数理解析研究所講究録
第893巻 1995年 70-79

Circle Packing の変形空間のパラメーター

東工大・理 松崎克彦
(Katsuhiko Matsuzaki)

0. 序

本稿は、R. Brooks, "On the deformation theory of classical Schottky group" Duke Math. J. 52 (1985) の中で示された、リーマン球面上の円の配置の変形空間のパラメーターをすき間を埋める円の数から構成される連分数を用いてあたえる方法を解説するものである。証明法は、原論文のものを多少変更して、より簡潔で見通しのよいものにしたつもりである(本稿の補題1がポイント)。

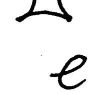
1. 円の配置の変形空間

$\mathcal{C}=\{C_j\}$ をリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の互いに内部が交らない有限個の円周の集合で、その外部の成分は"3稜形"または"4稜形"から成るものとする($\mathcal{C}$ が最後の条件をみたしていなくても、いくつかの円周をつけ加えることにより、それらがみ

たすようにできる)。$\mathcal{C}$ の変形空間 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathcal{C})$ とは、$\mathcal{C}$ と同じ組み合わせデータをもつ円周の配置全体の集合(ただし向きを保つ Möbius 変換で移りあうものは同一視する)に、自然な位相(円周の集合としての収束による位相)をいれた空間のことである。$\mathcal{C}=\{C_j\}$ に関する反転から生成される $\widetilde{\mathrm{M\ddot{o}b}}(\hat{\mathbb{C}})=\{$ 向きを逆にするものも許す Möbius 変換全体 $\}$ の離散部分群を Γ とすると、$\mathcal{S}$ は Γ の擬等角変形空間 $QH(\Gamma)$ と同一視できる。ここで、$QH(\Gamma)=\{[f]$ (fの同値類) $|$ fはΓと両立する$\hat{\mathbb{C}}$の擬等角自己同相$\}$、ただし、f_1 と f_2 が同値とは、両者の誘導する Γ からの同型が向きを保つ Möbius 変換による共役を除いて等しいこととする。以下、$\mathcal{S}$ の元を $[f]$ で表わし、これは円周の配置 $f(\mathcal{C})$ に対応する点であると考える。

有限生成クライン群の擬等角変形空間の場合と同じで、いま Γ の不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ の各成分は単連結であるので、$QH(\Gamma)$ は $\Omega(\Gamma)$ を Γ の作用で割った orbifold $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の Teichmüller 空間と同相になる([定理5.18]* 参照)。今の場合、$\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の各成分には、次のどちらかが表われる。

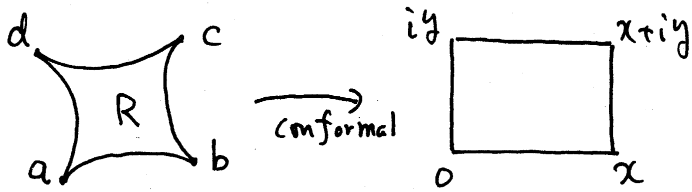
 : 3-punctured sphere / anti-conformal involution

 : 4- 〃 / 〃

また、$\mathcal{C}$ の外部(Γ の基本領域)が集合としては $\Omega(\Gamma)/\Gamma$

* 以下、定理の番号は谷口・松崎「双曲的多様体とクライン群」のもの

に一致している。ここで  は非自明な擬等角変形を許さないのでTeichmüller空間は1点からなり．  は実1次元の変形をもつ。$\{R_1, R_2, \cdots, R_g\}$ を ℓ の外側の4稜形の集合または $\Omega(T)/\Gamma$ の成分  の集合とすれば． $\mathcal{T} \cong \prod_{i=1}^{g} \mathrm{Teich}(R_i)$ が成り立つ。4稜形 R とその頂点 a, b, c, d の組（それまでこめて R と略記する）に対して．モジュール M(R) とは． R を頂点の対応を保ち図のような長方形に等角写像したときの $\frac{x}{y}$ の値のことである。 R のTeichmüller空間は． R のモジュールでパラメトライズされる。よって．対応



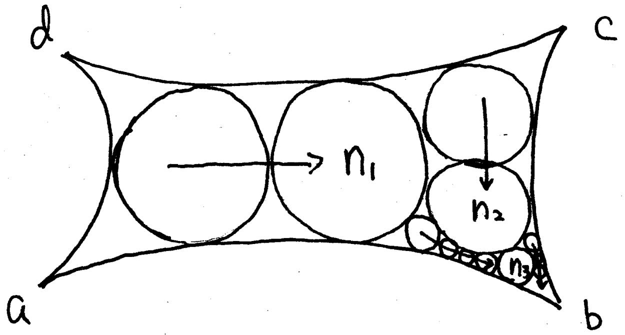
$$\mathcal{T} \ni [f] \longmapsto (M(f(R_1)), M(f(R_2)), \cdots, M(f(R_g))) \in \mathbb{R}_+^g$$

により $\mathcal{T}$ のパラメーターが与えられ． $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}_+^g$ がわかる。

2．連分数パラメーター

上では． $\mathcal{T}$ のパラメーターとして4稜形のモジュールを採用したが．以下ではcircle packingの問題に関して意味のある連分数を各4稜形から構成し．それが $\mathcal{T}$ の新しいパラメーターとなることをみる。

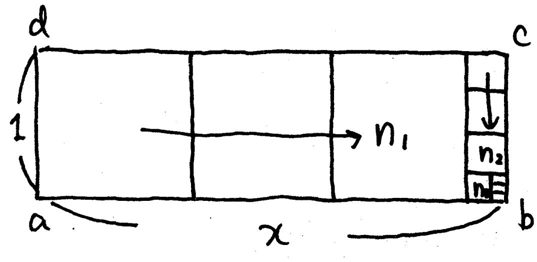
4稜形 $R = (R; a, b, c, d)$ において．辺 da から辺 bc に向かって3辺に接する円を埋めてゆく。可能なところまで



（図の場合 $n_1=2,\ n_2=2,\ n_3=5\ \cdots$）

続けて埋まった円の個数を n_1 とする。次に残ったすき間に辺 ab に向かって同じことをする。円の個数を n_2 とする。さらに残ったすき間に辺 bc に向かって … という操作をくりかえして数列 $n_1, n_2, n_3 \cdots$ をつくる。ちょうど4辺に接するように円が埋まって終われば有限数列ができ、そうでなければ無限数列となる。

<u>定義</u> 4稜形 R に対して、上記のようにしてできる数列 $\{n_i\}$ からつくられる連分数 $n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}$ の値を $r(R)$ と定める。



類似したものとして、長方形 R に正方形を埋めてゆくことで上のように連分数をつくると、

$x = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}}$ であることがわかり、それは長方形のモジュール $M(R)$ に一致する。これより、円弧4稜形 R に円を埋めてゆく場合でも、$r(R)$ は R のモジュール

$M(R)$ と関連が深い量であろうと想像される。ただし、$M(R)$ は R の等角不変量である（すなわち、R から別の4稜形 R' への頂点の対応を保つ等角写像があれば $M(R)=M(R')$）のに対し、$r(R)$ は R の等角不変量ではない。しかし、それでも $r(R)$ は次に示すように“等角擬不変性”とでも言うべき性質を持っている。この結果は、原論文には明示されていない主張であるが、本稿ではここに着目して以下の議論を簡明にする。

<u>補題1</u> 次の性質をみたす絶対定数 $K\,(>1)$ が存在する：任意の（円弧）4稜形 R に対して

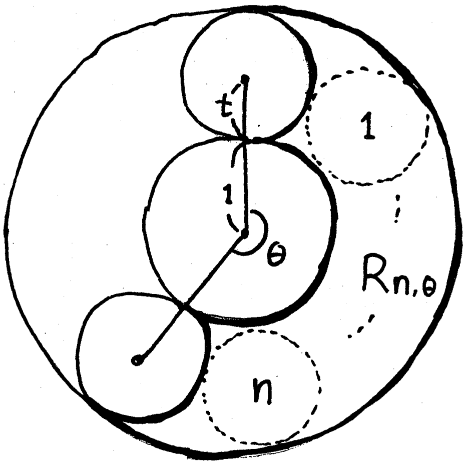
$$\frac{1}{K}\,r(R) \leq M(R) \leq K\,r(R)$$

が成り立つ。

証明）n を任意の自然数として、$r(R)=\frac{1}{n}$ をみたす4稜形に対して K の存在を示す。$r(R)=n$ のときは、たてよこの役割を替えればよい。その他の場合は、自然数またはその逆数ではさんで評価すればよい。

R を囲む4つの円は、Möbius 変換で移して次の図のような位置にあるとして一般性を失わない。n を固定し、$r(R)=\frac{1}{n}$ をみたす4稜形で図の角が θ のものを $R_{n,\theta}$

と書く。 $x = \frac{\theta}{2(n+1)}$ とおく。
小さな円の半径を t とすると、
$t = \frac{\sin x}{1-\sin x}$ であることがわかる。 θ は $0 < \theta < 2\pi\frac{n+1}{n+2}$ の範囲を動き、このとき x は
$0 < x < \frac{\pi}{n+2}$ である。



一般に、 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ のとき、

$$\frac{2\log 2}{\pi}x \le \log\left(1+\frac{2\sin x}{1-\sin x}\right) \le \frac{4}{2-\sqrt{3}}x$$

が成り立っている。 $R_{n,\theta}$ を上下から円環の角度 θ 分と角度 $\frac{n}{n+1}\theta$ 分の部分領域ではさむことにより、 $M(R_{n,\theta})$ は、

$$\frac{1}{\theta}\log(1+2t) \le M(R_{n,\theta}) \le \frac{n+1}{n\theta}\log(1+2t)$$

と評価できる。この2つの式より、

$$\frac{\log 2}{\pi}\frac{1}{n+1} \le M(R_{n,\theta}) \le \frac{2}{2-\sqrt{3}}\frac{1}{n}$$

を得る。よって、 θ, n によらない定数 K が存在して、

$$\frac{1}{K}\frac{1}{n} \le M(R_{n,\theta}) \le K\frac{1}{n}$$

とできる。

定義 写像 $b : \mathcal{T} \cong \mathbb{R}_+^8 \longrightarrow \mathbb{R}_+^8$ を

$$[f] = (M(f(R_1)), \cdots, M(f(R_8))) \longmapsto (r(f(R_1)), \cdots, r(f(R_8)))$$

により定め、 $\mathcal{T}$ の Brooks 座標変換と呼ぶことにする。

3. Brooks座標変換の単射性

以下の目標は、$b:\mathcal{T}\to\mathbb{R}^g_+$ が上への同相写像であることを示すことである。まず、b の連続性は直観的に納得できる。心配な人は原論文を見よ。ここでは b の単射性の証明をきちんと与える。

<u>補題2</u>　$b:\mathcal{T}\to\mathbb{R}^g_+$ は単射連続写像である。

証明）　$\mathcal{T}$ の点を表わす円周の集合 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ をとり、それぞれの外部にある4稜形の集合を $\{R_1,\cdots,R_g\}$, $\{R_1',\cdots,R_g'\}$ とする。$r(R_i)=r(R_i')$ $(i=1,\cdots,g)$ ならば、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{T}$ の点として等しいことを示せばよい。

連分数を構成するときの手順で、各 R_i を埋める第1番目の円 g 個と $\mathcal{C}$ を合わせたものを $\mathcal{C}_1$、第2番目までの円 $2g$ 個と $\mathcal{C}$ を合わせたものを $\mathcal{C}_2$、同様に第 n 番までの円 ng 個と $\mathcal{C}$ を合わせたものを $\mathcal{C}_n$ とする。また、$\mathcal{C}_\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$ とする。$\mathcal{C}_n$ の外側に残る4稜形を R_{1n} $(\subset R_1),\cdots,R_{gn}$ $(\subset R_g)$ のように書く。$\mathcal{C}'$ についても同じく定義する。$r(R_i)=r(R_i')$ より $r(R_{in})=r(R_{in}')$ であるから、補題1を用いてすべての i, n に対して

$$\frac{1}{K^2}\leq\frac{r(R_{in})}{r(R_{in}')}\leq K^2$$

が成立する。従って，成分および頂点の対応を保つ K^2-擬等角写像 $f_n : \bigcup_{i=1}^{3} R_{in} \to \bigcup_{i=1}^{3} R_{in}'$ がとれる。

e_n (e_n') の円に関する反転から生成される $\widetilde{\mathrm{M\ddot{o}b}}(\hat{\mathbb{C}})$ の離散部分群を Γ_n (Γ_n') とする。f_n を3稜形上では等角写像になるように Γ_n の基本領域から Γ_n' の基本領域への写像に拡張し，さらに Γ_n と両立するように $\Omega(\Gamma_n) \to \Omega(\Gamma_n')$ と拡張する。最後に，Γ_n は幾何学的有限であるから，Γ_n と両立する K^2-擬等角写像 $f_n : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ に拡張される（［定理3.21］参照）。正規化条件をみたす K^2-擬等角写像の列 $\{f_n\}$ は正規族をなすので，極限函数 f (K^2-擬等角) が存在する。これは，無限生成離散群のあいだの同型 $\Gamma_\infty \to \Gamma_\infty'$ を誘導している。

ここで，Γ_∞ は極限集合 $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上で擬等角変形できない（すなわち Γ_∞ と両立する擬等角写像 f の歪曲係数は $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上 a.e. に 0 である）ことをみるために，次の Sullivan による結果に注意する（［定理5.11］参照）。

<u>命題</u>　$\widetilde{\mathrm{M\ddot{o}b}}(\hat{\mathbb{C}})$ の離散部分群 Γ に対し，P_Γ^∞ を Γ の Dirichlet 基本領域 ($\subset \mathbb{H}^3$) と $\hat{\mathbb{C}} = \partial \mathbb{H}^3$ の交わりとし，

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(P_\Gamma^\infty), \quad \mathcal{R}(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} - \mathcal{D}(\Gamma)$$

と定めると，Γ に関する Beltrami 微分は $\mathcal{R}(\Gamma)$ 上 a.e.

に 0 である。

命題より，f の歪曲係数が $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上 a.e. に 0 であることを言うためには，$m(\Lambda(\Gamma_\infty)\cap\mathcal{D}(\Gamma_\infty))=0$ (m は2次元 Lebesgue 測度) を示せばよいが，さらに $\mathcal{D}(\Gamma_\infty)$ の定義より，これは $m(\Lambda(\Gamma_\infty)\cap P^\infty_{\Gamma_\infty})=0$ と同値である。今の場合，$P^\infty_{\Gamma_\infty}$ とは e_∞ の外側全体であり，また $\Lambda(\Gamma_\infty)$ は e_∞ の内側および接点上に含まれることがわかる。よって，$\Lambda(\Gamma_\infty)\cap P^\infty_{\Gamma_\infty}\subset\{e_\infty$ の接点$\}$ (可算集合) より $m(\Lambda(\Gamma_\infty)\cap P^\infty_{\Gamma_\infty})=0$ が従う。

Γ_∞ は $\Lambda(\Gamma_\infty)$ 上擬等角変形できないことがわかったので，有限生成のときと同じく $QH(\Gamma_\infty)\cong\mathrm{Teich}(\Omega(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty)$ が成立するが，$\Omega(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ の各成分は orbifold  であるので剛性をもつ。つまり $\mathrm{Teich}(\Omega(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty)$ は1点からなる。よって，f により誘導された同型 $\Gamma_\infty\to\Gamma'_\infty$ は Möbius 変換による共役で与えられることがわかる。特に，e_∞ と e'_∞ は Möbius 変換で移りあうので e と e' もそうである。以上で e と e' が f の点として等しいことが証明された。 $\square$

4. 主定理と応用

Brooksの結果は、上でみた補題1および2より直ちに導びかれる。原論文では、$b: \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+^g$ の全射性の証明にKoebe-Andreev-Thurstonの定理を用いているが、補題1に気がつけばそれも不用である。

<u>定理</u>　$b: \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+^g$ は上への同相写像である。

証明）b は $\mathcal{S} \cong \mathbb{R}_+^g$ からの単射連続写像であるから、領域不変性より同相写像である。また、補題1よりコンパクト集合の b による逆像はコンパクトなので、全射性も従う。$\boxtimes$

連分数パラメーターを用いた $\mathcal{S}$ の新しい座標をBrooks座標と呼ぶことにする。$\mathcal{S}$ の点 e がこの座標の有理点であるとは、e の外側の4稜形に有限個の円を埋めてcircle packingが完成することを意味する。よってこのような点は $\mathcal{S}$ で稠密に存在することがわかった。同様にして、コンパクトリーマン面のモジュライ空間の中でcircle packingを許容する複素構造が稠密に存在することも示される。詳しくは次の藤井道彦氏による解説を参照せよ。