

Microdifferential Equations with Non-Involutive Factors

防大 打越敬祐 (Keisuke Uchikoshi)

§0. 序文

この論説文で考えるテーマを最も典型的な例で説明する. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ は 3 つの相異なる実数とし, $Q_j = D_1 + \alpha_j x_1 D_n, 0 \leq j \leq 2$ とする.

$\overset{\circ}{x}^* = (0; 0, \dots, 0, \sqrt{-1})\infty \in \sqrt{-1}\mathbb{S}^* \mathbb{R}^n$ において定義された擬微分作用素

$$(1) \quad P(x, D) = Q_0(x, D)Q_1(x, D)Q_2(x, D) + R(x, D), \quad \text{ord } R \leq 2$$

を考える. まず $Pu = 0$ のマイクロ関数解 u について佐藤の基本定理により $\text{supp } u \subset \bigcup_{j=0}^2 \{Q_j(x, \xi) = 0\}$ であるが,

Q1 $\text{supp } u \subset \{(x, \xi)\infty \in \sqrt{-1}\mathbb{S}^* \mathbb{R}^n; Q_0(x, \xi) = 0\}$
を満たす $Pu = 0$ の解 $u \neq 0$ が存在するか?

という問題を考えてみる.

$$\beta = \frac{\{\sigma_2(R), \xi_1 - \alpha_0 x_1 \xi_n\}(\overset{\circ}{x}^*)}{\sqrt{-1}(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)}$$

とおくとき, $\sigma_2(R)(\overset{\circ}{x}^*) = 0, \beta \notin \{-2, -3, -4, \dots\}$ であれば Q1 は否定的に解決される.

さて次に $f \in \mathcal{C}_{\overset{\circ}{x}^*}$ が

$$(2) \quad \text{supp } f \subset \{(x, \xi)\infty \in \sqrt{-1}\mathbb{S}^* \mathbb{R}^n; |(x, \xi_1 / |\xi|, \dots, \xi_{n-1} / |\xi|)| \leq C |(Q_0(x, \xi) / \xi)|\} \quad \exists C > 0$$

という条件を満たしているとする. $\text{supp } f$ は $\bigcup_{j=1,2} \{Q_j(x, \xi) = 0\}$ の方向を向いているのだから, 次の問題が考えられる:

Q2 $Qu = f$ および (2) を満たすマイクロ関数 u が存在するか?

こちらのほうは Q1 とは双対的な問題なのだが, $\sigma_2(R)(\overset{\circ}{x}^*) = 0, \beta \notin \mathbb{Z}_+$
 $= \{0, 1, 2, \dots\}$ という (先とは双対的な) 条件のもとで, 今度は肯定的に解決される. すなわち, ここで考えていることがらは, 解の特異性について, 第 1 に Q_0 方向への伝播に関する一意性の問題であり, 第 2 にそれ以外の方向への伝

播に関する可解性の問題である。いずれにせよ、ある意味で Q_0 方向へ特異性が伝播しないということになる。もっと一般的な条件のもとで、こういうことを本文の中で研究する。

§1. 主要結果

$A(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{o^*}$, $\text{ord } A \leq \ell (\ell < \infty)$ のとき $A(x, D)$ の完全表象を $\sigma(A)$ または単に $A(x, \xi)$ と書く。従って ξ について i 次斉次な $A_i(x, \xi)$ を用いて $\sigma(A) \sim \sum_{i \leq \ell} A_i(x, \xi)$ となるが、この $A_i(x, \xi)$ を $\sigma_i(A)(x, \xi)$ と書く (これは座標不変性をもたない)。 $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j)} = \{A(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{o^*}; \text{ord } A \leq j \text{ かつ各 } \sigma_i(A) \text{ は } \overset{\circ}{x} \text{ において少なくとも } (2i - j)_+ \text{ 次の零点をもつ}\}$$

と定める (i.e., $A(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j)}$ とは $\sigma(A) \sim A_j + A_{j-1} + A_{j-2} + \dots$ であって右辺の各項が $\overset{\circ}{x}$ においてそれぞれ j_+ , $(j-2)_+$, $(j-4)_+$, \dots 次以上の零点をもつこと)。

この作用素族については [3, 4] を参照してほしい。次の事実も [3, 4] による。

補題 1. (i) $A(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(i)}$, $B(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j)} \implies A(x, D)B(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(i+j)}$.

(ii) $A(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j)} \implies A^\dagger(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j)}$.

(iii) $\overset{\circ}{x}$ の近傍で定義され、 $\omega_0(\overset{\circ}{x}) = \overset{\circ}{x}$ を満たす斉次シンプレティック変換 ω_0 に同伴する量子化接触変換 $\omega: \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{o^*} \rightarrow \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{o^*}$ に対して $\omega(\mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j)}) = \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j)}$.

この補題により以下の問題設定は接触不変な意味をもつ。

$Q_0(x, \xi)$ は $\overset{\circ}{x}$ の近くで定義された ξ について 0 次斉次な実正則関数であるとする (従って Q_0 は実際には $|(x, |\xi|^{-1}\xi) - \overset{\circ}{x}| \ll 1$ で定義されている)。さらに $Q_0(\overset{\circ}{x}) = 0$, $\text{grad } Q_0 \neq 0$ とする。

さて以下いつでも $0 \leq m_0 \leq m$ とし、 $\text{ord } P = m$ ($m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) を満たす $P(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{o^*}$ に対して次の条件を仮定する。

$$A1 \quad \begin{cases} P(x, D) = \sum_{0 \leq j \leq m_0} Q_0(x, D)^j P^{(j)}(x, D), \\ P^{(j)}(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j+m-m_0)}, \quad 0 \leq j \leq m_0. \end{cases}$$

$$A2 \quad \begin{cases} \overbrace{\{\dots\{\sigma_m(P^{(m_0)}), Q_0\}\dots, Q_0\}}^m \neq 0 \text{ であってしかも} \\ P^{(m_0)} \text{ は } \overset{\circ}{x} \text{ において } Q_0 \text{ 方向にマイクロ双曲形である.} \end{cases}$$

注意. ここで $Q_0(x, D)^j = \overbrace{Q_0(x, D) \cdots Q_0(x, D)}^j$ である。また $P^{(m_0)}$ が $\overset{\circ}{x}$ において Q_0 方向にマイクロ双曲形であるとは、 Q_0 を含む斉次実シンプレクティッ

ク座標 $(Q_0, \dots, Q_{n-1}; R_0, \dots, R_{n-1})$ に対して,

$$\begin{aligned} Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}, R_1, \dots, R_{n-1} \in \mathbf{R}, R_0 \notin \mathbf{R} \\ \implies \sigma_m(P^{(m_0)}) \neq 0 \end{aligned}$$

という意味である ([7] 参照).

ここまで述べたことを実例に基づいて説明しておく.

例. $Q_1(x, \xi), \dots, Q_\ell(x, \xi)$ は $\overset{\circ}{x}$ の近くで定義された実正則関数で ξ について 1 次斉次であって, $Q_j(\overset{\circ}{x}) = 0$, $\{Q_0, Q_j\} \neq 0$, $1 \leq j \leq \ell$ とする.

(i) 最も単純な $\ell = 1$ の場合, P はフックス形方程式である. A1, A2 を書き直すと,

$$\begin{cases} P(x, D) = \sum_{0 \leq j \leq m_0} Q_0(x, D)^j P^{(j)}(x, D) \\ P^{(j)}(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(j+m-m_0)}, \quad 0 \leq j \leq m_0 \\ P^{(m_0)}(x, D) = Q_1(x, D)^m \end{cases}$$

となる. これについては, [1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11] などの研究がある. しかしこの場合でさえこれらの文献中の仮定は A1, A2 よりもっと限定的な

$$P^{(k)}(x, D) = P^{(k)}(x, D) Q_1^{k+m-m_0}, \exists P^{(k)} \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}, 0 \leq k \leq m_0$$

というものである (これはレビ条件と呼ばれる). 後述する主要結果はフックス形方程式の理論をカバーする.

(ii) 次に $\ell = 2$ とする.

$$(3) \quad P(x, D) = Q_0(x, D)Q_1(x, D)Q_2(x, D) + R, \quad R(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}}^{(1)}$$

であればもちろん P は A1, A2 を満たす. これについて冒頭で述べた (そのときは $\text{ord } Q_0 = 1$ としていた).

もうひとつ, 最後の条件を付け加える. $P(x, D)$ の決定多項式 $I_P(s)$ を

$$\begin{aligned} I_P(s) &= \sum_{j=0}^{m_0} \frac{1}{(j+m-m_0)!} \overbrace{\{\sigma_{j+m-m_0}(P^{(j)}), Q_0\} \cdots, Q_0\}}^{j+m-m_0} (\overset{\circ}{x}) \\ &\quad \times (s+m-m_0)(s+m-m_0-1) \cdots (s-j+1) \end{aligned}$$

と定義する. $I_P(s) = 0$ の根 $s = s_1, \dots, s_m$ を P の特性指数と呼ぶ (実際には常に $s_j = -j$, $1 \leq j \leq m - m_0$ となる). そして

$$\text{A3} \quad s_j \notin \mathbf{Z}_+, \quad 1 \leq j \leq m$$

であるかまたは

$$\text{A3}^\dagger \quad s_j \notin \{-m+m_0-1, -m+m_0-2, \dots\}, \quad 1 \leq j \leq m$$

であると仮定する.

例. 先の例と同じ記号を使う. (i) の場合は特性指数は通常のものと同じ意味になる. (ii) の場合で, さらに $P(x, D)$ が (3) の形をしていれば,

$$I_P(s) = -(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_0)(s+1)s - \sqrt{-1}\{\sigma_1(R), Q_0\}(\overset{\circ}{x}^*)(s+1)$$

となるから,

$$s_1 = -1, s_2 = \frac{\{\sigma_2(R), Q_0\}(\overset{\circ}{x}^*)}{\sqrt{-1}(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_0)}$$

である.

主要結果は次の通りである.

定理 2. (i) $P(x, D)$ が A1, A2, A3[†] を満たしているとする. もし

$$u \in \mathcal{C}_{\overset{\circ}{x}^*}, Pu = 0, \text{supp } u \subset \{(x, \xi) \in \sqrt{-1}\mathbb{S}^* \mathbb{R}^n; Q_0(x, \xi) = 0\}$$

なら $u = 0$ である.

(ii) $P(x, D)$ が A1-A3 を満たしているとする. もし $f \in \mathcal{C}_{\overset{\circ}{x}^*}$ が条件 (2) を満たせば, やはり (2) を満たす $Pu = f$ の解 $u \in \mathcal{C}_{\overset{\circ}{x}^*}$ が存在する.

§2. 非局所積分作用素

定理 2 を示すため後述の非局所積分作用素環を用いる. その前にまず接触交換によって一般性を失うことなく $Q_0 = x_1$ としておく (こうしてよいという理由はすでに説明した). そのうえで §1 で述べた条件を書き直しておく:

$$\begin{aligned} \text{B1} \quad & \begin{cases} P(x, D) = \sum_{0 \leq j \leq m_0} x_1^j P^{(j)}(x, D), \\ P^{(j)}(x, D) \in \mathcal{E}_{\overset{\circ}{x}^*}^{(j+m-m_0)}, \quad 0 \leq j \leq m_0. \end{cases} \\ \text{B2} \quad & \begin{cases} P^{(m_0)}(x, D) = D_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} P^{(m_0, j)}(x, D') D_1^j \\ \text{は } \overset{\circ}{x}^* \text{ において } x_1\text{-方向にマイクロ双曲形である.} \end{cases} \end{aligned}$$

そしてさらに

$$\text{B3} \quad I_P(s) \neq 0, \quad s \in \mathbb{Z}_+$$

であるかまたは

$$\text{B3}^\dagger \quad I_P(s) \neq 0, \quad s \in \{-m + m_0 - 1, -m + m_0 - 2, \dots\}$$

であると仮定する. すると定理 2 (を精密化したもの) は次のように書き直される.

定理 3. (i) $P(x, D)$ が **B1**, **B2**, **B3**[†] を満たしているとする. このときもし $u \in \mathcal{C}_x^*$, $Pu = 0$ であってしかも

$$(4) \quad \text{supp } u \subset \{(x, \xi) \infty \in \sqrt{-1}\mathbf{S}^* \mathbf{R}^n; x_1 = 0\}$$

であれば $u = 0$ となる.

(ii) $P(x, D)$ が **B1-B3** を満たしているとする. このとき $f \in \mathcal{C}_x^*$ が

$$(5) \quad \text{supp } f \subset \{(x, \xi) \infty \in \sqrt{-1}\mathbf{S}^* \mathbf{R}^n; d(x, \xi) \leq C |x_1|\}, \quad \exists C > 0$$

を満たせば (5) および

$$Pu = f, [\partial_{x_1}^j u]_{x_1=0} = 0, 0 \leq j \leq m - m_0 - 1$$

を満たす $u \in \mathcal{C}_x^*$ が存在する.

さて次のようなマイクロ関数族と作用素族を考える.

定義 4. (i) (4)(resp. (5)) を満たす $u \in \mathcal{C}_x^*$ 全体を \mathcal{C}_K (resp. \mathcal{C}_L) と表わす.

(ii) 次の条件を満たす $k(x, y) \in (\mathcal{C}_{\mathbf{R}^{2n}})_{(x^*, -x^*)}$ 全体を \mathcal{E}_K と表わす:

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{supp } k(x, y) \subset \{ & (x, y, \xi, \eta) \infty \in \sqrt{-1}\mathbf{S}^* \mathbf{R}^{2n}; \\ & |x_j - y_j| \leq C |y_1|, \quad 1 \leq j \leq n, \\ & |\xi_j + \eta_j| / |(\xi, \eta)| \leq C |x_1|, \quad 2 \leq j \leq n, \\ & |\xi_1 + \eta_1| / |(\xi, \eta)| \leq C d(y, \xi)\}, \quad \exists C > 0. \end{aligned}$$

さらに $\mathcal{E}_L = \{k(-y, -x); k(x, y) \in \mathcal{E}_K\}$ と定める.

もちろん $\mathcal{E}_x^* \subset \mathcal{E}_K, \mathcal{E}_L$ である. 次の補題によって $\mathcal{E}_K, \mathcal{E}_L$ の元がある種の積分作用素になることがわかる. しかしこれらの作用素は (オペランドの特異スペクトルを増やすことがあるので) 超局所作用素ではない. しかも \mathcal{C}_x^* 全体に作用するわけでもない.

補題 5. (i) $k_1(x, y), k_2(x, y) \in \mathcal{E}_K$ (resp. \mathcal{E}_L) ならば $\int k_2(x, z) k_1(z, y) dz \in \mathcal{E}_K$ (resp. \mathcal{E}_L) は well-defined である. 従って $\mathcal{E}_K, \mathcal{E}_L$ は $\text{sp } \delta(x - y)$ を単位元とする環構造をもつ.

(ii) $u(x) \in \mathcal{C}_K$ (resp. \mathcal{C}_L) かつ $k(x, y) \in \mathcal{E}_K$ (resp. \mathcal{E}_L) であれば $\int k(x, y) u(y) dy \in \mathcal{C}_K$ (resp. \mathcal{C}_L) は well-defined である. 従って \mathcal{C}_K (resp. \mathcal{C}_L) は左 \mathcal{E}_K - (resp. 左 \mathcal{E}_L -) 加群の構造をもつ. さらに

$$(7) \quad \begin{aligned} & \text{supp } (\int k(x, y) u(y) dy) \\ & \subset \{(x, \xi) \infty \in \sqrt{-1}\mathbf{S}^* \mathbf{R}^n; \exists (y, \eta) \infty \in \text{supp } u, (x, y, \xi, -\eta) \infty \in \text{supp } k\} \end{aligned}$$

が成立する.

定理 3 は次の定理に帰着する :

定理 6. (i) もし $P(x, D)$ が B1, B2, B3[†] を満たせば $P(x, D)$ は \mathcal{E}_K の中で左逆元をもつ.

(ii) もし $P(x, D)$ が B1-B3 を満たせば $P(x, D)$ は \mathcal{E}_L の中で右逆元をもつ. より精密には

$$\int K_P(x, z) z_1^{m-m_0} \ell(z, y) dz = \text{sp } \delta(x - y)$$

を満たす $\ell(x, y) \in \mathcal{E}_L$ が存在する.

証明は [7] の方法を踏襲する. すなわち最初に x_1 についてテイラー展開を考えて有限伝播速度をもつ擬微分作用素と呼ばれる形式的パラメトリックスをつくる. これ自身は解析的汎関数 (i.e., ウルトラ超関数) としての意味しかもたない. しかしそのあと形式的パラメトリックスの定義関数に対して解析接続を考えれば上述の作用素としての意味が確定する. 詳細は [12] の中で発表する予定である.

参考文献

- [1] S. Alinhac, Branching of singularities for a class of hyperbolic operators, *Indiana Univ. Math. J.*, **27**(1978), 1027-1037.
- [2] K. Amano, Branching of singularities for degenerate hyperbolic operators and Stokes phenomena, *Proc. Japan Acad.*, **56**(1980), 206-209.
- [3] L. Boutet de Monvel, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**(1974), 585-639.
- [4] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, and B. Helffer, Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples, *Astérisque*, **34-35**(1976), 93-121.
- [5] A. Bove, J. E. Lewis, and C. Parenti, Propagation of singularities for Fuchsian operators, *Lecture Notes in Math.*, **984**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.
- [6] N. Hanges, Paramétrices and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics, *Indiana Univ. Math. J.*, **28**(1979), 87-97.

- [7] M. Kashiwara and T. Kawai, Microhyperbolic pseudodifferential operators I, *J. Math. Soc. Japan*, **27**(1975), 359-404.
- [8] S. Nakane, Propagation of singularities and uniqueness in the Cauchy problem at a class of doubly characteristic points, *Comm. Partial Differential Equations*, **6**(1981), 917-927,
- [9] T. Ôaku, A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities, *Invent. Math.*, **65**(1982), 491-525.
- [10] H. Tahara, Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, *Japan. J. Math.*, **5**(1979), 245-347.
- [11] K. Taniguchi and Y. Tozaki, A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, *Math. Japon.*, **25**(1980), 279-300.
- [12] K. Uchikoshi, Microdifferential equations with non-involutory factors, to appear.