を統一的に表現することは不可能である。そこで本論文では最も簡単な三次元境界層の例として、Falkner-Skan-Cooke流を取り上げる。この流れでは、外部流の  $x$  方向成分  $U_e$  が前縁からの距離  $x$  の  $m$  乗 ( $1 \geq m \geq -0.0904$ ) に比例し、 $y$  方向成分  $V_e$  が一定値を取る。

いま、動粘性係数を  $\nu$ 、壁からの距離を  $z$ 、境界層厚さを  $\delta = \sqrt{\nu x / U_e}$ 、無次元変数を  $\zeta = z / \delta$  で表わすとき、この流れはよく知られた相似速度分布を持ち、外部流に沿う方向の無次元速度成分  $U$  とそれに垂直な方向の横流れ速度成分  $V$ 、壁面に垂直な速度成分  $R^{-1}W$  はつぎのよう与えられる。

$$\begin{aligned}
 U &= F'(\zeta; m) + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \{G(\zeta; m) - F'(\zeta; m)\}, \\
 V &= \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \{G(\zeta; m) - F'(\zeta; m)\}, \\
 \frac{W}{R} &= -\frac{1}{R} \left\{ \frac{1+m}{2} F(\zeta; m) - \frac{1-m}{2} \zeta F'(\zeta; m) \right\}. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

ただし、基準速度は  $Q_E = \sqrt{U_E^2 + V_E^2}$ 、 $R$  はレイノルズ数、' は  $\zeta$  に関する微分を表わし、関数  $F(\zeta)$  および  $G(\zeta)$  は方程式

$$\begin{aligned}
 F'' + \frac{1+m}{2} FF'' + m\{1 - (F')^2\} &= 0, \quad F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1, \\
 G'' + \frac{1+m}{2} FG' &= 0, \quad G(0) = 0, \quad G(\infty) = 1. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

の解である。また、外部流線の曲率半径は前縁からの距離に依存する量となる。無次元表示 (2.1) は二つの無次元パラメータ  $\gamma$  と  $m$  を含む速度分布ファミリーを表わす。 $\gamma = V_E/U_E$  は物体の前縁に垂直な方向 (翼弦方向) に対する外部流線の傾きを表わし、 $m$  は流れ場の圧力勾配を代表する量で、順圧力勾配では正、逆圧力勾配では負の値を取る。

### 3. 線形安定計算のためのモデル方程式

外部非粘性流の流線の曲率半径が  $r_0$  となる点の近傍領域を考える。曲率中心を原点とする円柱座標を  $(r, \theta, z)$ 、時間を  $t$ 、速度成分を  $(v_r, v_\theta, v_z)$ 、圧力を  $p^*$ 、密度を  $\rho$  とする。基

準速度を  $Q_E$ 、物体表面に沿う方向の基準長さを  $L$ 、境界層厚さ  $\delta$  の基準点  $(r_0, \theta_0, 0)$  における値  $\delta_0$  を代表的な境界層厚さとし、無次元パラメータ  $\varepsilon_0 = \delta_0 / L$  は 1 に比べて十分小さく、無次元曲率  $\kappa_0 = \delta_0 / r_0$  は  $\varepsilon_0$  と同程度またはそれよりも小さいものと仮定する。また、このほかの諸量についてはつぎのような無次元化を行なう。

$$\frac{r_0(\theta - \theta_0)}{L} = \xi, \quad \frac{r - r_0}{L} = \eta, \quad \frac{z}{\delta} = \zeta, \quad \frac{Q_E t}{L} = \tau,$$

$$\frac{v_\theta}{Q_E} = U(\zeta; \xi, \eta) + \text{Re}[u(\zeta; \xi, \eta) \exp(\frac{i\Theta}{\varepsilon_0})],$$

$$\frac{v_r}{Q_E} = V(\zeta; \xi, \eta) + \text{Re}[v(\zeta; \xi, \eta) \exp(\frac{i\Theta}{\varepsilon_0})],$$

$$\frac{v_z}{Q_E R} = \frac{1}{R} W(\zeta; \xi, \eta) + \text{Re}[w(\zeta; \xi, \eta) \exp(\frac{i\Theta}{\varepsilon_0})],$$

$$\frac{p^*}{\rho Q_E^2} = P(\xi, \eta) + \text{Re}[p(\zeta; \xi, \eta) \exp(\frac{i\Theta}{\varepsilon_0})],$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \Delta(\xi, \eta), \quad \frac{\delta}{r_0} = \kappa(\xi, \eta), \quad \frac{Q_E \delta}{\nu} = R(\xi, \eta). \quad (3.1)$$

ここで、 $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $p$  は基本流  $U$ 、 $V$ 、 $R^{-1}W$ 、 $P$  に重ねられた微小な波動型攪乱で、 $\text{Re}$  は実数部を意味する。位相関数  $\Theta(\xi, \eta, \tau)$  の微分係数を

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\alpha}{\Delta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{\beta}{\Delta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{\omega}{\Delta} \quad (3.2)$$

と置き、 $\alpha$  と  $\beta$  は局所的な境界層厚さ  $\delta$  で無次元化された量

方向と  $\eta$  方向の波数、 $\omega$  は複素数で、その実部が振動数を、虚部が時間的増幅率を表すものとする。上式を円柱座標で書かれた連続の式とナビエ・ストークス方程式に代入し、基本流自身が運動方程式を満たすことおよび攪乱が十分小さくて、その非線形項が無視できることを仮定すれば、線形攪乱方程式が導かれる。

本論文では、厳密な偏微分攪乱方程式を、その主要項だけ残すことによって、簡単な常微分型モデル方程式に帰着させる。いま、波数ベクトルと速度ベクトルの内積  $\alpha U + \beta V$  の大きさおよびそれに応じて定まる  $\omega$  の大きさを表わす無次元パラメータ  $\varepsilon$  を導入するとき、粘性不安定から生じるトルミン・シュリヒティング波動では二つのベクトルが平行に近いために  $\varepsilon$  は 1 の程度であるが、二次元流におけるテイラー・ゲルトラー渦や三次元境界層の横流れ不安定から生じる縦渦型攪乱では  $\varepsilon$  は 1 に比べてずっと小さい。特に三次元境界層では、異なる種類の攪乱が発生するために、それに応じて  $\varepsilon$  が 1 の程度の場合と 1 に比べて十分小さい場合の両方を考慮する必要がある。境界層内の大部分の点でこの項が最も大きい主要項となるが、壁面近傍や転移点近傍では粘性項が主役を演じることは古典的な線形安定理論の教えるところである。特に波数の大きい場合には二次元流に対する T - G 方程

式が漸近理論で正当化され、粘性項が主要項になって曲率項と釣り合うことが証明されている (Hall 1982)。また、境界層の外側では、

$$\hat{W} = W - \varepsilon_0 R \left( \frac{\Delta_F}{h} \zeta U + \Delta_v \zeta V \right) = -\frac{1+m}{2} F, \quad (3.3)$$

で定義される  $\hat{W}$  項が  $\zeta$  に比例して大きくなるから、この項と非粘性項または曲率項との釣り合いが攪乱の減衰特性を決定する (Itoh 1994b)。以上の考察を表現するために、諸量の大きさをつぎのように仮定する。

$$1 \geq \varepsilon > \varepsilon_0 > \kappa; \quad U, u, \beta \sim O(1);$$

$$V, v, w, R^{-1}, \alpha, \omega \sim O(\varepsilon); \quad p \sim O(\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

ただし、 $R^{-1}$  は本来の大きさが  $O(\varepsilon_0)$  であるが、粘性項と  $\hat{W}$  項に掛る  $R^{-1}$  だけは形式的に  $\varepsilon$  の程度であるとみなしている。つぎに、曲率  $\kappa$  が最低次近似方程式の中に残る場合と残らない場合を別々に考える。第一の場合には  $\varepsilon = \kappa^{1/2}$ 、第二の場合には  $\varepsilon = 1$  と置き、攪乱方程式の最低次項だけを残す。その結果、 $\varepsilon$  が  $1 \geq \varepsilon \geq \kappa^{1/2}$  の範囲にわたる場合に、その全てで成立するモデル方程式は上記の二つの場合を重ね合わせることによって導かれる。いま  $\beta \neq 0$  を仮定して、 $v$  と  $p$  を消去した結果はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
& [ (\alpha^2 + \beta^2) \left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) - \frac{\hat{W}}{R} D \right\} - 2\alpha\beta\kappa U ] u \\
& - [ i\alpha \left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) - \frac{\hat{W}}{R} D \right\} D \\
& \qquad \qquad \qquad + \beta (\beta U' - \alpha V') ] w = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [ \left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) - \frac{\hat{W}}{R} D \right\} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) \\
& \qquad \qquad \qquad + i(\alpha U' + \beta V') - \frac{\hat{W}'}{R} D^2 ] w - 2i\beta\kappa (UD + U') u = 0. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

これらのモデル方程式は、 $\hat{W}$  項を無視すれば平行流近似方程式に、さらに曲率  $\kappa$  を 0 に置けばオル・ゾンマーフェルト方程式に帰着する。したがって、上式は曲率の効果が引き起こす遠心力型の不安定と、曲率の効果が二次的な作用しか持たない T-S 不安定および横流れ不安定の計算のどちらにも使用することができる。

境界条件は、壁上および壁面から十分離れた所で攪乱速度が 0 になることから定まる。遠方の条件については適当な高さに境界層の外縁  $\xi = \xi_0$  を設定し、そこでの条件に置き換える方法が一般的である。すなわち、境界層外縁より外側の任意な点  $\xi_0$  のごく近傍を考えると、 $U$ 、 $V$ 、 $\hat{W}$  を一定値  $U_0$ 、 $V_0$ 、 $\hat{W}_0$  でそれぞれ近似できるから、攪乱方程式 (3.5) は定数係数だけを持つ方程式に簡単化される。この方程式を近似的

に解いて、 $\zeta \rightarrow \infty$ で減衰する解が満たすべき三つの関係式を導き、境界層外縁における境界条件とする (Itoh 1994b)。結局、攪乱方程式 (3.5) に対する境界条件は近似的につきのよ  
うに定まる。

$$u = w = w' = 0 \quad \text{at } \zeta = 0,$$

$$u' + \rho_1 u - \frac{i\alpha}{\rho_2} (w'' + \rho_1 w') = 0,$$

$$w'' + (\rho_1 + \rho_2) w' + \rho_1 \rho_2 w + \frac{2i\beta \rho_1 \kappa R U_0}{(2\rho_1 + \hat{W}_0)(\rho_1 + \rho_2)} u = 0,$$

$$w''' + (2\rho_1 + \rho_2) w'' + \rho_1 (\rho_1 + 2\rho_2) w' + \rho_1^2 \rho_2 w = 0$$

$$\text{at } \zeta = \zeta_0, \quad (3.6)$$

ただし、 $\rho_1 = -\frac{1}{2}\hat{W}_0 + \left(\frac{1}{4}\hat{W}_0^2 + \alpha^2 + \beta^2 - i\omega R + i\alpha R U_0 + i\beta R V_0\right)^{1/2}$ ,

$\rho_2 = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ 、 $\hat{W}_0 = \hat{W}(\zeta_0)$ である。

#### 4. 計算結果と考察

攪乱方程式の固有値問題と臨界点の計算は適当な数値解法を用いて行われた。境界条件の近似精度を調べるために、境界層外縁  $\zeta_0$  の位置を変えて固有値計算を行ない、解の外縁位置に対する依存性が無視できる程度に大きい値として  $\zeta_0 = 10$  が選ばれた。

流線曲率の効果を無視した場合の Falkner-Skan-Cooke 流の



安定性はすでに調べられている。いま、 $\gamma = 1$ の場合を例に取り、圧力勾配  $m$  のいくつかの値に対して、流線曲率  $\kappa$  の値を 0 から増加させて、臨界レイノルズ数への影響を調べた結果が図 1 に与えられている。各曲線は  $\kappa$  の小さいうちには比較的緩やかに下降するが、 $\kappa$  がある値を越えるとその勾配が急激に増大する。臨界曲線がこのように勾配の異なる二つの部分から成り立つことは、 $\kappa$  の小さいところでの不安定性、すなわち T-S 不安定あるいは横流れ (C-F) 不安定とは別の種類の不安定現象が  $\kappa$  の大きいところで発生していることを表わしている。この特徴は、壁面が凹の曲率を持つ場合の三次元境界層の不安定特性と非常によく似ている。そこで、図 1 の曲線をゲルトラー数に対応する曲線  $\sqrt{\kappa} R = \text{const.}$  と比較

すると、 $\kappa$  の大きいところでは両者の勾配がほとんど一致することが確認された。この事実

実は、ゲルトラー不安定の場合と同様に、この新しい不安定性が流線の曲率に伴う遠心力によって引き起こされていることを意味する。実際、攪乱の波数ベクトルは流線にほぼ直交しており、速度成分の

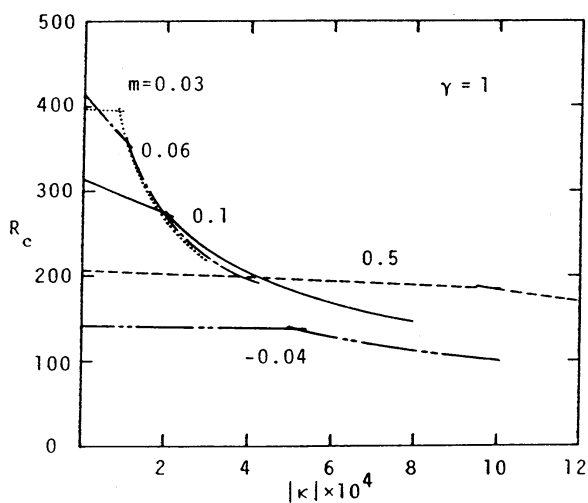


図 1.  $R_c$  の  $\kappa$  に対する変化

$v$  と  $w$  が  $u$  に比べて著しく小さいことは、微小な曲率  $\kappa$  に比例する項が攪乱方程式の主要項と釣り合う状態に達していることを示している。そこで以下では、この新しい不安定性を流線曲率 (S-C) 不安定と呼ぶことにする。

図 1 の  $m=0.1$  に対する臨界曲線を例に取り、傾斜の異なる二曲線上で、横流れ不安定と流線曲率不安定の攪乱特性を表 1 に比較し、それらの各点における攪乱の速度と位相の分布を図 2 に示した。ここで  $v^*$  は波数ベクトルと直交する方向すなわち渦軸方向の攪乱速度成分であり、波数ベクトルが流線方向 ( $x$  方向) にほぼ直角であるから  $v^*$  の方向は  $x$  座標にほとんど一致している。他の二方向の速度成分は  $v^*$  に比べて一桁以上小さいので図には示していない。速度振幅の分布では二種類の不安定性にほとんど違いがないけれども、位相分布においてははっきりした差異が認められる。横流れ攪乱では

表 1 . 固有値の比較

$\Gamma = 45^\circ, m = 0.1$				
	C-F type		S-C type	
$\kappa$	0.0	$2.066 \times 10^{-4}$	$2.066 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$
$R_c$	314.0	272.1	272.1	132.4
$\alpha_c$	0.0400	0.0336	0.0042	0.0007
$\beta_c$	0.3033	0.3018	0.2263	0.2546
$\omega_c$	0.0164	0.0124	-0.0054	-0.0110

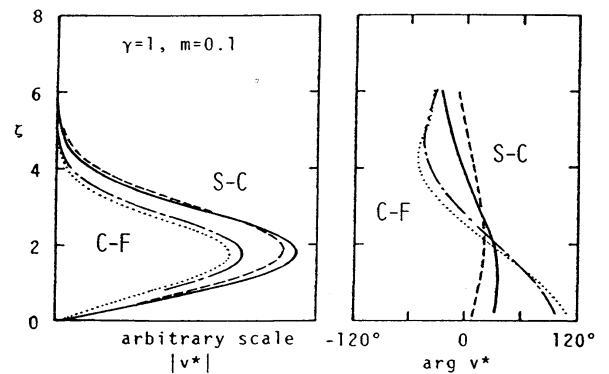


図 2 . 速度分布の比較

壁からの距離にほぼ比例して位相の単調な進みが存在するのに対して、流線曲率不安定攪乱ではゲルトラー渦の場合と同じように位相の変化はずっと小さく、単調でもない。位相分布におけるこの違いは二つの不安定性を実験において見分ける場合に最も重要な手掛かりになるものと思われる。

図3には $\gamma$ と $\kappa$ をパラメータとして、臨界レイノルズ数の圧力勾配 $m$ に対する変化を示した。逆圧力勾配( $m < 0$ )の領域では流線の曲率が $m > 0$ の領域とは逆になるので、 $\kappa < 0$ と表示してある。流線曲率の影響を無視した場合( $\kappa = 0$ )の臨界曲線は細い点線で示されており、 $m$ が負から正の小さい値を取る範囲ではT-S不安定の臨界レイノルズ数を示し、 $m$ が大きいく所では横流れ不安定の臨界値を与える。流線曲率の影響を加えると、T-S不安定とC-F不安定の間を埋めるようにS-C不安定の臨界曲線が現れ始め、曲率の強さが増すにつれてその臨界曲線は下方に移動して、 $m$ の広い範囲にわたるようになる。T-S臨界曲線は曲率が増加してもほとんどその位置を変えないが、C-F臨界曲線の方は比較的影響を大きく受け、下方へのずれが明確に確認される。流線の傾き角 $\gamma$ の影響はT-SおよびC-F臨界曲線に与える効果に較べて、S-C不安定に対してはあまり顕著ではない。このような三種類の臨界曲線の形状は凹曲面の場合の特性と非

常に良く似ており (Itoh 1994a, b)、流線曲率不安定が壁面曲率不安定と同じ遠心力型不安定であることを示している。

図 4 には図 3 の  $\gamma=1$  に対する臨界曲線に沿っての波数と振動数の変化が示されている。S-C 攪乱の波数ベクトルが流線にほとんど直角な方向を向いている点が特徴的で、この性質は C-F 攪乱より明確である。振動数は C-F と S-C 攪乱が T-S 攪乱より一桁小さいことおよび C-F と S-C 攪乱とで符号が逆なことが注目される。S-C 攪乱のこれらの特徴も壁面曲率不安定の場合とよく似ている。

図 3 に与えられたような三種類の臨界曲線を  $\kappa$  のいろいろ

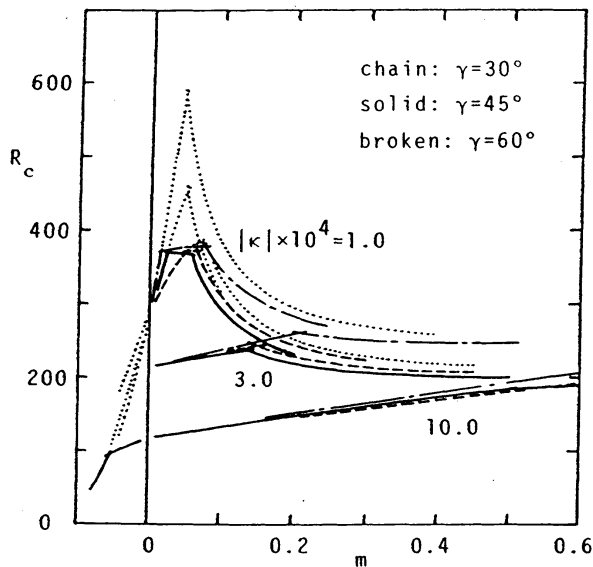


図 3 .  $R_c$  の  $m$  に対する変化

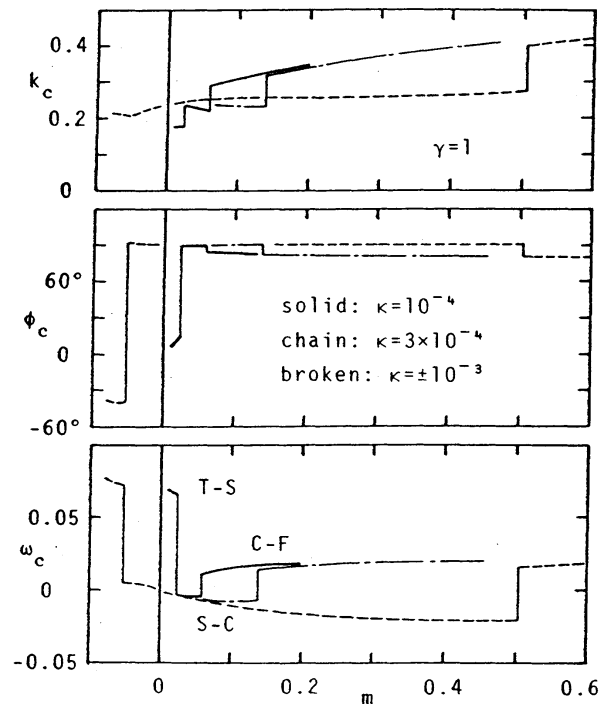


図 4 . 波数と振動数の変化

な値について算出し、それらの交点の位置を  $m-\kappa$  平面に図示したものが図5である。これは三種類の不安定性がそれぞれ最低の臨界レイノルズ数を与えるパラメータ領域を表わす。この図から、横流れの比較的弱い順圧力勾配の領域で流線曲率不安定が発生し易いことが判る。三次元境界層の流線曲率は本来  $1/R$  程度の微小量であるが、三曲線の交叉する点の  $\kappa$  は約  $0.7 \times 10^{-4}$ 、そのときの  $R_c$  は430であるから、 $\kappa$  が  $0.03/R$  を越える程度の大きさを持つときに、流線曲率不安定の発生する可能性が生じる。実際の物体周りの流れにおいて、これを上回る流線曲率がしばしば現れることは簡単な境界層計算(伊藤 1993)によって確かめられる。

## 5. むすび

三次元境界層の安定性に対する外部流流線曲率の影響を調べるために、曲面壁に沿う境界層の安定解析法からの類推に基づくモデル方程式を提案した。Falkner-Skan-Cooke流に対する安定計算の結果、流線曲率に起因する新しい遠

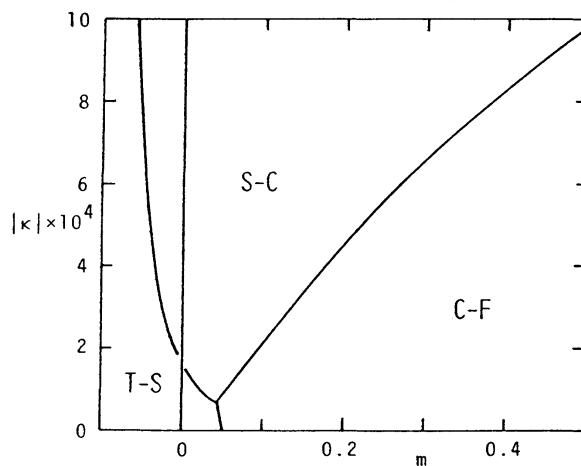


図5. 領域の区分

心力不安定の存在が確かめられた。

流線曲率不安定が実際の流れ場で生じるために必要な曲率の大きさは、通常の後退翼境界層で観察される程度の弱いものであるが、後退翼上ではそれより上流側で横流れ不安定が発生するために、流線曲率不安定から生じる攪乱はまだ観測されていない。この不安定を単独で実現させるためには、流線の曲率が大きく、横流れ速度が比較的小さい流れを作る必要がある。翼前縁に沿う方向に圧力勾配のない細長い後退翼では流線の曲率と横流れの大きさは比例するので、上の条件を満たすためには、前縁に沿う方向の圧力勾配を考慮した工夫が必要であろう (Itoh 1991)。

#### 参 考 文 献

- Gregory, N., Stuart, J.T. & Walker, W.S. (1955) *Phi. Trans. Roy. Soc. London A* 248, 155-199.  
Hall, P. (1982) *J. Fluid Mech.* 124, 475-494.  
Itoh, N. (1991) *Fluid Dyn. Res.* 7, 37-50.  
伊藤信毅 (1993) *日本航空宇宙学会誌*, 41, 213-221.  
Itoh, N. (1994a) *Fluid Dyn. Res.* 13, 81-95.  
Itoh, N. (1994b) *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*,  
in press.