数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 36-42

THE UNIFORMATION THEOREM FOR CIRCLE PACKINGS

奈良女子大学 山下 靖 (YASUSHI YAMASHITA)

これは、A. F. Beardon, K. Stephenson による論文 [1] の紹介です。

1. はじめに

この論文 [1] では Circle packing を今までの函数論の離散バージョンを考えるための手がかりとみなし、古典的な概念が circle packing の世界でうまく働くかどうかを考えていくための作業を始めている。

特に、circle packing について spherical, parabolic, hyperbolic がうまく定義できることを示すのが、この論文の主な目標である。

2. 円の配置とその Complex

まず、以下のセクションで必要になる設定を行なう。

- P: お互いに内点が交わらない円の（リーマン面上の）配置
- P の carrier: P から次のようにして定まる 2-complex

頂点 P の円に 1 対 1 に対応する

辺 2 つの頂点について対応する P の円が接している場合 これらを結ぶ

面 3 つの頂点について、対応する P の円がたがいに接していてかつそれらが囲む円弧による 3 角形の中には P の円が存在しないとき、この 3 つを頂点とする 面があるものとする

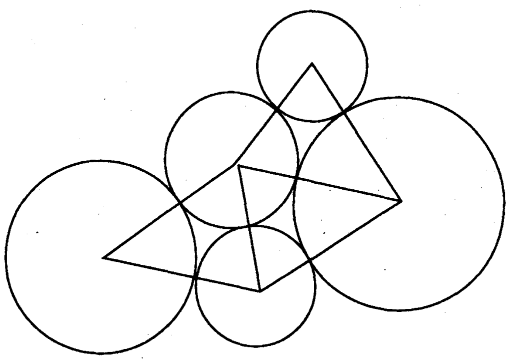

図 1 circle packing と carrier

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

定義より P の carrier の面は３角形のみで４角形等のものはないことを注意しておく。

以下で円の配置というときは、次の条件をみたしているものと仮定する。

Assumptions.

(1) それぞれの円の内部は単連結
(2) 異なる円は最大１箇所で接する
(3) 自分自身と接する円はなし
(4) ３つの互いに接する円によって作られる（円弧による）３角形の内部は単連結

さらに P の carrier がみたすべき条件として、次の言葉を用意する。

定義 (CP–complex). （抽象的な） 2–complex K が以下の４つの条件をみたすとき、これを CP–complex と呼ぶ。

(1) K はある connected oriented 2–manifold の３角形分割をあたえている
(2) K の degree は上からある定数で押えられている
(3) K の内部は空ではなく連結
(4) K の境界上の頂点は内部にある頂点と１つの辺で直接結ばれている

上の定義の条件 (3),(4) 本質的なものではないが、議論を簡単にするためにいれてある。次に circle packing の定義を行なう。上にあげた条件などにより、一般的な circle packing の定義よりやや狭い意味になっている。

定義 (circle packing). リーマン面 S の上で互いに内点が交わらない円の配置 P でその carrier が CP–complex になっているものを、S の circle packing と呼ぶ。特に P の carrier と S が（topological に）等しくなっているとき、P は S を覆う (fill) という。

定義 (realization). CP–complex K が与えられたとき、リーマン面 S 上の circle packing P でその carrier が K となるものを、K の realization という。また、S は K の circle packing を support するという。

3. 既知の補題による準備

この論文の主結果である circle packing についての uniformization theorem を導くために必要な補題をあげておく。

定理 1(Andreev). *K をリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の３角形分割とすると、$\hat{\mathbb{C}}$ は K の circle packing を support する。この packing は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体を覆い、up to automorphism で一意的である。*

CP–complex がある円版の３角形分割と同型なとき、これを DL–complex とよぶことにする。この節では複素平面 $\mathbb{C}$ 上の単位円版を Δ で表す。

定理 2(Andreev). *K* を *DL–complex* とする。このとき、Δ 上の *circle packing* で *carrier* か *K* であり、*K* の境界にあたる円が単位円にちょうど内接しているようなものが存在する。これは Δ 上の *automorphism* による作用を除いて一意的である。

DL–complex K について上の定理によって（up to automorphism で）定まるΔ 上の circle packing P_a を、K の Andreev packing と呼ぶ。

Discrete Schwarz–Pick Lemma. *K* を *DL–complex* 、P_a をその *Andreev packing* とする。さらに P を Δ 上の *circle packing* で、その *complex* が P_a と同じ K とすると以下の 3 つが成り立つ。

(a) P_a と P の対応する円について

$$(P \text{ の側の円の半径}) \leq (P_a \text{ の側の円の半径})$$

(b) 同様にそれぞれ対応するものについて

$$(P \text{ の 2 つの円の中心間の距離}) \leq (P_a \text{ の 2 つの円の中心間の距離})$$

(c) K の 3 角形の面についても対応するものそれぞれについて

$$(P \text{ の 3 角形の面積}) \leq (P_a \text{ の 3 角形の面積})$$

ただし距離等は Δ 上の双曲的距離によるものとする。

さらに、*(a)* で等式がある内部の頂点について成り立つか、*(b)* で等式が両辺有限のものについて 1 つでも成り立つか、*(c)* で等式がある面について成り立てば、P と P_a は *up to automorphism* で一致する。

定理 3(Sullivan Uniqueness). *K* を *CP–complex* で、その *realization* P が複素平面全体を覆うものとする。このとき P は $\mathbb{C}$ の *automorphism* による作用を除いて一意的にきまる。

n+1 個の円からなる circle packing で、1 つの円のみが内部にあり、それ以外の円がそれを取り囲むようにして 1 周しているものを n-flower とよぶ。(境界にある円は内部の円と自分の両隣と接している)

補題 1. P を *n-flower* とし、中心の円を v とおく。このとき以下の条件を満たす n のみによる定数 C_1 が存在する

・P は $\mathbb{C}$ 上にあるとする。v の（ユークリッド）半径を R とおく

(a) 任意の境界上の円の半径 r について $\frac{r}{R} \geq C_1$
(b) v と同じ中心をもつ半径 $R(1 + C_1)$ の円は p の（ユークリッド）*carrier* に含まれる

・P は球面上にあるとする。これを平面に立体射影した状況で考える。境界上の円のうち1つが単位円の外側にあたり、v の半径を r とする。このとき

(c) 他の境界上の円の半径 r は $\frac{r}{R} \geq C_1$。

・P は単位円上にあり R を v の双曲的長さによる半径とすると

(d) 他の境界上の円の双曲的半径 r は $\frac{r}{R} \geq C_1$。

4. Maximal Circle Packings

この節では CP–complex K が与えられたとき、この論文で maximal circle packing とよんでいる、K の標準的な circle packing の realization が定義できることを示す。

K に関するこの circle packing の実現が、それぞれ球面・平面・単位円上の時、K を spherical, parabolic, hyperbolic と定義する。

以下 K に関する場合わけをしながら maximal circle packing を定義していく。

(1)K が単連結の場合

(1-1)K が有限の complex の場合

このとき K は球面の3角形分割か DL–complex である。前者は定理1より球面上に circle packing として実現され、後者には定理2の Andreev packing がある。それぞれ up to automorphism で一意的であり、これをこの場合の K の maximal circle packing と定義する。

(1-2)K が無限の complex の場合

・$\mathcal{K} = \{K_\alpha\}$ K の DL–subcomplex による有向族（順序は包含関係による）

・P_α ： K_α の Andreev Packing

とする。K の頂点を1つ固定し v とおく。さらに

$$\gamma_\alpha := P_\alpha \text{のなかで} v \text{にあたる円の半径の双曲的距離}$$

とおく。前節の Discrete Schwarz–Pick Lemma より $K_\alpha, K_\beta \in \mathcal{K}$, $v \in K_\alpha \leq K_\beta$ ならば $\gamma_\beta \leq \gamma_\alpha$。従って

$$\exists\, \gamma \;=\; \lim_{\alpha} \gamma_\alpha \;\geq\; 0$$

を得る。すなわち K の頂点それぞれについてこの極限における非負の半径を定義することができる。

全節の補題1を用いることにより状況は二つの場合にわかれる。

1-2-1 すべての v について、上で得られた γ の値は0

1-2-2 すべての v について、上で得られた γ の値は正の数

それぞれを順に考えることにする。

$\{K_\alpha\}$ として、全順序集合になっていて共終なものを考えればよいのでこれを $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ とおく。

(1-2-1)

適当な automorphism により、v は Δ の原点にあると仮定する。v にあたる円の半径を R_n とおく。P'_n を P_n を原点を中心に $1/R_n$ 倍したものとする。すると $\{P'_n\}$ の部分列 $\{P'_{n_j}\}$ で、任意の K の頂点に対して対応する円の中心とその半径が収束するようなものをとることができる。この極限によって得られるものは明らかに circle packing になっていて、これを $\mathcal{P}$ とおく。$\mathcal{P}$ は次の 2 つの性質を満たすことがわかる。

- $\mathcal{P}$ fills $\mathbb{C}$ ($\because$ Carathéodory kernel theorem)
- （up to automorphism での）一意性 ($\because$ 定理 3)

この $\mathcal{P}$ をこの場合の maximal circle packing と定義する。

(1-2-2)

1-2-1 と同様に v は Δ の原点にあると仮定する。（今度は $1/R_n$ 倍をしないで）$\{P_n\}$ の部分列 $\{P_{n_j}\}$ で、任意の K の頂点に対して対応する円の中心とその半径が収束するようなものをとることができる。この極限によって得られる circle paking を $\mathcal{P}$ とおく。この $\mathcal{P}$ についても次の 2 つの性質を満たすことがわかる。

- （up to automorphism での）一意性 ($\because$ hyperbolic trigonometry)
- $\mathcal{P}$ fills $\mathbb{C}$ ($\because$ Carathéodory kernel theorem)

この $\mathcal{P}$ をこの場合の maximal circle packing と定義する。

与えられた CP–complex が単連結の場合についてまとめる。

定義 (Discrete Uniformization). K を単連結な CP–complex K とする。上の方法によって得られた circle packing $\mathcal{P}$ を K の maximal circle packing と呼ぶ。$\mathcal{P}$ は underlying space $\mathcal{D}$ の automorphism による作用を除いて一意的に決まる。K は上記の $\mathcal{D}$ が球面・平面・単位円のとき、それぞれ spherical, parabolic, hyperbolic という。

(2)

次に K が単連結でない場合を考える。

$\widetilde{K}$ を K の universal cover とする。K が CP–complex ならば $\widetilde{K}$ も CP–complex になることが容易にわかり、次の定義が可能になる。

定義. K を CP–complex とする。$\widetilde{K}$ が spherical, parabolic, hyperbolic のとき、K を spherical, parabolic, hyperbolic と呼ぶ。

定理 4. *K を CP–complex とすると、あるリーマン面 S が存在して K はその上の circle packing として実現される。 S は K の上で定義したタイプ：spherical, parabolic, hyperbolic に応じて sphere, parabolic, hyperbolic になる。 K が境界を持つ場合は S は 完備測地的境界を持つものになる。*

（証明の概略）K が shperical のときは、Andreev の定理より従う。

K が parabolic か hyperbolic のとき。以下 universal cover ($\mathbb{C}$ か Δ) を $\mathcal{D}$ とおく。

universal cover の方で maximal circle packing $\bar{P}$ を考える。 このとき $\mathcal{D}$ 上の automorphism による群 Γ で $\bar{P}$ を保ち$\widetilde{K}$ の deck transformation による群 Λ の作用と可換になるものが一意的に存在することがいえる。これは $\bar{P}$ を保つので作用は離散的である。 Λ が有限位数の非自明な元を持っていないので、Γ についても同じことがいえる。また、Γ の作用は free になる。

よって $\mathcal{D}/\Gamma$ はリーマン面となりこれを S とおく。

$\mathcal{D}$ 上の circle packing $\bar{P}$ から自然に S 上の circle packing が得られる。

K が境界を持つ場合は $\widetilde{K}$ の carrier を Δ 内に完備測地的境界を持つ単連結領域として埋め込むことができ、これを上と同様な作用によって割ることにより求めていたものを得ることができる。 □

定義. K を CP–complex とする。上の定理の証明中で構成した circle packing を K の maximal circle packing と呼び以下 $\mathcal{P}_k$ で表す。このときのリーマン面を S_K と書く。

5. Maximal Circle Packing の性質

S をリーマン面とし、P をその上の circle packing とする。この P から得られる CP–complex K について、全節では maximal circle packing $\mathcal{P}_k$ と S_K を定義した。 S と S_K は comformally equivalent か。仮にその場合 P と $\mathcal{P}_k$ は S 上の automorphism で移るかということを考える。

Spherical の場合は Andreev の定理等により、上の意味での一意性がいえる。

証明をここで述べる余裕はないが、その他の場合についても以下の結果が得られる。

定理 5. *K を parabolic な CP–complex とする。このとき S_K は K の circle packing を実現する唯一のリーマン面で、その circle packing も S_K 上の automorphism による作用を除いて一意的である。*

定理 6. *K を hyperbolic な CP–complex で S_K の面積が有限であるとする。このとき S_K は K の circle packing を実現する唯一のリーマン面で、その circle packing も S_K 上の automorphism による作用を除いて一意的である。*

（この講演中に上の定理の「面積有限」の条件は外せることが指摘された。くわしくは [2] を参照）

6. タイプの判定

CP–complex K の組合せ的な情報などから、K のタイプを判定するためのいくつかの命題が得られている。

定理. K を *CP–complex* とする。

(1) K が *spherical* $\Longleftrightarrow$ K が *(topological) sphere* $\Longleftrightarrow$ K は *sphere* の 3 角形分割 $\Longleftrightarrow$ K は連結かつ単連結

(2) K が *torus* $\Longrightarrow$ K が *parabolic*

(3) K が境界を持つ $\Longrightarrow$ K が *hyperbolic*

(4) K の基本群が非可換 $\Longrightarrow$ K が *hyperbolic*

定理. K を *CP–complex* で、全ての頂点についてその次数がある数 d で押えられているとする。さらに境界もないものとする。この時以下が成り立つ。

(1) $d \leq 5 \Longrightarrow K$ は *spherical*

(2) $d \leq 6, K$は無限グラフ $\Longrightarrow K$ は *parabolic*

(3) 全ての頂点の次数が 7 以上 $\Longrightarrow K$ は *hyperbolic*

定理. *CP–complex* K が無限グラフで境界を持たないものとする。K の頂点 v を一つ固定し、n_k を v から k だけはなれたところにある頂点の数とする。このときもし $\sum n_k^{-1}$ が収束するならば K は *parabolic* である。

References

1. A. F. Beardon, K. Stephenson, *The Uniformation Theorem for Circle Packings*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 1383–1425.
2. B. Rodin, *On a problem of A. Beardon and K. Stephenson*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 271–275.