数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 1-3

CIRCLE PACKING の私的入門

京大理　谷口雅彦
(Masahiko Taniguchi)

Circle packing (CP) とは円板によるリーマン面の充填であり、それらの配置から元の面の(位相的な)三角形分割、あるいは組み合わせ論的な contact graph のみならず、たとえば graph 上の幾何構造までも確定する。正則性(rigidity)が組み合わせ論的な graph を「硬直化」させるのである。

古来多様体の離散化はグラフ化が一方の主流をなして来たが、(たとえば森明, Royden から Lyons ; Sullivan に至る型問題への応用に代表されるような)群作用に付随する離散化以外では、vertex の位置は恣意的にならざるを得ない。ましてや edge を与える根拠は存在し得ない。そこで、たとえば network においては electoric flow を「天の声」とする。この文脈においては、多様体はむしろ network から生み出されるものであり、決してその逆ではない。(Duffin 等から Doyl・Snell への流れをみよ)

もとより、群作用に離散化においても、戦略の根底にあるのは群そのものの代数的構造である。この側面の可視化として Cayley graph があり、word metric 等により幾何学化されたとしても、代数的構造の解明が中心課題として残る。

注） 多様体のグラフ化は単純化であるが、群のグラフ化は複雑化である。対象の「ほどよい」情報化が目的であろう。

一方リーマン面には、一般に代数的構造というものは無い。あるのは正則性＝複素構造のもつ生来の rigidity と、にもかかわらず消失しない奇妙な flexibility = Teichmüller theory である。

CP は、rigidity の顕在化により、リーマン面の複素構造を忠実に（組み合わせ論的な） contact graph に伝達することが可能な装置であるといえる。

古く、Koebe から Andreev, Thurston 等を経て、Stephenson, He, Schramm 等へと至り、ともかくも、三種の典型的な「世界」：

$\hat{\mathbb{C}}$: リーマン球（球面幾何）

$\mathbb{C}$: 複素平面（Euclid 幾何）

Δ : 単位円板（双曲幾何）

における CP の存在定理は一応の収束を得た。

リーマン面とグラフとの間には既に大きな「橋」が渡されてはいるが、それは群構造に依存する道であった。今、CP は何の「凹凸」もない所に、文字どおり網をかける新しい手法を提供しているように思える。

形態が理念を規定する。

無限に並ぶ円板を見ながら正則性について語れば、さぞ愉快であろう。