数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 43-53

Circle Packing and Riemann Surfaces

東工大理　東木 雅彦 (Masahiko Toki)

コンパクトな, 三角形分割された面に対して, その nerve が与えられた三角形分割であるような circle packing が存在する. (Andreev — Thurston)　この結果もコンパクトな, 境界付きの面にまで拡張する.

$\bar{S}$ をコンパクトな, 境界付きの面 (ただし, 球やトーラスは除外する) とする. また, T を $\bar{S}$ の三角形分割, V を T の頂点の集合とする.

定義 1.　V から $(0, +\infty]$ への写像を, <u>hyperbolic radius function</u> という.

r を hyperbolic radius function とする. $\bar{S}$ の各三角形 τ に対して, 以下のような三角形 $T(r, \tau)$ を考える.

τ が頂点 v_1, v_2, v_3 をもつとする。単位円板 $D=\{|z|<1\}$ 上に、双曲的半径が $r(v_1), r(v_2), r(v_3)$ の円を考える.(ただし、半径 $+\infty$ の円は ∂D に1点で接する円とする.) これらの3つの円を等長変換で動かして、3つの円が外側から互いに接するようにする. ただし、三角形 τ の頂点の循環的順序が保たれるようにする. このとき、3つの円の双曲的中心(半径 $+\infty$ の円の中心はその円の ∂D との接点とする.)を頂点とする双曲的三角形が $T(r,\tau)$ である.

定義2. これらの双曲的三角形 $T(r,\tau)$ を互いに交わらないと見なした後再び T の辺に沿って自然に糊づけしたものは V の点に対応する点を除いて、定曲率 -1 をもつ($\bar{S}$ と同相な)面である. この面を r によって決定される cone manifold と呼び、$Cone(r)$ で表わす.

今、hyperbolic radius function r が次の2つの性質をもつとする

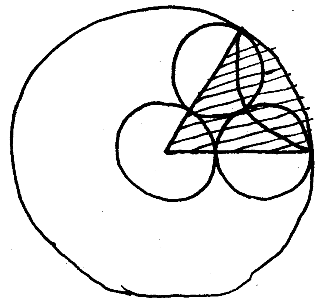
(1) 境界上で $r(v)=+\infty$

(2) 内部で $K_r(v)=0$

ここで、$K_r(v)$ は v における r の曲率とする.

このとき、$Cone(r)$ 上の metric は特異点をもたない.

$\bar{S}$が境界をもつとき，このmetricが完備になるように Cone(r)を拡張したい．これは，$\bar{S}$の境界上に辺をもつ三角形でのそれぞれに対し，三角形$T(r,\tau)\subset D$に境界辺によって切りとられた半平面をつけ加えることによって達成される．



定義3．　こうして Cone(r) を拡張したものを complete hyperbolic polyhedral surface と呼び，$Poly(\bar{S})$で表わす．

注意．　後で述べる Proposition 2 によれば，(1)と(2)をみたす hyperbolic radius function は唯一つ存在する．

定義4．　$\bar{S}$の境界上の各辺を，同じ端点をもち，他のすべての点は（その境界辺を含む）三角形の内部にあるような単純曲線にとりかえる．このようにして，$\bar{S}$のある部分面の三角形分割を得る．この三角形分割を$\bar{S}$の scalloped triangulation という．

$\bar{X}$をコンパクトな，境界付き Riemann 面とし，

$$\pi : D \longrightarrow X$$

を，正則な普遍被覆写像とする．

定義5．　X上の3つの（双曲的）円板が互いに外側から接しているとする．これら3つの円板の中心を結ぶ測地線が定める三角形を<u>triangle of centers</u>と呼ぶ．

$\bar{X}$上の，内部は互いに交わらない閉円板の族が与えられているとして，互いに接する3つの円板からなる組のtriangle of centersのすべてを考える．もしこれらが$\bar{X}$のscalloped triangulationをなすなら，上の円板族を$\bar{X}$上の<u>circle packing</u>という．

このとき，$\bar{X}$のscalloped triangulationの境界辺を，対応する$\bar{X}$の境界辺でおきかえてできる$\bar{X}$の三角形分割を，circle packingの<u>(embedded) nerve</u>という．

定理1．　$\bar{S}$をコンパクトな，境界付きの面とし，Tをその三角形分割とする．$\bar{S}$は球やトーラスではないとする．このとき，S上の定曲率-1をもった完備なmetric λと，このmetric λが定める$\bar{S}$の等角構造に関するcircle packing $\mathcal{P}$が存在して，$\mathcal{P}$のnerveはTである．さらに，metric λと$\mathcal{P}$が決定するhyperbolic radius function rは次の意味でuniqueである：もしλ_1とr_1が他の組なら$r=r_1$であり，また$\bar{S}$上の

自己同相写像があって，それはλ metric からλ_1 metric への等長写像でありTの各三角形をそれ自身に写す．

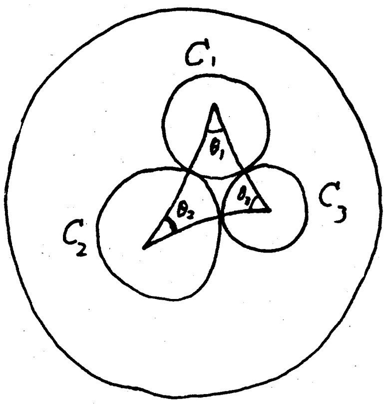
定理1は次の定理から容易に従う．

定理2．　$\bar{S}$をコンパクトな，境界付きの面とし，Tをその三角形分割とする．$\bar{S}$は球やトーラスではないとする．このとき，(1)と(2)をみたす *hyperbolic radius function* r が唯一つ存在する．

この定理の証明の中で次の補題を数回用いる．

補題　単位円板D内の，互いに外側から接する3つの円C_1, C_2, C_3を考える．(ただし，半径$+\infty$の円つまり∂Dに接する円も許す．) この3円の triangle of centers において，C_i ($i=1,2,3$) の中心を頂点とする角度をθ_iとする．

もしC_1の半径が小さくなり，他の2つは変わらないとするとθ_1は大きくなり，他の2つは大きくならない．さらに三角形の面積は小さくなる．



証明は明らか．

定理2の証明．　証明はDirichlet問題に対するPerronの方法に類似している．　$\bar{S}$上のhyperbolic radius functionの中で，各内頂点における曲率が正でないものからなる族を$\mathcal{R}$とする．Thurstonの定理（定理2を$\bar{S}$が境界をもたない場合に制限したもの）によれば，種数が2以上の（三角形分割された）閉じた面上には各頂点における曲率が0であるようなhyperbolic radius functionが存在する．したがって$\bar{S}$を種数2以上の閉じた面に埋め込むことによって$\mathcal{R}$が空でないことがわかる．　各頂点vに対し

$$r(v) = \sup\{\rho(v)\,;\,\rho \in \mathcal{R}\}$$

とおく．

まず各内頂点vに対して$r(v) < +\infty$を示す．　仮にある内頂点において$r(v) = +\infty$であったとすると$r'(v)$がいくらでも大きくなるように$r' \in \mathcal{R}$がとれる．補題より，あるr'に対してr'のvにおける曲率$K_{r'}(v)$が正になってしまい$\mathcal{R}$の定義に反する．　ゆえに各内頂点vに対して$r(v) < +\infty$である．

全く同じ論法から，各内頂点vに対して$K_r(v) \leq 0$がわかる．したがって$r \in \mathcal{R}$である．

rを境界上での値を$+\infty$と定義し直すことによって修正したものをr'とする．rをr'にとりかえることによる曲率への影響は境界に隣接する頂点のみに現われる．vをそのような

頂点のひとつとすると，補題より $K_{r'}(v) \leq K_r(v) \leq 0$．ゆえに $r' \in \mathcal{R}$．これは $r = r'$，つまり境界上の各点において $r(v) = +\infty$ であることを意味する．

これで r が (1) をみたすことがわかった．後は (2) である．仮にある内頂点 v に対して $K_r(v) < 0$ であったとする．r を v における値だけ少し大きくとりかえて，$K_r(v) < K_{r'}(v) \leq 0$ とできる．補題より，v に隣接する頂点 v' においては $K_{r'}(v') \leq K_r(v') \leq 0$．したがって $r' \in \mathcal{R}$ であるが，これは r の定義に反する．よって r が(2)をみたすことが示された．

唯一性を示すためにある $s \in \mathcal{R}$ が(1)と(2)をみたしているとする．このとき各内頂点で $s \leq r$ である．もし $s \neq r$ であるなら $V_0 = \{v \in V : s(v) < r(v)\}$ は V の空でない部分集合である．このとき

$$(3) \qquad \sum_{v \in V_0} K_s(v) < \sum_{v \in V_0} K_r(v)$$

であることが次のようにして示される．

V_0 に属する頂点をもつ T の三角形を考える．これらの三角形 t において，V_0 のひとつをその頂点としてもつ角 A は3つのタイプ α，β，γ に分けられる：三角形 t の角のうち，角Aが V_0 に属する頂点をもつ唯一つの角であるときAはタイプ α である；三角形 t の角のうち，ちょうど2つの角が V_0 に属する頂点をもつ角であるときAはタイプ β である；三角形

ての すべての角が v_0 に頂点をもつ角であるとき A はタイプ γ である. r で測った A の角度つまり $T(r,\tau)$ の A に対応する角の角度を $\theta_r(A)$ と表わす. もし A がタイプ α なら $\theta_s(A) > \theta_r(A)$ である. もし A がタイプ β なら τ の角の中にもう1つタイプ β の角 A' があり, $\theta_s(A) + \theta_s(A') > \theta_r(A) + \theta_r(A')$ である. もし A がタイプ γ なら τ の残る2つの角 A', A'' はタイプ γ であり, $\theta_s(A) + \theta_s(A') + \theta_s(A'') > \theta_r(A) + \theta_r(A') + \theta_r(A'')$ である. 以上のことから (3) を得るが, r と s は共に (2) をみたすので不合理である. したがって $s = r$ であり, 定理2の証明が完結した.

定理1の証明. 定理2より (1) と (2) をみたす $\bar{S}$ 上の hyperbolic radius function r が存在する. r によって決まる complete hyperbolic surface $Poly(\bar{S})$ の metric を $\bar{S}$ から $Poly(\bar{S})$ へのある単体同相写像によって引きもどした metric を λ_r と書く. λ_r は S 上, 定曲率 -1 をもつ完備な metric であり, $\bar{S}$ に等角構造を定める. r が定める circle packing の nerve は T であるから, これで定理1の存在部分が示された.

λ_1 は S 上の定曲率 -1 をもつ完備な metric, r_1 は metric λ_1 におけるある circle packing が定める hyperbolic radius function で, その nerve が T であるとする. このとき r_1 は

V 上の hyperbolic radius function で (1) と (2) をみたす．よって定理2より $r_1 = r$．

π_1 (π) を $\lambda_1(x)$ー等角な普遍被覆写像とする．T の三角形 τ に対して，$\pi_1^{-1}(\tau)$ の各成分は $T(r_1, \tau)$ の等長写像による像．$r_1 = r$ だから $\pi_1^{-1}(\tau)$ の成分と $\pi^{-1}(\tau)$ の成分は双曲的等長な三角形であり，この等長変換は λ_1ー metric から λー metric への等長写像であるような τ の自己同相写像 ψ を導く．τ と τ' がある T の辺 e を共有する三角形であるとする．このとき $\pi_1^{-1}(\tau \cup \tau')$ の各成分は，$T(r_1, \tau)$ と $T(r_1, \tau')$ を e に対応する辺を共有し内部は重ならないように D 上においたものの等長写像による像である．このことに注意すれば，各三角形ごとに定義した写像 ψ は $\bar{S}$ 上の自己同相写像であり，しかも λ_1ー metric から λー metric への等長変換であることがわかる．もちろん定義から，ψ は T の各三角形をそれ自身に写す．

定理2と全く同様にして次の定理が証明される．

定理2′．　$\bar{S}$ をコンパクトな，境界付きの面とし，T をその三角形分割とする．$\bar{S}$ は球やトーラスではないとする．T の頂点の集合 V を内頂点の集合 V' と境界上の頂点の集合 V'' に分ける．K を V' から $(-\infty, 2\pi]$ への写像，β を V'' から $(0, +\infty]$

への写像とする.

もし $\bar{S}$ 上の hyperbolic radius function r で

$$(1') \qquad V'' \text{上} \qquad r(v) \leq \beta(v)$$

と

$$(2') \qquad V' \text{上} \qquad K_r(v) \leq K(v)$$

をみたすものが存在すれば, (1') と (2') において等合が成立するような $\bar{S}$ 上の hyperbolic radius function が唯一つ存在する.

系 (punctured closed surface の circle packing). S を種数 2 以上の閉じた面, T をその三角形分割とする. V を T の頂点の集合とし, V_0 をその部分集合とする. このとき $\bar{S}$ 上の hyperbolic radius function r で

$$(4) \qquad V_0 \text{上で} \quad K_r(v) = 2\pi \quad ,$$

$$(5) \qquad V \setminus V_0 \text{上で} \quad K_r(v) = 0$$

であるようなものが唯一つ存在する. さらに, Cone(r) 上の metric を S に写した metric λ_r は $S \setminus V_0$ 上の Poincaré 計量である.

系の証明. V 上の函数 K を $K(v) = 2\pi$ ($v \in V_0$), $K(v) = 0$ ($v \in V \setminus V_0$) で定義する. 定理 2 (あるいは Thurston の

定理）より λ は定理2′の仮定をみたす．したがって定理2′より，(4) と (5) をみたす $\bar{S}$ 上の hyperbolic radius function r が存在する．(5) は λ_r が $S \setminus V_0$ 上に特異点をもたないことを，(4) は λ_r が完備であることを意味する．λ_r は定曲率 -1 をもつから λ_r は $S \setminus V_0$ 上の Poincaré 計量である．