数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 114-127

On the convergence of derivatives of circle packing isomorphisms

東工大・理 志賀 啓成
(Hiroshige Shiga)

1. Introduction.

ここでは，B. Rodin "Schwarz's Lemma for Circle Packings. II"（J. Differential Geometry 30 (1989), 539 − 554）の解説をする。この論文は、その標題よりも、むしろこの解説の標題のように，circle packing によるリーマン写像の近似の際の微分の収束について扱ったものである。

平面上に単連結領域Ωと、その内部の2点 z_0, z_1 が与えられたとき、リーマンの写像定理によって、Ωから単位円板 D への等角写像 f で、$f(z_0)=0$, $f(z_1)>0$ なるものが唯一つ存在する。この等角写像はΩの circle packing から得られる写像によって近似されることが証明されている（Rodin − Sullivan [RS]）。まず、その手続きを簡単に復習する。

任意の正数εに対して、$HCP(\varepsilon)$を半径εの円による平面の regular hexagonal circle packing とする。このとき領

域Ωの$HCP(\varepsilon)$の円による内部近似をΩ_εとする。すなわち、Ω_εは自分自身とその回りの6つの円が全てΩに含まれている円(inner circle)と、Ωに含まれてはいるが、inner circleではない円(border circle)、からなっている。このようなΩ_εに対して、これと組み合せ的に同値なcircle packingが(Ω_ε'とかく)単位円D内にとれる。ただし、Ω_ε'のborder circleは全て∂Dに接しているものをとる。(Andreev-Thurstonの定理)。Ω_εの円で、z_0, z_1の近くにあるものをC_0, C_1, それに対応するΩ_ε'の円をC_0', C_1'とする。Dを不変にするMöbius変換を作用させることによって、C_0'の中心は原点、C_1'の中心は正の実軸上にあると仮定してよい。

さて、Ω_εとΩ_ε'は組み合せ的に同値であったから、それぞれの円の中心を頂点(vertex)、互いに接する円の中心を結ぶ線分を辺(edge)とする複体(それを、それぞれT_ε, T_ε'とする)を作れば、それらの間に自然な写像f_εが存在する。この写像f_εはT_εのcarrier $|T_\varepsilon|$からT_ε'のcarrier $|T_\varepsilon'|$への区分的linear mapととれる。したがって、特にquasi conformalである。そして、packing constant(後述)が、$\varepsilon \to 0$のとき0に収束することから、このf_εが等角写像、すなわちリーマン写像に収束していることがわ

かる。

実際には、上の収束はΩ上広義一様収束になっているのだが、ここでは更に、f_ε の「微分」の収束を問題にする。

[Question]

f_ε の image の円と pre-image の円の半径比は Riemann 写像の微分に収束するか？

[この論文での解答]

ある条件の下では Yes. 一般には BMO-norm で正しい。

注意 上の「ある条件」とは、packing constant の評価についての条件だが、実はこの条件は He[H] によって、正しいことが示されているので、結局、この論文で示された定理の結論が、いつも成立していることになる。

2. 記号と定義

Ω：平面内の有界単連結領域 $\ni z_0, z_1$.

D：単位円板，　$\varepsilon > 0$.

f：Ω から D への conformal map (Riemann map) で、
　正規化条件　$f(z_0) = 0$, $f(z_1) > 0$ なるもの。

Ω_ε：Ω の regular hexagonal circle packing による近似

Ω'_ε：D の circle packing で、Ω_ε と組み合せ的に同値なもの。

$T_\varepsilon^{(\prime)}$: $\Omega_\varepsilon^{(\prime)}$ より得られる複体

$|T_\varepsilon^{(\prime)}|$: $T_\varepsilon^{(\prime)}$ の carrier

f_ε : $|T_\varepsilon|$ から $|T_\varepsilon'|$ への自然な写像

$|T_\varepsilon|$ の三角形の頂点 z は Ω_ε の円の中心に対応していた。また、T_ε と T_ε' は組み合せ的に同値であったから、$|T_\varepsilon'|$ にも対応する点がある。そこで、$r_\varepsilon(z)$ を

$$r_\varepsilon(z) = \frac{(C' \text{の半径})}{(C \text{の半径})}$$

で定義する。ここに、C は z 中心の Ω_ε の円、C' はそれに対応する Ω_ε' の円である。$|T_\varepsilon|$ の頂点で定義された関数 $r_\varepsilon(z)$ を $|T_\varepsilon|$ 全体に連続的に拡張して、それをやはり同じ $r_\varepsilon(z)$ と書く（拡張のやり方は、例えば三角形の重心座標を用いて、内部の点を頂点で表せば容易。）。このようにして、連続関数

$$r_\varepsilon : |T_\varepsilon| \to \mathbb{R}$$

を得る。

<u>Packing constant S_n</u>

${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、HCP_n を平面の regular hexagonal packing の第 n 世代までの circles 全体、HCP_n' を HCP_n と組み合せ的に同値な circle packing とする。

このHCP$'_n$に対して、その第0世代の円と第1世代の円の半径比をρとして、

$$S_n = \sup_{HCP'_n} |1-\rho|$$

とおく。ここにsupは上のようなHCP$'_n$全てに渡って考えるものとする。このとき、$S_n \to 0$ $(n \to \infty)$が知られている。

3. 微分の収束

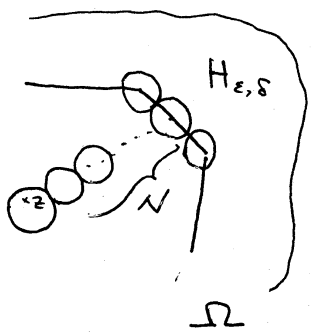
Proposition 1.

前節の記号で、$S_n = O(\frac{1}{n})$ならば、$\varepsilon \to 0$のとき、γ_εは$|f'|$にΩ上広義一様収束する。

証明 $z \in \Omega$, $\varepsilon, \delta > 0$を固定する。ただし、ε, δは$\mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > {}^\exists d \gg \delta \gg \varepsilon > 0$ととっておく。ここで、

$H_{\varepsilon,\delta}$: zに最も近い円を中心とした直径2δの六角形

とする。ここでは、特に第N世代の円の中心を結んでできる六角形になっているとする。(図参照)



したがって、$\delta = 2\varepsilon N$である。

よって、Ω_εは$[d/2\varepsilon] = [Nd/\delta]$世代の円は必ず含む。そして、この世代数は$z$の近傍の点を$z$の代わりに考えても成立している。ここで$\varepsilon \to 0$とすると、六角形$H_{\varepsilon,\delta}$はあ

る六角形 $H_{0,\delta}$ に収束しているとしてよい。また、f_ε は f に広義一様収束しているので、

$$|f'(z)|^2 = \lim_{\delta\to 0} |f(H_{0,\delta})| / |H_{0,\delta}|$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} |f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})| / |H_{\varepsilon,\delta}|,$$

ここに $|\cdot|$ は Euclid の面積である。

さて、前段の議論から、Ω_ε と同様、Ω'_ε も第 $[N\partial/\delta]$ 世代までの円を含んでいる。したがって、Ω'_ε の第 0 世代の円の半径を R とすると、S_n の定義により、そのような任意の円の半径 r は、

$$R(1 - S_{[dN/\delta]})^N \le r \le R(1 + S_{[dN/\delta]})^N$$

と評価される。よって、

(三角形がすべて一辺 $R(1-S_{[dN/\delta]})^N$ の正三角形の場合の $f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})$ の面積)

$\le |f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})|$

$\le$ (三角形が 〃 〃 $R(1+S_{[dN/\delta]})^N$ 〃 〃 〃)

$H_{\varepsilon,\delta}$ はすべて一辺 ε の正三角形からなるので、

$$\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 (1 - S_{[dN/\delta]})^{2N} \le |f_\varepsilon(H_{\varepsilon,\delta})| / |H_{\varepsilon,\delta}|$$

$$\le \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 (1 + S_{[dN/\delta]})^{2N}$$

ここで $S_n = O(\frac{1}{n})$ を使う。$^{\exists}B > 0$ s.t. $0 \leq S_n \leq B/n$ なので、

$$(1 + S_{[dN/\delta]})^{2N} \leq (1 + B/[dN/\delta])^{2N} \xrightarrow{N\to\infty} e^{2B\delta/d}$$

$$(1 - S_{[dN/\delta]})^{2N} \geq (1 - B/[dN/\delta])^{2N} \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-2B\delta/d}$$

$\varepsilon \to 0$ のとき、$N \to \infty$ なので、

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 e^{-\frac{2B\delta}{d}} \leq \frac{|f(H_{0,\delta})|}{|H_{0,\delta}|} \leq \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 e^{\frac{2B\delta}{d}}$$

定義より、$r_\varepsilon(z) = R/\varepsilon$ だったから、$\delta \to 0$ とすれば上式より、$r_\varepsilon \to |f'|$ を得る。収束の広義一様性は N の評価の一様性から従う。 Q.E.D

<u>注意</u> Introduction でも述べたように、「$S_n = O(\frac{1}{n})$」という条件は、He [H] によって示されている。

擬等角写像 f_ε の微分に関しても同様のことが示せる。それは次の事実と Proposition 1 から直ちに従う。

<u>Theorem 1</u>

$$\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z}\right| = r_\varepsilon(1 + O(S_n))$$

$$\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}}\right| = r_\varepsilon\, O(\sqrt{S_n})$$

$$|\mu_\varepsilon| = O(\sqrt{S_n})$$

ただし、μ_ε は f_ε の complex dilatation である。

証明　Rodin [R1] を見よ。

4. r_ε の BMO-norm による収束.

前節の Proposition 1 でみたように、$s_n = O(\frac{1}{n})$ という仮定のもとで、$r_\varepsilon \to |f'|$ $(\varepsilon \to 0)$ の収束が証明され、しかも、He によって、$s_n = O(\frac{1}{n})$ が示されているので、$r_\varepsilon \to |f'|$ に関しては一応の結果を得たのであるが、ここでは、Rodin の論文に沿って、$r_\varepsilon \to |f'|$ の BMO-norm に関する結果を簡単に紹介する。ただし、ここでは、BMO に関する事実は、基本的なものについては省略する。適当な教科書を参照されたい。

補題 1.

w, w_n $(n=1,2,\cdots)$: Ω 上の quasi conformal

$\{w_n\}$ は $n \to \infty$ のとき広義一様に w に収束しており、更に微分 $\{\partial w_n/\partial \bar{z}\}$ も $\partial w/\partial \bar{z}$ に L^∞-norm で局所的に収束していると仮定する。このとき、微分 $\{\partial w_n/\partial z\}$ は $\partial w/\partial z$ に Ω 内局所的に、BMO-norm で収束する。

略証

Hilbert 変換 S を

$$S\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

で定義すると、これは L^∞ から BMO への連続作用素

⟹ 一方，$S(\partial f/\partial\bar{z}) = \partial f/\partial z$

⟹ よって $\partial w_n/\partial\bar{z} \to \partial w/\partial\bar{z}$ loc. in L^∞ から

$$\partial w_n/\partial z = S(\partial w_n/\partial\bar{z}) \to S(\partial w/\partial\bar{z}) = \partial w/\partial z$$

loc. in BMO がいえる。

（実際には、議論を局所化する必要があるので、$C_0^\infty(\Omega)$ の適当な関数との積を考えて、上の推論を行う。） Q.E.D.

Theorem 2.

Ω 上局所的に r_ε は $|f'|$ に BMO-norm で収束する。

証明

r_ε は局所一様有界で、s_n は $(n\to\infty)$ 0 に収束するから、Theorem 1 から $\partial f_\varepsilon/\partial\bar{z} \to 0$ (loc. in L^∞). また、f_ε は等角写像 f に局所一様収束している。よって $\{f_\varepsilon\}$ は $\varepsilon\to 0$ のとき、上記補題の条件を満たしている。よって

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{loc. in BMO}).$$

再び Theorem 1 を用いると、$r_\varepsilon \to |f'|$ (loc. in BMO) がわかる。 Q.E.D.

系

$$\partial f_\varepsilon/\partial z \longrightarrow f' \quad (\text{loc. in BMO}).$$

5. The rate of convergence of $f_\varepsilon \to f$

この節では、$f_\varepsilon \to f$ の収束の評価を ε を用いて行う。

<u>Theorem 3.</u>

$z_0, z_1 \in \Omega$, K を Ω 内の compact 集合、f_ε を $HCP(\varepsilon)$ と z_0, z_1 に関して作った circle packing isomorphism とする。このとき、$\exists C$, $\exists p > 2$ がとれて、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、

$$\| f - f_\varepsilon \|_K \leq C \left(\sqrt{S_{[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}]}} + \varepsilon^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

が成立する。ここに f は $f(z_0) = 0$, $f(z_1) > 0$ なる Ω の Riemann 写像である。

<u>略証</u> $W_\varepsilon = |T_\varepsilon|$, $D_\varepsilon = |T_\varepsilon'|$ とおいて、G_{W_ε}, G_{D_ε} をそれぞれ、W_ε, D_ε の Riemann 写像で、$G_{W_\varepsilon}(z_0) = 0$, $G_{W_\varepsilon}(z_1) > 0$, $G_{D_\varepsilon}(0) = 0$, $G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z_1)) > 0$ なるものとする。そこで、

$$|f(z) - f_\varepsilon(z)| \leq |f(z) - G_{W_\varepsilon}(z)|$$
$$+ |G_{W_\varepsilon}(z) - G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}(G_{W_\varepsilon}(z))| + |G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z)) - f_\varepsilon(z)|$$

という不等式を考え、右辺を ε で評価することを考える。

右辺の第1項 $|f(z) - G_{W_\varepsilon}(z)|$ は2つの領域 Ω, W_ε の Riemann 写像の比較である。しかも、その境界同士の近さは ε で評価される。したがって、f, G_{W_ε} の差も、古典的な Warschawski の結果から ε で評価できる（[R2] Lemma 3.1）。

第3項 $|G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z))-f_\varepsilon(z)|$ は D_ε の Riemann 写像と恒等写像の差（の $f_\varepsilon(z)$ での値）とみなせる。その評価を行う為には、領域 D_ε が単位円板 D へ"どれほど"近いかを見る必要がある。D_ε の構成法を考えれば、それは D の packing Ω_ε' の border circle の半径を評価することに他ならない。そのために、次の補題を使う。

補題2（Length-Area-Theorem の拡張）

次の性質を満たす絶対定数 $C>0$ が存在する。

c : Ω_ε' の border circle

c のまわりの第1世代から第 N 世代までの circles の cross cut が c と 0 とを分離していたとする。

このとき、

$$S(=S(k,N))=\inf\{\text{第}j\text{世代の cross cut chain の半径の和, ただし } k\le j\le 2k-1<N\}$$

とおくと、$S\le C(k/N)^{\pi^2/24}$.

証明 略. [R2] Lemma 3.2 を見よ。

この補題から、Ω_ε' の border circle の半径を ε で評価できる。実際、border circle の半径は $k=1$ のときの、上記 S より小さいから、$\le C(1/N)^{\pi^2/24}$. よって、border circle と 0 とを分離する世代数 N を評価すればよい。Ω_ε と Ω_ε' は組み合せ的に同値なので、Ω_ε において z_0 と border circle を分

離する世代数と同じである。ところが、この世代数は容易に、$\mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)/2\varepsilon$ 程度であることがわかる。したがって、$N = O(\frac{1}{\varepsilon})$. よって、$\Omega'_\varepsilon$ の border circle の半径は、ある $C_\Omega > 0$ がとれて、$\leq C_\Omega \varepsilon^{\pi^2/24}$ となる。よって、D_ε と D との近さを評価できる。

第2項 $|G_{W_\varepsilon}(z) - G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}(G_{W_\varepsilon}(z))|$ の評価は最もデリケートである。この項は、擬等角写像 $G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}$ と恒等写像の差（の $G_{W_\varepsilon}(z)$ での値）と見る。

そのためには、$h_\varepsilon := G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}$ とおいて、h_ε の complex dilatation を評価すればよい。というのは、h_ε は $D \to D$ の qc で、$h_\varepsilon(0) = G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}(0) = G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon(z_0) = 0$, $p = G_{W_\varepsilon}(z_1)$ とおくと、$h_\varepsilon(p) = G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z_1)) > 0$ であり。G_{W_ε} が局所一様に Riemann 写像 f に収束するから、$\exists p_0 > 0$ s.t. $\forall \varepsilon > 0$ に対し $p_0 < p < 1$ である。よって、h_ε はある程度の正規化条件をみたしているので、その complex dilatation で、恒等写像との差分が評価できる（[R2] Lemma 3.4）。

一方、h_ε は f_ε と conformal map とを合成させたものなので、f_ε の complex dilatation μ_ε を考えればよい。μ_ε については Theorem 1 より $\|\mu_\varepsilon\|_K = O(\sqrt{s_n})$ であることが分かる。ただし $n = [\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)/2\varepsilon]$。ところで、一般に擬等角写像と恒等写像との差を見るのに、compact 集合上での、

complex dilatation の情報だけでは十分ではない。しかし、単位円板から単位円板への、「正規化された」擬等角写像については、その compact 集合の「サイズ」を用いて評価できる（[R2] Lemma 3.4）。この結果を用いる為には、μ_ε の大きさが評価できる W_ε の compact 集合に対応する、h_ε の定義域、すなわち D での compact 集合の「サイズ」を調べることによって得られる。（詳細略）　　　Q.E.D.

<u>注意</u>　最後の部分、すなわち、W_ε の compact 集合に対応する D での compact 集合の「サイズ」を調べるには、G_{W_ε} による compact 集合の対応を見ればよいが、Rodin は論文では、Warschawski の結果（[R2] Lemma 3.1）から従うと、書いてあるが、筆者にはその理由が判然としなかった。

References

[H] He, Z., An estimate for hexagonal circle packings, J. Differential Geometry **33** (1991), 395–412.

[MR] Marden, A. and B. Rodin, On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, LNM **1435** Springer (1990), pp. 103–115.

[R1] Rodin, B., Schwarz's Lemma for Circle packings, Invent. Math. **89** (1987), 271–289.

[R2] Rodin, B., Schwarz's Lemma for Circle packings II, J. Differential Geometry **30** (1989), 539–554.

[RS] Rodin, B. and D. Sullivan, The convergence of circle packings to the Riemann mapping, J. Differential Geometry **26** (1987), 349–360.