数理解析研究所講究録
第893巻 1995年 54-69

Circle Packing に関する Thurston のアルゴリズムの収束について.

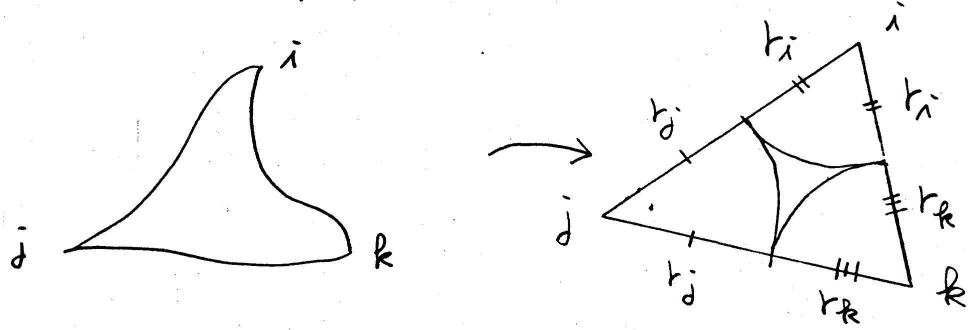
(Yves Colin de Verdière:
Empilements de cercles:
Convergence d'une méthode de point fixe.
Forum. Math. 1. (1989) 395 - 402
の紹介)

大阪市立大学 理、数学 小森洋平 (Yohei Komori)

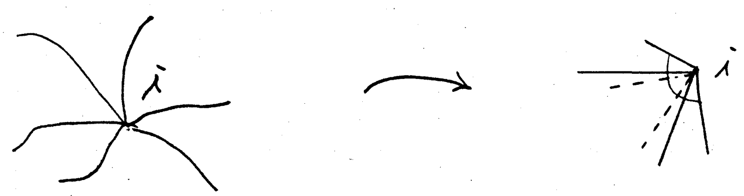
§ 序.

Thurston (とその他の人々) により、閉曲面上の組み合わせ的なデータ (三角形分割) から、(ある意味で) 一意的に定曲率な距離 (Circle Packing) が定まることが知られている。この Colin de Verdière さんの論文では、特にトーラス上の与えられた三角形分割から出発して、その上の flat metric をみつけ出してくる Thurston のアルゴリズムの収束性について解説している。つまり、X をトーラスとし、$\mathcal{T}$ を X 上の有限な三角形分割とし、$\mathcal{T}$ の頂点の全体を $\{1, \ldots, N\}$ とする。そこで任意の N コの正の実数の組 $(r_i) = (r_1, r_2, \ldots, r_N) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ を与えると、

頂点を i, j, k にもつ T の三角形 (i,j,k) の三辺を長さを、それぞれ、r_i+r_j, r_j+r_k, r_k+r_i とすることにより、T の各三角形ごとに Euclidean structure が定まる。



そして、同時に頂点 i, j, k の内角たちも一意に定まるが、この操作を T の三角形全部で一斉に行うと、各頂点の周りに集まってくる内角の総和は 2π になるとは限らない。



つまり $\forall (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ に対し、高々頂点で cone singularity をもつ singular Riemann metric が X 上に定まるが、Thurston (とその他の人々) の結果は、スカラー倍を除いて一意に $(r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ が存在し、三角形分割 T に対し、上の構成で (r_i) から X 上の metric を定義すると、各頂点の周りで頂度 2π になる、つまり flat metric になっているということである。そこで Thurston のアルゴリズムとは、この T に対する flat metric $(r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N$ をみつけてくる手順のことである。

スカラー倍を消すため、

$$\Delta := \{ (r_i) \in (\mathbb{R}^{>0})^N \mid \sum_{i=1}^{N} r_i = 1 \}$$

なる、N-1次元 cell を考えると、この Δ は、($\mathcal{T}$ を固定した時の) X上の、$\mathcal{T}$ の頂点で高々 cone singularity のみをもつ metric 全体である。Thurston のアルゴリズムは具体的には変換

$$G : \Delta \to \Delta$$

の iteration $G^k := \underbrace{G \circ G \circ \cdots \circ G}_{k\text{回}}$ で得られる。つまり、任意の

$(r_i) \in \Delta$ に対し、$G^k(r_i)$ が $k \to \infty$ で、unique flat metric (つまり circle packing) に収束していくことを示す。証明のアイデアとしては、Δ にノルムを定義し、G の iteration G^k がそのノルムに関し、縮小写像になっていることを、G の微分を計算することによってみる。その時、本質的なのは G の微分の行列の性質であり、それは確率論の transfer matrix になっている。このことは §0 でまとめておく。そして §1 で、与えられた三角形分割 $\mathcal{T}$ に対する circle packing の存在と一意性を示し、§2 で上に述べたアルゴリズムの収束性をみる。この論文は短かいが、初等的な方法で深い結果を示しているので感心した。しかし、index 等のまちがいの多さに素人の私は、たいへん読むのに苦労したことを、(一応読み終えた今となっては) 一言、言っておきたい。

§0、道具

以下の2つの節において、一番大切（かつこれしか使わない）なアイデアは次の Lemma である（証明はとてもやさしい）。

Key lemma.

$A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ なる $N \times N$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し、ある正の定数 $\alpha > 0$ が存在し、

$$a_{ij} \geqq \alpha > 0 \qquad (\forall i, j = 1, \cdots, N)$$

かつ

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1 \qquad (\forall i = 1, \cdots, N)$$

とする。この時、$(x_i) \in \mathbb{R}^N$ に対し、$(x_i') := A(x_i)$ とおくと、$\forall i = 1, \cdots, N$ で

$$(1-\alpha) \inf x_j + \alpha \sup x_j \leqq x_i' \leqq (1-\alpha) \sup x_j + \alpha \inf x_j$$

が成り立つ。特に $(y_i) \in \mathbb{R}^N$ が A の固定点（i.e. $(y_i) = A(y_i)$）ならば

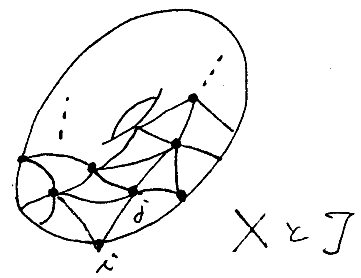
$$(y_1, \cdots, y_N) = (c, \cdots, c) \qquad (\exists c \in \mathbb{R})$$

//

（注　上で表れた行列 $A = (a_{ij})$ は確率論で出てくる遷移行列（transfer matrix）そのものである。）

§1. トーラス上の circle packing の存在と一意性.

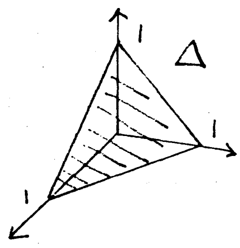
以下、Xをトーラス、$\mathcal{T}$をX上の三角形分割、
$\{1,\cdots,N\}$を$\mathcal{T}$の頂点の全体とし、頂点iとjが隣接している時、$i\sim j$とかくことにする。



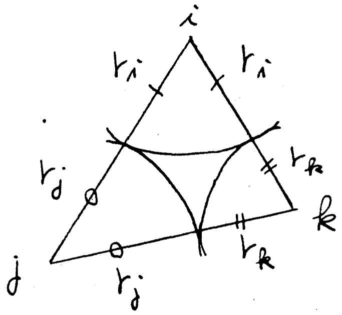
Xと$\mathcal{T}$

正の実数全体を$\mathbb{R}^{>0}$とかき、

$$\Delta := \{\rho=(r_i)\in(\mathbb{R}^{>0})^N \mid \Sigma r_i = 1\}$$



とおくと、Δは$N-1$次元 cell になる。
任意の$\rho=(r_1,\cdots,r_N)\in\Delta$に対し、
$\mathcal{T}$の三角形(i,j,k)の三辺をr_i+r_j, r_j+r_k, r_k+r_iとおき、
Euclidean triangle の構造を与えることで、



高々各頂点にのみ cone singularity をもつ Singular Riemann metric g_ρがX上に定まる。その時、三角形(i,j,k)の各頂点の内角が一意に定まるが、頂点iの周りで metric g_ρが smooth であるための必要十分条件は、頂点iの周りでの内角の和が丁度2πとなることである。そこで metric g_ρの頂点iでの曲率K_iを

$$k_i := 2\pi - (\text{頂点}\,i\,\text{の周りの内角の和})$$

とおく。この時、次の Gauss-Bonnet の定理がある。

Gauss-Bonnet の定理

$$\sum_{i=1}^{N} k_i = \chi(X) = 0 \qquad (\chi(X)\text{ は }X\text{ のオイラー数})$$

//

そこで

$$Z := \{\, k = (k_i) \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^{N} k_i = 0 \,\}$$

なる $N-1$ 次元 affine space を考えると、次の写像 φ が定まる。

$$\begin{array}{ccccl} \varphi : & (\mathbb{R}^{>0})^N & \longrightarrow & Z & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & \rho = (r_i) & \longmapsto & (k_i) & (\text{metric } g_\rho \text{ の、頂点 } i \text{ での曲率}) \end{array}$$

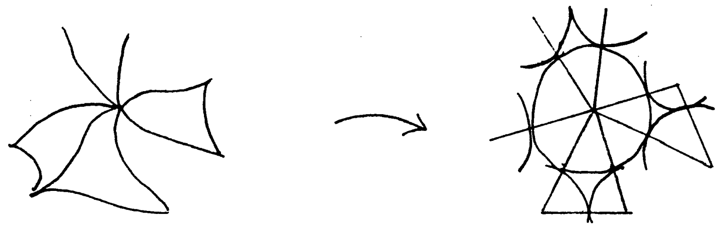
つまり φ は metric g_ρ の"特異性"を取り出す写像であるが、Thurston の結果は次である。

Theorem 1.

$$\varphi|_\Delta : \Delta \longrightarrow \varphi(\Delta) \subset Z$$

は diffeomorphism.　さらに $\varphi(\Delta)$ は bounded convex polyhedron で $0 \in \varphi(\Delta)$. //

つまり、$0 \in \varphi(\Delta)$ かつ φ は単射より、任意の三角形分割 $\mathcal{T}$ に対し、スケラー倍を除いて一意的に X 上の flat metric g_ρ（これを circle packing という）が存在し、$\mathcal{T}$ の各三角形は Euclidean triangulation の構造が定まる。



位相だけの世界　　　　　　metricのある世界

証明は次の Lemma 1, Lemma 2 の順に行う。

Lemma.1.

$\varphi|_\Delta : \Delta \to Z$ は locally diffeo. つまり微分 $\varphi'|_\Delta$ は全単射。（よって φ は open map より $\varphi(\Delta) \subset Z$ は open）. //

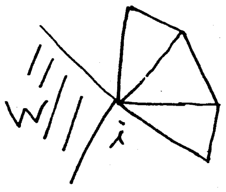
Lemma.2.

三角形分割 T の、proper connected complete subcomplex W に対し（ここで subcomplex W が complete とは、T の辺で両端の頂点が2つとも W に入るならばこの辺自身も W に含まれ、また T の三角形で3辺とも W に入るならば、この三角形自身も W に含まれることをいう）、その頂点全体を W_0，辺全体を W_1，面全体を W_2 とする。さらに $\mathbb{R}^N$ 上の線型不等式 E_W を次のように定義する。

$$E_W : \sum_{i \in W_0} K_i > 2\pi \chi(W) - \pi \left(\sum_{i \in W_0} \eta_W(i) \right)$$

（ここで $\chi(W) := \# W_0 - \# W_1 - \# W_2$ （Wのオイラー数）

$\eta_W(i) :=$ i を頂点にもつ T の三角形で、W に辺が含まれないものの数）

(


左図の時
$\eta_W(i)=3$
)

$P := \{(k_i) \in \mathbb{Z} \mid (k_i)$ はすべての W で不等式 E_W をみたす$\}$

とおく時、次の a), b), c) が成立する。

a) $\varphi(\Delta) \subset P$

b) $\varphi : \Delta \to P$ は proper (よって $\varphi : \Delta \rightleftarrows P$)

c) $0 \in P$

//

Lemma 2 の証明は、相馬さんの解説の方がより一般的でわかりやすいと思うのでここでは省略し、以下 Lemma 1 の証明をみる。

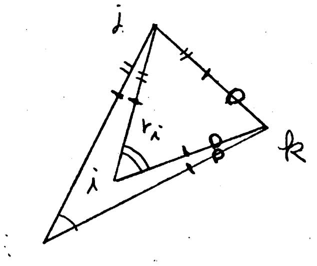
(Lemma 1 の証明)

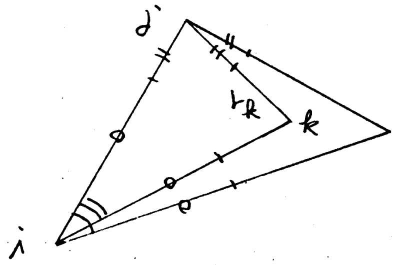
まず $\dfrac{\partial k_i}{\partial r_i} > 0$

$\dfrac{\partial k_i}{\partial r_j} < 0$ ($i \neq j$ かつ $i \sim j$)

$\dfrac{\partial k_i}{\partial r_j} = 0$ ($i \neq j$ かつ $i \nsim j$)

理由は次の図と、k_i の定義式からわかる(と思う)。





（r_i が大きくなると頂点 i の内角は小さくなる。）

（r_k が大きくなると頂点 i の内角は大きくなる）

また $\varphi(\lambda r) = \varphi(r)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R}^{>0})$ より

$$\sum_{j=1}^{N} r_j \frac{\partial k_i}{\partial r_j} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

そこで $\mathrm{Ker}(\varphi'(r_0))$ の元を1つ (x_j) とってくると、

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial k_i}{\partial r_j} x_j = 0 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

よって $y_j := \dfrac{x_j}{r_j}$ とおくと、 $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial k_i}{\partial r_j} r_j \cdot y_j = 0.$ $(i = 1, \cdots, N)$

そこで $N \times N$ 行列 (b_{ij}) を

$$b_{ii} = 0$$

$$b_{ij} = -\frac{r_j \frac{\partial k_i}{\partial r_j}}{r_i \frac{\partial k_i}{\partial r_i}} \qquad (i \neq j)$$

とすると、

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} = 1 \qquad (\forall i)$$

$$b_{ij} > 0 \qquad (i \sim j)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij} y_j \qquad (\forall i)$$

ここで、三角形分割 $\mathcal{T}$ は有限より、その直径 $\mathrm{diam}\,\mathcal{T}$ が与えられ.
$k \geq \mathrm{diam}\,\mathcal{T}$ の時. $(b_{ij})^k$ は §0 の key lemma の条件をみたす.
よって特に $(y_i) \in \mathbb{R}^N$ は $(y_1, \cdots, y_N) = (c, \cdots, c)$ $(\exists c \in \mathbb{R}^N)$
とかける。つまり $\ker(\varphi'(r_0))$ は $\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial r_j}$ 方向の1次元のみ。
よって $\Delta \subset (\mathbb{R}^{>0})^N$ の接空間の方向と直交しており、また Δ と $\mathcal{Z}$ の
次元が共に $N-1$ であることから $\varphi'(r_0)$ $(\forall r_0 \in \Delta)$ は全単射である
ことがわかった。 //

§2. Thurston の algorithm とその収束.

§1では、トーラス上の与えられた三角形分解Tに対し、flat metric がスカラー倍を除いて、一意に決まることをみたが、この節では、任意の singular metric $\rho \in \Delta$ から出発して、Δ から Δ への変換 G (Thurston の algorithm) の合成により、$G^n(\rho) \in \Delta$ が $n \to \infty$ で、三角形分解Tに付随する flat metric (i.e. packing) $\rho_0 \in \Delta$ に収束することをみる。

以下、スカラー倍の作用を translation に直すため、変数変換

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{>0})^N & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^N \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (r_i) & \mapsto & (t_i) := (\log r_i) \end{array}$$

とする。また $\mathbb{R}^N$ を translation の作用で割った空間を $\mathbb{R}^N/D$ とする。(ここで $D := \{(t, t, \cdots, t) \in \mathbb{R}^N \mid t \in \mathbb{R}\}$)

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^{>0})^N \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{R}^N \arrow[d] & \ni (t_i) \arrow[d, mapsto] \\ \Delta \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{R}^N/D & \ni [t_i] \end{tikzcd}$$

さて、目的の Thurston の algorithm $G : \Delta \to \Delta$ のかわりに、translation D の作用と可換な写像 $\tilde{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ をまず定義し、それによって、写像 $F : \mathbb{R}^N/D \to \mathbb{R}^N/D$ を定める。

Lemma 3.

$v \geq 3$ を固定する。この時、任意の元 $(r_1, \cdots, r_v) \in (\mathbb{R}^{>0})^v$ に対し、ある $r_0 > 0$ が unique に存在して、3辺の長さが $(r_0 + r_i,\ r_i + r_{i+1},\ r_{i+1} + r_0)$ なる vコの三角形 $(0, i, i+1)$ の頂点0での内角の和が丁度2πにできる。

注 中心i, 半径r_iの円C_i $(0 \leq i \leq v)$ をかくと、C_0, C_i, C_{i+1} は外接しあうが、$|i-j| \geq 2$ の時はC_iとC_jは交わるかもしれない。

(右図の 2と4)

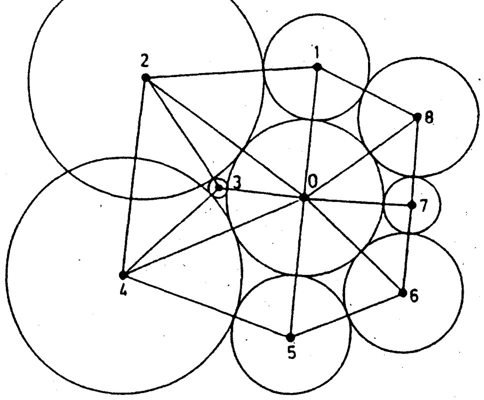


Fig. 4: *Choix de r_0; les cercles C_2 et C_4 recoupent!*

(証明)

$$K : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto K(r) := 2\pi - \sum_{i=1}^{v} \alpha_i$$

(ここで α_i は三辺の長さが $(r + r_i,\ r_i + r_{i+1},\ r_{i+1} + r)$ の三角形 $(0, i, i+1)$ の頂点0での内角)

とおくと、$K(0) = (2 - v)\pi < 0$ (∵ $v \geq 3$)

$K(+\infty) = 2\pi > 0$

かつ K は連続で単調より、中間値の定理より、条件を満たす $r_0>0$ が unique に存在する。 //

そこで写像 $\widetilde{F}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を次のように定義する。

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{F}: & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (t_i) & \longmapsto & (F_i(t_1,\cdots,t_N)) := (\log r_i^*) \end{array}$$

ここで r_i^* は、三角形分割 T において、頂点 i と隣接する頂点 j $(j\sim i)$ たちに対し、$r_j := e^{t_j}$ として、この (r_j) に対し、Lemma 3 で一意に定まる r_0 を r_i^* とする。別の言い方をすると、頂点 i での曲率 K_i が 0 になるような metric ρ

$$\rho = (r_1, \cdots, r_{i-1}, r_i^*, r_{i+1}, \cdots, r_N)$$

の第 i 成分のこと。この時、次のことは明らか。

<u>Claim</u>

$\forall t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\widetilde{F}(t_i+t) = \widetilde{F}(t_i)+t$$

つまり $\widetilde{F}$ は、translation D の作用と可換より、次の写像 F は well-defined。これを Thurston の algorithm という。

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^N/D & \longrightarrow & \mathbb{R}^N/D \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [x_i] & \longmapsto & [\widetilde{F}(x_i)] \end{array}$$

次の主張も、写像Fの定義より明らか。

<u>Claim</u>

トーラス上の三角形分割$\mathcal{T}$に対し、スカラー倍を除き一意に定まる flat metric（つまり packing）を $[a_i] \in \mathbb{R}^N/D$ とすると、$[a_i]$ は写像 $F : \mathbb{R}^N/D \to \mathbb{R}^N/D$ の unique fixed point. //

この節の主結果は次の、Fの収束性である。

<u>Theorem 2.</u>

$\forall [t_i] \in \mathbb{R}^N/D$ に対し、

$$F^n([t_i]) \to [a_i] \qquad (n \to \infty)$$

ここで、$[a_i]$ は $\mathcal{T}$ の packing. F^n は F の n 回合成写像 $F^n := \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{n回}$ とする。 //

証明のアイデアは次の通り。

① 収束を量的にみるため、$\mathbb{R}^N/D$ にノルム $\|\cdot\|$ を定義する。

② 収束を局所的にみる。つまり、$\mathbb{R}^N/D$ 上の任意のコンパクト部分集合上で、F^k $(\forall k \geq \operatorname{diam}\mathcal{T})$ の微分のノルムが1未満の定数で一様におさえられることを示す。

まず $\mathbb{R}^N/D$ 上のノルムを次のように定める。

$$\|[t_i]\| := \frac{1}{2}\left(\sup_i t_i - \inf_i t_i\right)$$

この時、§0 の key lemma より次がわかる。

Lemma

$A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $N\times N$ 行列 $A=(a_{ij})$ とし、

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1 \qquad (\forall i)$$

$$a_{ij} \geq \alpha > 0 \qquad (\exists \alpha>0,\ \forall i,j)$$

をみたすとする。この時、$D := \{(t,\cdots,t) \in \mathbb{R}^N \mid t \in \mathbb{R}\}$ に対し、

$$A(D) \subset D$$

より、$\hat{A} : \mathbb{R}^N/D \to \mathbb{R}^N/D$

が定まるがこの写像 $\hat{A}$ のノルム $\|\hat{A}\|$ は次をみたす。

$$\|\hat{A}\| \leq 1-2\alpha < 1 \qquad //$$

以下、Theorem 2の証明に入る。

まず §1の Lemma 1 と同様に、$t_1,\cdots,t_N$ の函数 $K_i(t_1,\cdots,t_N)$ について、

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_i} > 0$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_j} < 0 \qquad (\text{ただし } j\neq i \text{ かつ } j\sim i)$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial t_j} = 0 \qquad (\text{ただし } j\neq i \text{ かつ } j\not\sim i)$$

一方 $K_i(t_1,\cdots,t_{i-1},F_i(t_1,\cdots,t_N),t_{i+1},\cdots,t_N) \equiv 0$ より、

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = -\frac{\dfrac{\partial K_i}{\partial t_j}}{\dfrac{\partial K_i}{\partial t_i}} \qquad (\text{ただし } i\neq j)$$

よって 写像 $F: \mathbb{R}^N/D \to \mathbb{R}^N/D$ の微分 $\left(\frac{\partial F_i}{\partial t_j}\right)$ について

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} > 0 \quad (\ i \neq j \text{ かつ } i \sim j\ )$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 0 \quad (\ \text{その他}\ )$$

さらに $k_i(t_1+c, \cdots, t_N+c) = k_i(t_1, \cdots, t_N) \quad ({}^\forall c \in \mathbb{R})$ より

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial k_i}{\partial t_j} = 0$$
$$\therefore \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial t_j} = 1$$

よって §1 の Lemma 1 と同様に、${}^\forall k \geq \mathrm{diam}\, \mathcal{T}$ に対し F^k の微分

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t_j}\right)^k$$

は、$\mathbb{R}^N/D$ の任意のコンパクト部分集合上で §0 の key lemma の条件をみたす。よって三角形分割 $\mathcal{T}$ に対する packing を $[a_i] \in \mathbb{R}^N/D$ とすると、

${}^\forall k \geq \mathrm{diam}. \mathcal{T}$, ${}^\forall [t_i] \in \mathbb{R}^N/D$ に対し、ノルム $\|\cdot\|$ の定める $\mathbb{R}^N/D$ 上の距離を $d(\cdot,\cdot)$ とする時、前のページの Lemma より、

$$d([a_i], F^k([t_i])) < d([a_i], [t_i])$$

よって ${}^\exists C > 0$, $0 < {}^\exists K < 1$

$$d([a_i], F^n([t_i])) \leq C \cdot K^n \quad ({}^\forall n \geq \mathrm{diam}. \mathcal{T})$$

以上で、Thurston の algorithm $F: \mathbb{R}^N/D \to \mathbb{R}^N/D$ の収束が言えて、Theorem 2 の証明ができた。 //

(以上)