

乱流の構造論的モデリング

名工大工 長野 靖尚 (Yasutaka Nagano)

1. 乱流構造の実験的知見はモデリングと無縁であるか？

乱流構造に関する多くの重要な実験的知見は、乱流のモデリングにこれ迄十分反映され、その進展に寄与していたのだろうか？ 答は、残念ながら“ノー”である。例えば、“壁乱流の組織構造⁽¹⁾”は、近年の実験的乱流研究の中で最大級の発見であるが、これを乱流の数学的記述（モーメント方程式、スペクトル方程式など）のモデル化に取り入れることはほとんど行われていない。現在、応力・熱流束方程式モデルなど数学的にかなり複雑な高次の乱流統計モデルは、当初の期待に反して必ずしも成功していないが⁽²⁾、これは極言すれば、乱流の統計量を支配しているこの組織構造の存在⁽³⁾を、モデリングの段階で全く意識していなかったためであろう。その一方で、組織構造にのみ注目して創られたモデル⁽⁴⁾が、非常に簡単な形式でありながら、壁乱流の乱流諸量の分布を定量的にも良く再現できることは、皮肉な結果である。

現在、CFD（数値流体力学）は、乱流研究におけるシェアを急速に伸ばしており、ある意味で一人歩きの様相を呈している。しかし、基礎的な実験研究は CFD と決して無縁ではなく、むしろその進展にとって必要不可欠なものである。特に、基礎データの蓄積とその解析は重要であり、そこから問題が発掘されて、はじめて新しいモデルの構築、既存モデルの改良が可能となる。本稿では、以下にその具体例の一つとして、著者らが最近開発した「三重相関の構造モデル⁽⁵⁾」を取り上げたい。このモデルは、それまで測定が困難であった壁近傍データの取得と、その詳細な解析⁽³⁾から生まれたものであり、高い普遍性を

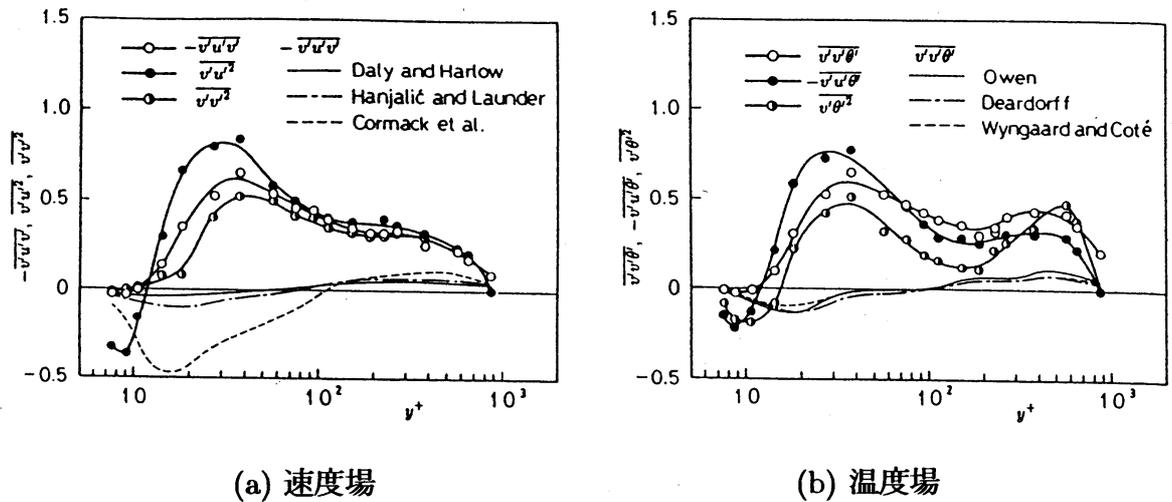


図1 三重相関の実験値と既存モデルとの比較

有していることが検証されている⁽⁵⁾。このことは、乱流構造の実験的知見をモデル構築に取り組みことの重要性を強く示唆しているものといえよう。

2. 壁乱流の統計的性質と乱流構造

著者らは、乱流構造とそれに伴う伝熱機構を解明するため、壁乱流の中で最も基本的なものの一つである円管内乱流で、実験、解析を進めてきた。その研究の中で、応力・スカラー流束（二重相関）方程式を閉じるために本質的に重要な三重相関項（乱流拡散）に対する従来の代表的モデルが、完全に破綻する場合があることが明らかとなった。図1に代表例として、応力方程式で重要なレイノルズ応力 \overline{uv} の乱流輸送 \overline{vuv} 及び熱流束方程式で重要な乱流熱流束 $\overline{v\theta}$ の乱流輸送 $\overline{vv\theta}$ の実験値を、既存モデルによる予測値と比較して示した⁽³⁾。なかでも次の Daly-Harlow と Wyngaard-Coté のモデルは、式の簡便さから、応力方程式モデル及び乱流熱流束方程式モデルにおいて最近でも好んで用いられているもの

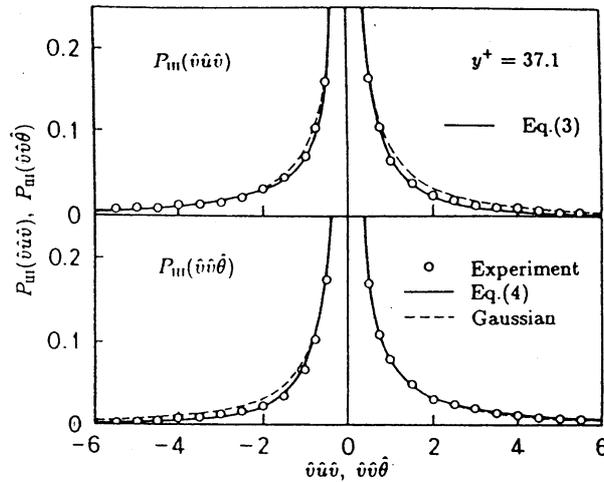


図2 三重相関の確率密度分布

である(6)(7).

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_\ell} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_\ell} \quad (1)$$

$$\overline{u_i u_j \theta} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_j u_\ell} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_\ell} \quad (2)$$

ここで $k = \overline{u_i u_i}/2$ は乱流エネルギー， $\varepsilon = \nu \overline{(\partial u_i / \partial x_j)^2}$ は k の散逸率である。

明らかに既存のモデルは，外層では定量的に，内層では正負が逆になるなど定性的にも完全に破綻している。こうした事実は，壁近傍までの正確な測定が可能となって(8)(9)，初めて明らかにされたものである。壁から離れた領域で見られる定量的な差異は，従来のこの配型拡散モデルのモデル定数の最適化でたとえ切り抜けることにしても，壁近傍の定性的な不一致はこのままでは打つ手がない。この問題は実験データがなかった為に，これまで表面化しなかったのであるが，乱流エネルギーの大部分は壁近傍で生成されており，しかも乱流拡散もこの近傍で最大となる(3)(5)から，ことはかなり重大である。

三重相関を適切にモデル化するには，その統計的性質を詳細に調べ，それに理論的説明

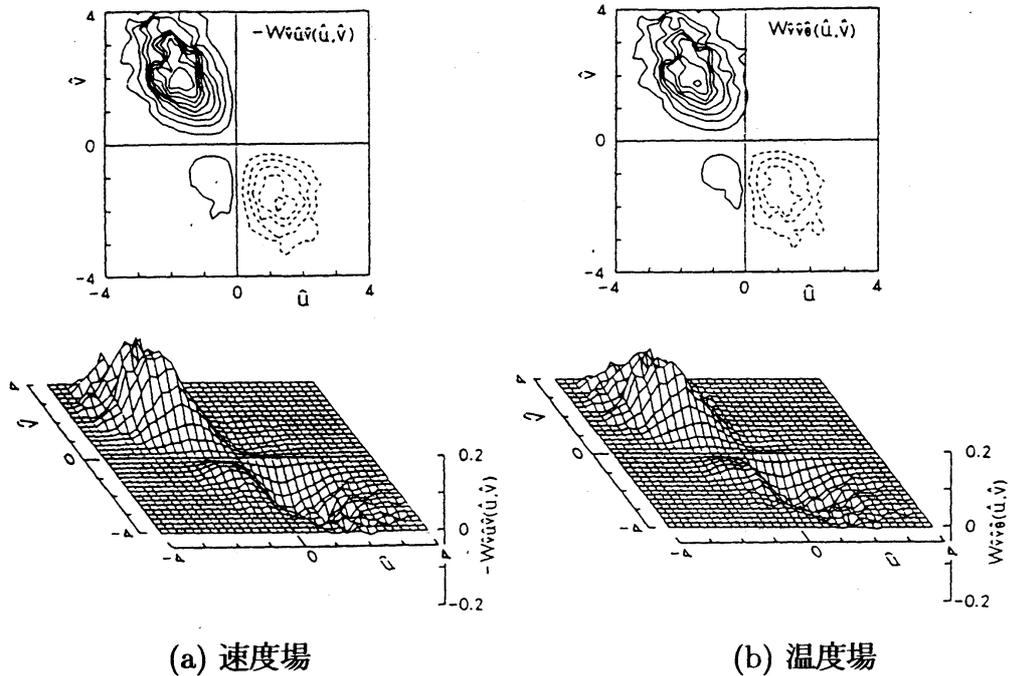


図3 三重相関の重み付確率密度分布

を与える必要がある、図2は、三重相関 \overline{vuv} 、 $\overline{v\theta}$ の確率密度分布を求めたものである。明らかに、その分布は正負がほぼ対象で、裾が非常に広い。これは、乱流拡散が非常に間欠的な現象で、かつ正負の微妙なアンバランスにより、図1に示した時間平均的な輸送の大きさと方向が定まることを裏付けている。この様子を更に明確にするために、著者らは三重相関に対する確率分布の一般式を導出した⁽³⁾。これによれば、 \overline{vuv} 及び $\overline{v\theta}$ の理論確率分布は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 P_{III}(\hat{v}\hat{u}\hat{v}) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ P\left(\frac{x}{\hat{v}^2}, \hat{v}, \hat{\theta}\right) + P\left(\frac{x}{\hat{v}^2}, -\hat{v}, \hat{\theta}\right) \right\} \frac{d\hat{\theta}d\hat{v}}{\hat{v}^2} \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{q=\text{even}}^{K \leq 4} C_{pq0} \int_0^\infty H_p\left(\frac{x}{\hat{v}^2}\right) H_q(\hat{v}) \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x}{\hat{v}^2}\right)^2 + \hat{v}^2 \right\}\right] \frac{d\hat{v}}{\hat{v}^2} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$P_{III}(\hat{v}\hat{v}\hat{\theta}) = \frac{1}{\pi} \sum_{q=\text{even}}^{K \leq 4} C_{0qr} \int_0^\infty H_q(\hat{v}) H_r\left(\frac{x}{\hat{v}^2}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \hat{v}^2 + \left(\frac{x}{\hat{v}^2}\right)^2 \right\}\right] \frac{d\hat{v}}{\hat{v}^2} \quad (4)$$

ここで、 $K = p + q + r$ 、 $(\hat{\cdot})$ はそれぞれの rms 値での無次元化量、 P はキュムラント展

開法により導出した一般性のある確率密度関数⁽³⁾

$$P(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{p,q,r=0}^{\infty} C_{pqr} H_p(\hat{u}) H_q(\hat{v}) H_r(\hat{\theta}) \exp\left\{-\frac{1}{2}(\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{\theta}^2)\right\} \quad (5)$$

である。また、 C_{pqr} はキュムラントで表される展開係数、 $H_n(\chi) = (-1)^n \exp(\chi^2/2) d^n\{\exp(-\chi^2/2)\}/d\chi^n$ はエルミート多項式である。図2から式(3)(4)の理論分布は、上述の実験値の特徴を良く再現していることが分かる。一方、 P に正規分布を仮定した場合、三次モーメントの確率分布は完全に正負対称となるため、三重相関値は常に零となり、乱流拡散の重要な特性は表現できない。

三重相関の動的な特性を明らかにするため、 (u, v) 平面上の重み付確率密度関数 $W_{\hat{u}\hat{v}}(\hat{u}, \hat{v})$ と $W_{\hat{v}\hat{\theta}}(\hat{u}, \hat{v})$ を求め、図3に等高線分布として示した⁽⁵⁾ (実線は正、破線は負の値を表す)。重み付確率密度関数は、 (u, v) 平面上のどの流動で、どの程度のモーメントが生成されているかを表しており、三重相関の生成と流動の詳細な対応関係を調べるのに非常に有力な武器である⁽³⁾。図3に示した位置では、 \overline{vuv} 及び $\overline{v\theta v}$ の生成に大振幅のイジェクション運動 (第2象限の流動: $u < 0, v > 0$) が大きく寄与していることが一目瞭然である。

重み付確率密度関数を (u, v) 平面の第 i 象限内で積分すると、その値は、 Q_i 運動 (第 i 象限の流動) がモーメント $\bar{\chi}$ の生成に寄与する割合、すなわち寄与率 $\overline{(\chi)_i}$ になる。これは理論的には次式で表される⁽³⁾⁽⁵⁾。

$$\begin{aligned} \overline{(\hat{u}^\ell \hat{v}^m \hat{\theta}^n)_i} &= \sigma_{u,i}^\ell \sigma_{v,i}^m \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \hat{u}^\ell \hat{v}^m \hat{\theta}^n P(\sigma_{u,i} \hat{u}, \sigma_{v,i} \hat{v}, \hat{\theta}) d\hat{\theta} \right\} d\hat{v} \right] d\hat{u} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\substack{K \leq 4 \\ p,q,r=0 \\ n+r=\text{even}}} \sigma_{u,i}^{\ell+p} \sigma_{v,i}^{m+q} C_{pqr} B_{\ell,p} B_{m,q} B_{n,r} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $B_{j,k} = \int_0^\infty \chi^j H_k(\chi) \exp(-\chi^2/2) d\chi$ 、 σ_x は ± 1 の符号関数 ($+1, x \geq 0; -1, x < 0$) である。図4に、寄与率 $\overline{(vuv)_i}$ と $\overline{(v\theta v)_i}$ の実験値を式(6)の理論値 ($\overline{(vuv)_i} : \ell =$

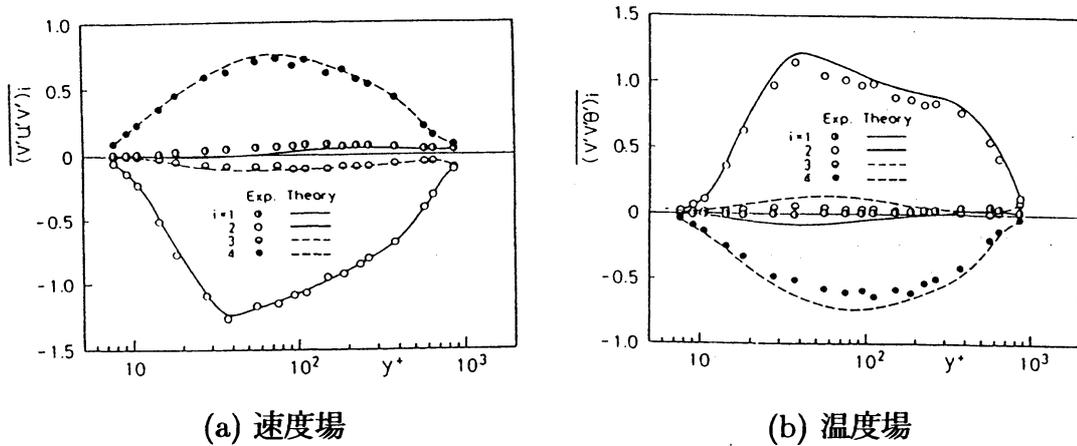


図4 三重相関の内部構造とその予測

1, $m=2, n=0$; $\overline{(v\theta)_i}$: $l=0, m=2, n=1$) と比較して示す. 図4から, \overline{uv} と $\overline{v\theta}$ の乱流輸送 \overline{vuv} , $\overline{vv\theta}$ は $Q2$ 運動 (イジェクション) と $Q4$ 運動 (スweep) によりそのほとんどが発生し, 両者の大小関係で \overline{vuv} と $\overline{vv\theta}$ の大きさと方向 (正負) が定まることが明らかである. 一方, インターアクション的な流動 ($Q1$ 運動と $Q3$ 運動) の寄与は, その絶対値が非常に小さいだけでなく, 正負もほぼ対称であるため, 無視して差し支えないことが分かる. また, 理論的に予測される値は, 実験値と非常に良く一致しており, 乱流構造の情報が, 式 (6) に確かに含まれていることを示している.

3. 三重相関構造モデル

以上の解析により, 次の結論を得た:

- i) 三重相関の統計的性質は, 動的な流動に強く支配されている;
- ii) 従って, 乱流拡散項の適切なモデル化には, 従来の静的なこう配拡散型モデルではなく, 三重相関の物理的な挙動に基づいた新しいモデルの開発が必要である.

これを実現するにあたって著者らが注目したのは, 図4に示される実験事実である. こ

れを理論的に表現することができれば、乱流構造を反映した新しいモデルが得られると直感した。そして、これが「三重相関構造モデル」構築へと発展した。以下にその概要を述べる。まず、 \overline{vuv} については図4の実験事実を次のように数学的に表現した。

$$\overline{vuv} \simeq \overline{(vuv)_2} + \overline{(vuv)_4} \quad (7)$$

同様の式は、速度と温度の三重相関全てに成立し⁽⁵⁾、これらを式(6)等を用いながら連立して解くことにより、例えば \overline{vuv} , $\overline{v\theta}$ に対しては次の構造モデルを得た。

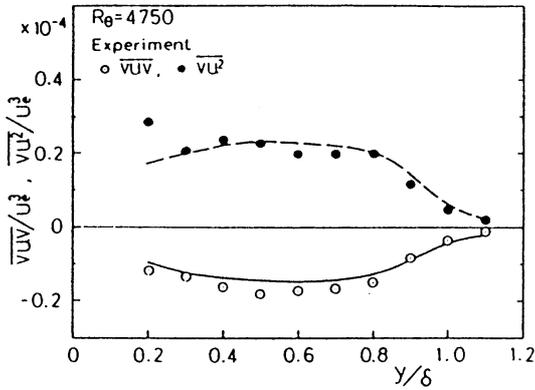
$$\overline{\hat{v}\hat{u}\hat{v}} = C[S(u) + \sigma_{\overline{uv}}(\pi/2)S(v)] \quad (8)$$

$$\overline{\hat{v}\hat{v}\hat{\theta}} = C[\sigma_{\overline{v\theta}}(\pi/2)S(v) + S(\theta)] \quad (9)$$

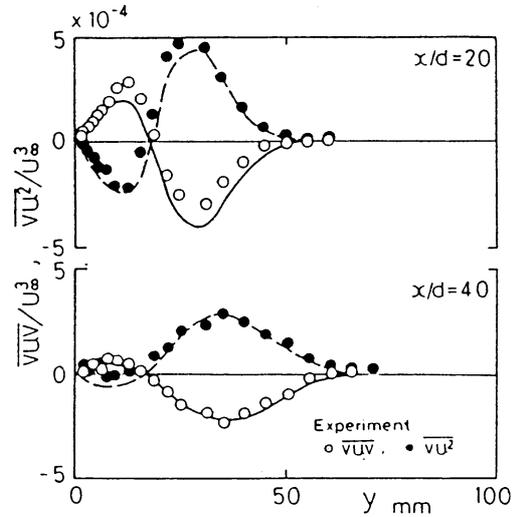
$$C = 1/[3\{(\pi/2)^2 - 1\}] \quad (10)$$

ここで、 $S(\chi)$ は確率変数 χ のスキュウネス ($=\overline{\chi^3}$) で、 $\sigma_{\overline{uv}}$ と $\sigma_{\overline{v\theta}}$ は前述の符号関数である。この三重相関構造モデルの利点は：i) モデル化すべき三重相関の数を大幅に減らすことが出来る；ii) 輸送方程式に基づく三重相関のモデル化へのアプローチが簡単になる；iii) 三重相関を支配しているパラメータが明らかになる等である。

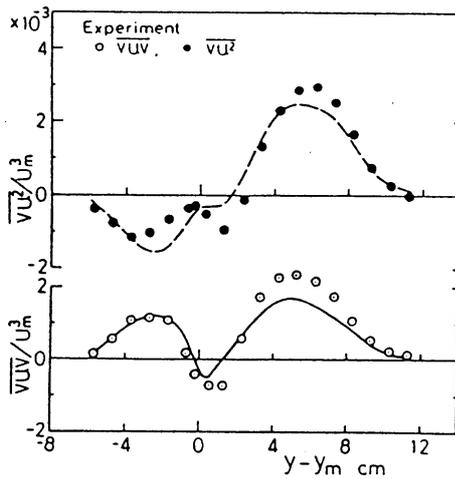
三重相関構造モデルの普遍性の検証は、実験値が知られている種々の流れ系（壁乱流に限らず）に適用することにより行った⁽⁵⁾。図5にその一例を示した。また図6には、多くの流動要素からなる代表的な複雑乱流（剥離・再付着流）である“後向きステップ流”の場合を示した。図6には、既存の代表的モデルによる予測結果も併記した。図5より、構造モデルは普遍性の非常に高いモデルであることが裏付けされた。また図6には、明らかに既存モデルは全て破綻するのに対して、本構造モデルは非常に良い結果をもたらすことが示されている。



(a) 平板乱流境界層



(b) 強い圧力こう配を伴う流れ



(c) 噴流

図5 三重相関構造モデルの検証
(実線及び破線はモデル予測値)

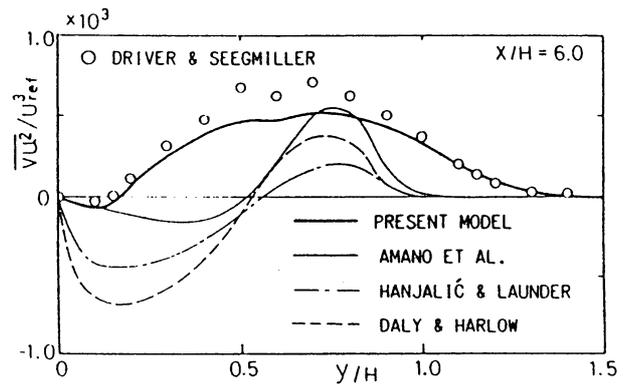


図6 剥離・再付着流の予測

三重相関構造モデルを応力・熱流束方程式に組み込むには、単一諸量三重相関の輸送方程式を併せて解けば良い⁽¹⁰⁾。これを実行した結果の一例(図1の \overline{vuv} の場合)を図7に示す。紛れもなく、式(1)のような既存モデルが定性的にも破綻した壁領域を構造モデルは本質的に克服しており、乱流構造に立脚したモデルの有効性を示している。

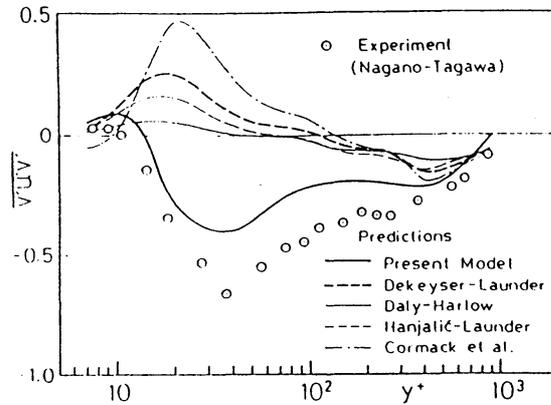


図7 管内流の予測

4. あとがき

普遍性の高い乱流モデルを構築するには、数学的厳密性だけでなく、実験的知見の反映の重要性を著者らの経験をもとに示した。最後に他の例も若干補足しておく。伝熱の実験をしていて、速度境界層と温度境界層の位置関係により、運動量と熱の渦拡散係数が大きく異なることに気づいた⁽¹¹⁾。これは、例えば2方程式モデル⁽¹²⁾で速度場が解けたとしても、同じ渦拡散係数（即ち、乱流プラントル数一定の仮定）で温度場は解けないことを意味する。この実験事実ヒントを得て開発したのが、温度場2方程式モデル⁽¹³⁾である。温度場2方程式モデルでは、 $k-\varepsilon$ 乱流モデルで渦粘性係数 ν_t を k と ε から求めるように、熱の渦拡散係数 α_t （ここで $-\overline{u_i\theta} = \alpha_t \partial \overline{\Theta} / \partial x_i$ ）を k, ε と温度乱れ $\overline{\theta^2}$ 及びその散逸 $\varepsilon_\theta = \alpha (\partial \overline{\theta} / \partial x_j)^2$ から定める為に、乱流プラントル数 $Pr_t = \nu_t / \alpha_t$ が全く未知の場合の伝熱解析が可能である。特に、温度場の熱的境界条件が急変する系に対しては、この温度場2方程式モデルは強力なシミュレーション・ツールになることが分かった⁽¹⁴⁾。また、温度境界層が薄くなる高 Pr

ラントル数流体の伝熱実験を見ると、ヌセルト数がプラントル数の1/3乗で変化することに気づく。これを解析するには、速度場の乱流モデルに乱流諸量の壁面漸近挙動を正しく組み込まざるを得ず、 $k-\varepsilon$ 2 方程式モデルの新たな改良⁽¹⁵⁾へと研究は進展した。また、浮力を伴う乱流境界層の壁領域では、 $\partial\bar{U}/\partial y$ が大きいにも拘らず $\overline{uv} \simeq 0$ となる実験結果を得た⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾。これにヒントを得て、自然対流乱流伝熱解析のための独自の $k-\varepsilon$ モデルを開発した⁽¹⁸⁾。これらの幾つかの経験から、著者らはCFDにおける乱流実験の重要性は、強調してもし過ぎることはないと確信している。

文献

- (1) Kline, S. J. et. al., The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **30** (1967), pp. 741-773.
- (2) Lumley, J. L., Turbulence modeling. *Trans. ASME: J. Applied Mech.*, **50** (1983), pp. 1097-1103.
- (3) Nagano, Y. and Tagawa, M., Statistical characteristics of wall turbulence with a passive scalar. *J. Fluid Mech.*, **196** (1988), pp. 157-185.
- (4) Kasagi, N., Hirata, M. and Nishino, K., Streamwise pseudo-vortical structures and associated vorticity in the near-wall region of a wall-bounded turbulent shear flow. *Exp. Fluids.*, **4** (1986), pp. 309-318.
- (5) Nagano, Y. and Tagawa, M., A structural turbulence model for triple products of velocity and scalar. *J. Fluid Mech.*, **215** (1990), pp. 639-657.

- (6) Launder, B. E., On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows, *Trans. ASME: J. Heat Transfer*, **110**(1988), pp. 1112–1128.
- (7) Launder, B. E., Phenomenological modelling: Present and Future? *Lecture Notes in Physics (J. L. Lumly ed.)*, **357**(1989), pp. 439–485, Springer–Verlag.
- (8) Hishida, M. and Nagano, Y., Turbulence measurements with symmetrically bent V–sharped hot–wires. Part 1: Principles of operation, *Trans. ASME: J. Fluids Engng.*, **110**(1988), pp.264–269.
- (9) Hishida, M. and Nagano, Y., Turbulent measurements with symmetrically bent V–sharped hot–wires. Part 2: Measuring velocity components and turbulent shear stresses, *Trans. ASME: J. Fluids Engng.*, **110**(1988), pp.270–274.
- (10) Nagano, Y. and Tagawa, M., Turbulence model for triple velocity and scalar correlations. *Turbulent Shear Flows 7 (ed. F. Durst et. al.)*, (1991), pp.47–62, Springer–Verlag.
- (11) Hishida, M. and Nagano, Y., Structure of turbulent temperature and velocity fluctuations in the thermal entrance region of pipe. *Heat Transfer 1978*, **2** (1978), pp. 531–536, Hemisphere.
- (12) Nagano, Y. and Hishida, M., Improved form of the $k - \varepsilon$ model for wall turbulent shear flows. *Trans. ASME: J. Fluids Engng.*, **109** (1987), pp. 156–160.
- (13) Nagano, Y. and Kim, C., A two–equation model for heat transport in wall turbulent shear flows. *Trans. ASME: J. Heat Transfer*. **110** (1988), pp. 583–589.

- (14) Youssef, M. S., Nagano, Y. and Tagawa, M., A two-equation heat transfer model for predicting turbulent thermal fields under arbitrary wall thermal conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35** (1992), pp. 3095–3104.
- (15) Nagano, Y. and Tagawa, M., An improved $k - \varepsilon$ model for boundary layer flows. *Trans. ASME: J. Fluids Engng.*, **112** (1990), pp. 33–39.
- (16) Tsuji, T. and Nagano, Y., Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31** (1988), pp. 1723–1734.
- (17) Tsuji, T. and Nagano, Y., Turbulence measurements in a natural convection boundary layer along a vertical flat plate. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31** (1988), pp. 2101–2111.
- (18) Nagano, Y., Yin, Y. and Tsuji, T. Numerical prediction of turbulent buoyant flows. *Proc. 7th Symp. on Turbulent Shear Flows*, (1989), pp. 12.1.1–12.1.6, Stanford Univ.