数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 172-180

Circle packing の型問題

京大理　谷口雅彦
(Masahiko Taniguchi)

位相開円板の任意の三角形分割 T に対し、carrier が $U=\{|z|<1\}$ か $\mathbb{C}$ となる circle packing P_T で、P_T の contact graph (nerve) が $T^{(1)}$ と組み合わせ的同値なものが、Möb の元での共役を除き一意に存在することが知られている (He-Schramm)

そこで、

$$T: \text{hyperbolic} \Leftrightarrow P_T \text{ の carrier が } U$$

$$T: \text{parabolic} \Leftrightarrow P_T \text{ の carrier が } \mathbb{C}$$

とする。

この定義は T に対しては直接的でない。そこで、T から得られる criterion を述べる。まず、

<u>定義</u>　X : 可算集合

Γ : X の部分集合 ($\neq \phi$) の族 ($\neq \phi$)

m : X 上の metric

$\Leftrightarrow m: X \to [0, +\infty)$

に対し.

$$\mathrm{area}(m) = \|m\|^2 = \sum_{x \in X} m(x)^2$$

$A \subset X$ の m-length $L_m(A) = \sum_{x \in A} m(x)$

Γ の m-length : $L_m(\Gamma) = \inf_{A \in \Gamma} L_m(A)$

Γ の extremal length

$$EL(\Gamma) = \sup_m \left\{ \frac{L_m(\Gamma)^2}{\mathrm{area}(m)} \right\}$$

$$(m : 0 < \mathrm{area}(m) < +\infty)$$

一般に. 局所有限・連結単純無限 graph G に対し.

$$V = \{ v : G \text{ の vertex} \}$$

$$E = \{ e : G \text{ の edge} \}$$

また G 内の path γ に対し.

$$V(\gamma) = \{ v \in V : \gamma \text{ の vertex} \}$$

$$E(\gamma) = \{ e \in E : \gamma \text{ の edge} \}$$

とする。次に $v \in V$ を固定して.

$$\Gamma(\{v\}, \infty) = \{ \gamma : \text{始点 } v \text{ で transient} \}$$

という path family を考え.

定義 $EEL(\{v\},\infty) = EL(\{E(\gamma) : \gamma \in \Gamma(\{v\},\infty)\})$

$VEL(\{v\},\infty) = EL(\{V(\gamma) :$ 〃 $\})$

とおき、それぞれ edge extremal length, vertex extremal length という。

定義 T : VEL-parabolic $\Leftrightarrow VEL(\{v\},\infty) = +\infty$

T : EEL-parabolic $\Leftrightarrow EEL(\{v\},\infty) = +\infty$

定理 (He-Schramm)

T : parabolic $\Leftrightarrow$ T : VEL-parabolic

さらに一般に局所有限 graph G に対し、

G : EEL-parabolic $\Rightarrow$ G : VEL-parabolic

で、G が bounded valence なら逆も成り立つ

より幾何学的には、三角形分割 T を多様体として実現すればよい。各2単体を単位正三角形とみなして得られる多様体を $|T|$ とすると、

定理 (Rodin-Sullivan)

T が bounded valence のときは、

T : hyperbolic $\Leftrightarrow$ $|T|$ と U が等角同値

一方. $K \geqq 1$ に対し. $f : |T| \to |T|$ が. coarse K-quasi-isometry (K-cqi) とは.

$$\frac{d(u,v)}{K} - K \leqq d(f(u), f(v)) \leqq K d(u,v) + K$$
$$(u, v \in |T|)$$

かつ. $\forall w \in |T|$ に対し.

$$d(w, f(u)) \leqq K$$

なる $u \in |T|$ が存在することを言う.

さらに. $|T|$ が coarsely quasi-homogeneous (cqh) であるとは. $\exists K \geqq 1$, $\forall u, v \in |T|$,

$$\exists f : K\text{-cqi}, |T| \to |T| \text{ s.t. } f(u) = v$$

<u>定理</u> (He)

T : hyperbolic, bounded valence

$|T|$: cqh

$\Rightarrow$ $|T|$ から双曲平面 H^2 への標準写像は quasi-isometry

以下. この定理の証明を述べる。

まず、次の主張は容易

<u>補題1</u>　T : hyperbolic, bdd valence $(\leq M)$

$\mathcal{P}_T$: Tに対応する CP

$\Rightarrow$ $^\exists C(M)$ s.t. $\mathcal{P}_T$ の任意の円の双曲半径が $C(M)$ より小さい

pf)　$\mathcal{P}_T$ 内の円 C に対し、中心 0 としてよいが、C の半径 $\to 1$ $\Rightarrow$ C に接する円の鎖は無限に長くなる　//

そこで同上の仮定の下でさらに

<u>定理</u>　$|T|$: cgh

$\Rightarrow$ $^\exists r > 0$ s.t. $\mathcal{P}_T$ 内の $^\forall$円の双曲半径が r より小さくない

を示せばよいが、このためには、U から円板 $\overline{C}$ を除いた二重連結領域の modulus $m(C)$ が有界であることを示せばよい。すなわち、$C_0 \in \mathcal{P}_T$ を固定するとき

$$m(C_0^*) \leq M \cdot m(C_0)$$

が任意の $c_0^* \in \mathcal{P}_T$ に対し成り立つような M が存在することを示す.

補題 2　$u, v \in |T^{(1)}|$ に対し.

$d(u, v)$: u, v 間の $|T^{(1)}|$ 上での距離

とすると. $(|T^{(1)}|, d)$, $(T^{(0)}, d)$, $|T|$ は互いに cqi である.

特に. (T^0, d) : cqh.

従って. $v_0, v_0^* \in T^{(0)} \longleftrightarrow c_0, c_0^* \in \mathcal{P}_T$ とすると. $\exists h : T^{(0)} \longrightarrow T^{(0)}$, K-cqi s.t.

$$h(v_0) = v_0^*$$

(K : v_0, v_0^* に依らない).

そこで. $c \in \mathcal{P}_T$ に対し. その k-近傍 (k 世代以下の円の集合) を $N_k(c)$ とするとき.

補題 3　$c_1, c_2 \in \mathcal{P}_T$: 接する, $c_2 \neq c_0$

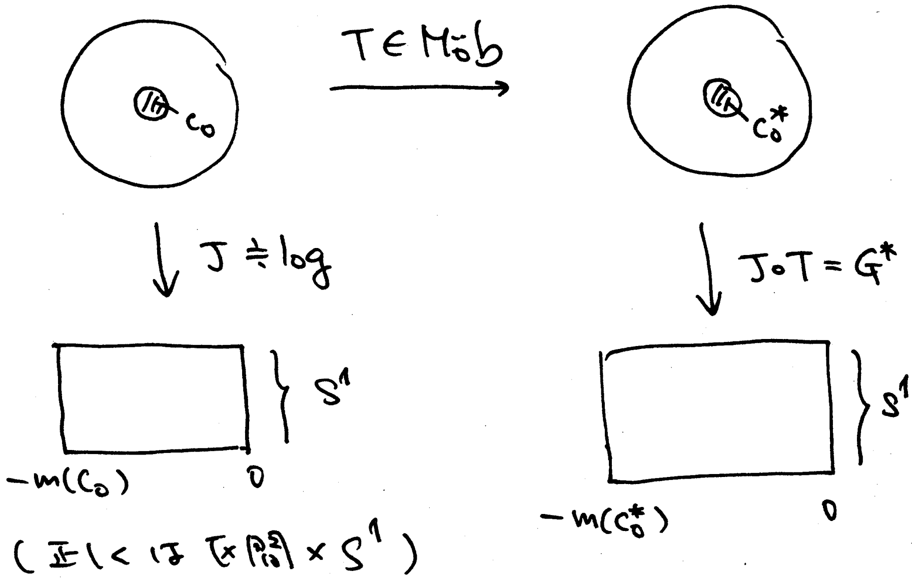
$$E(c^*) = \cup \{ N_{2\ \ +1}(c^*) \setminus c_0^* \}$$

$\Rightarrow$ $E(h(c_2))$ は $h(c_1), h(c_2)$ を含む

pf)　c_1, c_2 : 接する $\Rightarrow$ $h(c_2) \in N_{2K}(h(c_1))$ //

さて、C_0, C_0^* の中心を Möb でそれぞれ 0 に移し、

log で写して、「長方形」で考える。



__補題4__ $C \neq C_0 \Rightarrow \mathrm{diam}^2(J(C)) \leqq c \cdot \mathrm{area}(J(C))$

$C^* \neq C_0^*$ でも同様で、かつ c は絶対定数にとれる。

pf) $C \neq C_0$ ならば

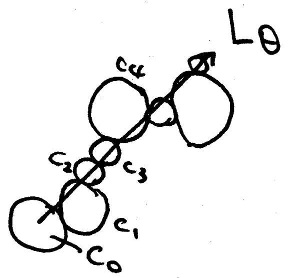
$$C\text{の半径} \leqq \tilde{c} \cdot \mathrm{dist}(0, C)$$

となる絶対定数 $\tilde{c}$ が存在する。

あとは、具体的な写像の形から、微分を評価できる。 //

そこで各 $\theta \in S^1$ に対応する放射線を L_θ とし．
L_θ に沿う円鎖を $\{c_0, c_1, \dots, c_n, \dots\}$ $(c_n \to \partial U)$
とする

補題3より



$$\bigcup_{j \geq 1} E(h(c_j))$$

は $U \setminus \overline{c_0^*}$ 内で c_0^* と ∂U を
結ぶ連続体となるから

$$m(c_0^*) \leq \sum_{\substack{c \neq c_0 \\ c \cap L_\theta \neq \phi}} \operatorname{diam}(G^*(E(h(c))))$$

θで積分して．Schwarz を使うと．

$$\{2\pi m(c_0^*)\}^2 \leq \Big\{\sum_{c \neq c_0} \operatorname{diam}(G^*(E(h(c)))) \times \operatorname{diam}(G(c))\Big\}^2$$

$$\leq \sum_{c \neq c_0} \operatorname{diam}^2(G^*(E(h(c)))) \cdot \sum_{c \neq c_0} \operatorname{diam}^2(G(c))$$

ここで bdd-valency より．

$$\#\{\tilde{c} \in E(h(c))\} : \text{bdd}$$

さらに．h : K-qi より．$\forall c^* \neq c_0^*$ に対し

$$\#\{E(h(c)) : c^* \in E(h(c))\} : \text{bdd}$$

がわかる。

従って、 $^{\exists} c' > 0$ s.t.

$$\sum_{c \neq c_0} \mathrm{diam}^2(G^*(E(h(c)))) \leq c' \sum_{c \neq c_0} \mathrm{diam}^2(G^*(c^*))$$

従って、補題4より、

$$4\pi^2 m(c^*)^2 \leq 4\pi^2 c^2 c' \, m(c^*) \cdot m(c)$$

が得られる。 ///

References

[1] Z. He, Coarsely quasi-homogeneous circle packings in the hyperbolic plane, Michigan Math. J. 41 (1994) 175 - 180.

[2] Z. He and O. Schramm, Hyperbolic and parabolic packings, preprint.

[3] J. W. Cannon, The theory of negatively curved spaces and groups, "Ergodic theory, sympolic dynamics, and hyperbolic spaces", 1991, Oxford Univ. Press.

[4] W. Woess, Random walks on infinite graphs and groups, Bull. London Math. Soc. 26 (1994), 1-60.