数理解析研究所講究録
第 895 巻 1995 年 98-113

代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解 II

京大・総合人間学部　松木敏彦 (Toshihiko MATSUKI)

1 Introduction

G を reductive なリー群、σ, τ を G 上の 2 つの involution ($\sigma^2 = \tau^2 = id.$) とし、H, L を、

$$(G^\sigma)_0 \subset H \subset G^\sigma, \qquad (G^\tau)_0 \subset L \subset G^\tau$$

を満たす G の部分群とする。ただし、G^σ, G^τ はそれぞれ σ, τ に関する G の固定部分群、$(G^\sigma)_0$, $(G^\tau)_0$ はそれらの単位元を含む連結成分とする。

[8](,[7]) ではいくつかの典型的な例（G は代数群、$H = G^\sigma$、$L = G^\tau$）について両側剰余類分解

$$H\backslash G/L$$

の標準的代表元を与えた。そこで用いられた方法はすべて代数的であるので、基本的な例 $GL(p, \mathbb{F}) \times GL(n-p, \mathbb{F})\backslash GL(n, \mathbb{F})/GL(r, \mathbb{F}) \times GL(n-r, \mathbb{F})$ については任意の体 $\mathbb{F}$（非可換でもよい）について記述した。他の（2 次形式に関係する）例については、筆者の興味と能力によって $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の場合に限定したが、もっと一般に記述できると思われる。

本稿では、まず G が compact のときに、そして次に noncompact のときに、両側剰余類分解 $H\backslash G/L$ の構造の一般論についていくつかの例と共に述べる ([9])。

関連する研究としては、次のようなものがある。

(1) G が compact のときに、構造定理と Intertwining function (球関数の一般化) について [3]、compact 対称空間上の Radon 変換について [4]。

(2) G が noncompact のときに、等質空間上の調和解析について [5]、$G_{\mathbb{R}}\backslash G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の複素解析的性質について [2]、$H\backslash G/H$ の不変固有超関数について [1],[11] など、対称対の巾零共役類について [6],[10],[12] など。

(3) G が有限体、局所体などの上の代数群のとき、川中、宇沢などによる研究がある。

2 Compact case

G は compact とする。

$$\sigma\tau = \tau\sigma$$

のとき、$H\backslash G/L$ の構造は、[3] で研究されている。

<u>例 1</u>　$(G,H,L)=(O(2m),O(r)\times O(s),U(m))$ $(2m=r+s,\ s:\mathrm{odd},\ s<m)$

$$\sigma g=I_{r,s}gI_{r,s},\qquad \tau g=J_m g J_m^{-1},\qquad H=G^\sigma,\qquad L=G^\tau$$

$$I_{r,s}=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & -I_s\end{pmatrix},\qquad J_m=\begin{pmatrix} 0 & I_m\\ -I_m & 0\end{pmatrix}$$

のとき、τ のどんな共役 $\tau_x=\mathrm{Ad}\,(x)\tau\,\mathrm{Ad}\,(x)^{-1}$ を取っても、

$$\sigma_x\tau\neq\tau\sigma_x$$

である。

<u>証明</u>　$L_x=G^{\tau_x}$ とおく。$\sigma\tau_x=\tau_x\sigma$ と仮定すると、$\tau_x H=H,\ \sigma L_x=L_x$ であるから、

$$H/H\cap L_x,\qquad\qquad L_x/H\cap L_x$$

は共に対称空間である。ところが、$H=O(r)\times O(s),\ L_x\cong U(m)$ に対して、そのような $H\cap L_x$ は存在しない。(compact 対称空間の分類による。)　□

$(G,H,L)=(U(2m),U(r)\times U(s),Sp(m))$ のときも同様である。

$\mathfrak{g}$ を G のリー環とし、

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^\sigma\oplus\mathfrak{g}^{-\sigma}=\mathfrak{g}^\tau\oplus\mathfrak{g}^{-\tau}$$

を $\sigma,\ \tau$ に関する $+1,-1$ 固有空間分解とする。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{-\tau}$ の 1 つの極大可換部分空間とし、

$$A=\exp\mathfrak{a}$$

とおく。$\mathfrak{g}_s=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\ \mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}$ の center とすると、

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_s\oplus\mathfrak{z}$$

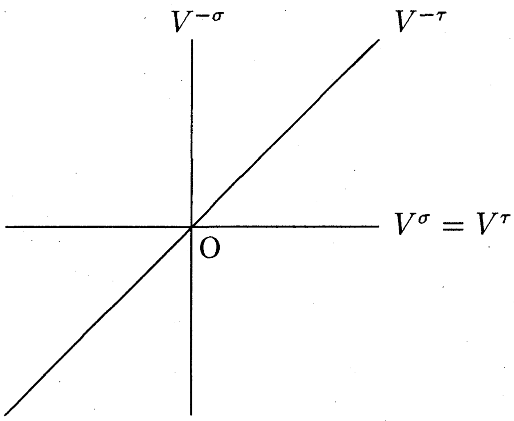
<u>定理 1</u>　$G=HG_0L$ で、$\sigma\tau|_{\mathfrak{z}}$ が semisimple のとき、

$$G=HAL$$

<u>Lemma 1</u>　$\sigma,\ \tau$ は実ベクトル空間 V の involution とする。$\sigma\tau$ が semisimple のとき、

$$V=(V^\sigma+V^\tau)\oplus(V^{-\sigma}\cap V^{-\tau})\qquad\qquad (2.1)$$

<u>例 2</u>　$V=\mathbb{R}^2$ とし、$V^\sigma,V^{-\sigma},V^\tau,V^{-\tau}$ が次の図のようになるように $\sigma,\ \tau$ を定義すると、(2.1) は成り立たない。($\sigma\tau$ は semisimple でない。)



<u>定理 1 の証明</u>　$x \in G^{\sigma\tau}$ のとき、

$$\sigma\tau(\sigma x) = \sigma(\tau\sigma)x = \sigma(\sigma\tau)^{-1}x = \sigma x$$

であるから、$\sigma x \in G^{\sigma\tau}$ である。よって、$\sigma G^{\sigma\tau} = G^{\sigma\tau}$ となり、$(G^{\sigma\tau}, G^{\sigma} \cap G^{\tau})$ は対称対である。$A \subset \exp(\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau})$ はこの対称対の maximal torus であるから、compact である。よって、

$$HAL \text{ は compact 。}$$

仮定により、HAL は G のすべての連結成分と交わるから、

$$HAL \text{ は open in } G$$

を示せばよい。

ある N があって $(\sigma\tau)^N|_{\mathfrak{g}_s} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}_s)$ であるから、$\sigma\tau|_{\mathfrak{g}_s}$ は semisimple である。よって、

$$\sigma\tau \text{ は semisimple 。}$$

Lemma 1 により、

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^{\sigma} + \mathfrak{g}^{\tau}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}) \tag{2.2}$$

である。$(G^{\sigma\tau}, H \cap L)$ は compact 対称対だから、

$$\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau} = \mathrm{Ad}\,(H \cap L)\mathfrak{a}$$

$$\therefore\quad HAL = H\exp(\mathrm{Ad}\,(H \cap L)\mathfrak{a})L = H\exp(\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau})L \tag{2.3}$$

(2.2), (2.3) により、HAL は単位元 e の近傍を含む。

H による左移動と L による右移動を考慮すれば、任意の $a \in A$ に対して HAL が a の近傍を含むことさえ示せばよい。よって、

$$HALa^{-1} = HA(aLa^{-1})$$

が e の近傍を含むことを示せばよい。$L_a = aLa^{-1}$, $\tau_a = \mathrm{Ad}(a)\tau\,\mathrm{Ad}(a)^{-1}$ とおこう。このとき、

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{g}^{-\tau} = \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_a}$$

であり、さらに

$$\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_a}$$

となる可換な $\mathfrak{a}'$ が存在すると仮定すると、同じ議論により、

$$\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathrm{Ad}(a)^{-1}\mathfrak{g}^{-\tau_a} = \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$$

となり、$\mathfrak{a}$ の仮定に反する。よって、$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_a}$ の極大可換部分空間であることが示された。従って H-L_a double coset HAL_a が e の近傍を含むことがわかる。 □

<u>注意</u>　$x \in G$ に対し、$L_x = xLx^{-1}$ とおく。写像

$$HgL \mapsto HgLx^{-1} = Hgx^{-1}L_x$$

により、2つの両側剰余類分解 $H\backslash G/L$ と $H\backslash G/L_x$ は自然に同一視できる。

<u>Weyl 群の一般化</u> (c.f. [3], Chapter 8)

$$\begin{aligned} N_A &= \{(h,\ell) \in H \times L \mid hA\ell^{-1} = A\} \\ Z_A &= \{(h,\ell) \in H \times L \mid ha\ell^{-1} = a \text{ for all } a \in A\} \\ J &= N_A/Z_A \end{aligned}$$

とおく。

<u>注意</u>　$(h,\ell) \in N_A$ のとき、

$$h\ell^{-1} = he\ell^{-1} \in A$$

$$\therefore\quad hAh^{-1} = hA\ell^{-1}(h\ell^{-1})^{-1} = A$$

よって、

$$J \cong \{(\mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{a}}, h\ell^{-1}) \mid h \in N_H(A),\ \ell \in L,\ h\ell^{-1} \in A\}$$

<u>例 3</u>　$H = L$ のとき、

$$J \cong W_H(A) \ltimes (A \cap H)$$

である。さらに、$H = G^\sigma$ ならば

$$A \cap H = \{a \in A \mid a^2 = e\}$$

であることに注意しよう。

<u>命題 1</u>　$W_H(A) = W_{H\cap L}(A)$ のとき、

$$J \cong W_H(A) \ltimes J_0$$

ただし $J_0 = Z_H(A)Z_L(A) \cap A$

<u>定理 2</u>　$G = HAL$ のとき、　$J\backslash A \cong H\backslash G/L$

<u>証明</u>　$a, b \in A$,

$$b = ha\ell^{-1} \quad \text{for some } h \in H,\ \ell \in L$$

のとき、

$$b = h'a\ell'^{-1}$$

となる $(h', \ell') \in N_A$ が存在することを示せばよい。

$A' = hA\ell^{-1}$ とおくと、$A' \ni b$,

$$\begin{aligned} A'b^{-1} &= hA\ell^{-1}b^{-1} = hAa^{-1}h^{-1} = hAh^{-1} \\ &= b\ell a^{-1}A\ell^{-1}b^{-1} = b\ell A(b\ell)^{-1} \end{aligned}$$

である。よって、$\mathfrak{a}' = \mathrm{Ad}\,(h)\mathfrak{a} = \mathrm{Ad}\,(b\ell)\mathfrak{a}$ が定義できて、

$$\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathrm{Ad}\,(b)\mathfrak{g}^{-\tau}$$

が成り立つ。一方、

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathrm{Ad}\,(b)\mathfrak{g}^{-\tau}$$

も成り立つので、$(G^{\sigma\tau_b}, H \cap bLb^{-1})$ が compact 対称対であることにより、

$$\mathrm{Ad}\,(x)\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$$

を満たす $x \in H \cap bLb^{-1}$ が存在する。$h' = xh \in H$, $\ell' = b^{-1}xb\ell \in L$ とおけば、

$$\begin{aligned} h'A\ell'^{-1} &= xhA\ell^{-1}b^{-1}x^{-1}b = xA'b^{-1}x^{-1}b = A \\ h'a\ell'^{-1} &= xha\ell^{-1}b^{-1}x^{-1}b = xbb^{-1}x^{-1}b = b \end{aligned} \qquad \square$$

<u>root 系</u>　$\alpha \in i\mathfrak{a}^*$ に対し、

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Y, X] = \alpha(Y)X \text{ for all } Y \in \mathfrak{a}\}$$

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}) = \{\alpha \in i\mathfrak{a}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

とおくと、root space 分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \oplus_{\alpha \in \Sigma \cup \{0\}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha)$$

が成り立つ。ここで、$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{\sigma\tau}$ に注意すれば、さらに

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) &= \oplus_{|\lambda|=1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) \\ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) &= \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \sigma\tau X = \lambda X\} \end{aligned}$$

と固有空間分解できる。

命題 2　Σ は root 系の公理を満たす。

例 4　$(G, H, L) = (U(n, \mathbb{F}), U(p, \mathbb{F}) \times U(q, \mathbb{F}), U(r, \mathbb{F}) \times U(s, \mathbb{F}))$　$(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$

$$n = p + q = r + s, \qquad r \geq p \geq q \geq s$$

とし、

$$\sigma g = I_{p,q} g I_{p,q}, \qquad \tau g = I_{r,s} g I_{r,s}, \qquad H = G^{\sigma}, \qquad L = G^{\tau}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; h_1 \in U(p, \mathbb{F}), h_2 \in U(q, \mathbb{F}) \right\}, \\ L &= \left\{ \begin{pmatrix} \ell_1 & 0 \\ 0 & \ell_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \ell_1 \in U(r, \mathbb{F}), \ell_2 \in U(s, \mathbb{F}) \right\} \end{aligned}$$

となる。このとき、$\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を次のように取る。

$$\mathfrak{a} = \left\{ Y(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \begin{pmatrix} & 0 & d(\theta_1, \ldots, \theta_s) \\ & & 0 & \\ -d(\theta_1, \ldots, \theta_s) & & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta_1, \ldots, \theta_s \in \mathbb{R} \right\}$$

ただし

$$d(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_s \end{pmatrix}.$$

$e_j \in i\mathfrak{a}^*$ を

$$e_j : Y(\theta_1, \ldots, \theta_s) \mapsto i\theta_j$$

で定義すると、$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a})$ は次の Σ_{max} (BC_s-型) に含まれる。

$$\Sigma_{max} = \{\pm e_j \pm e_k \mid 1 \leq j < k \leq s\} \cup \{\pm e_j \mid 1 \leq j \leq s\} \cup \{\pm 2e_j \mid 1 \leq j \leq s\}$$

$G^{\sigma\tau} \cong U(p+s,\mathbb{F}) \times U(q-s,\mathbb{F})$ であるから、$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$ は容易に計算できて、次の表で与えられる。

$\lambda \backslash \alpha$	$\pm e_j \pm e_k$	$\pm e_j$	$\pm 2e_j$
1	c	$c(p-s)$	$c-1$
-1	0	$c(q-s)$	0

ただし、

$$c = \begin{cases} 1 & (\mathbb{F}=\mathbb{R}) \\ 2 & (\mathbb{F}=\mathbb{C}) \\ 4 & (\mathbb{F}=\mathbb{H}) \end{cases}$$

また、$W_H(A) = W_{H\cap L}(A)$ であるので、命題 1 により $J \cong W_H(A) \ltimes J_0$ となり、この場合

$$J_0 = Z_H(A)Z_L(A) \cap A = \{a \in A \mid a^2 = e\}$$

となる。

同様にして、$\mathfrak{g}_s$ が古典型単純リー環の場合に、すべての $(\mathfrak{g}_s,\sigma,\tau)$ を分類し、それぞれについて 1 つの標準的な (G,H,L) を選んで、$\Sigma_{max}, W, \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda), J$ を求めると、次の表のようになる。($\sigma=\tau$ の場合は省略した。$\Sigma, \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$ は $(\mathfrak{g}_s,\sigma,\tau)$ によって決まるが、W, J は G の取り方と H, L の連結成分の取り方によって、多少変化し得る。このような細かい変化も重要なはずだが、後の研究にゆだねたい。)

type	$\mathbb{F}$	$\begin{pmatrix} G \\ H \\ L \end{pmatrix}$	$\Sigma_{max},\ W$	$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}},\alpha,\lambda)$	N
BDI − I AIII − III CII − II	$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{H}$	$\begin{pmatrix} U(n,\mathbb{F}) \\ U(p,\mathbb{F}) \times U(q,\mathbb{F}) \\ U(r,\mathbb{F}) \times U(s,\mathbb{F}) \end{pmatrix}$	BC_s	$\begin{pmatrix} c & c(p-s) & c-1 \\ 0 & c(q-s) & 0 \end{pmatrix}$	2
AI − III CI − II	$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} U(n,\mathbb{F}') \\ U(n,\mathbb{F}) \\ U(r,\mathbb{F}') \times U(s,\mathbb{F}') \end{pmatrix}$	BC_s	$\begin{pmatrix} c & c(r-s) & c-1 \\ c & c(r-s) & c \end{pmatrix}$	4
DI − III AIII − II	$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} U(2m,\mathbb{F}) \\ U(r,\mathbb{F}) \times U(s,\mathbb{F}) \\ U(m,\mathbb{F}') \end{pmatrix}$	$\mathrm{BC}_{s'}$ $(s' = \left[\frac{s}{2}\right])$	$\begin{pmatrix} 2c & c(r-s) & 2c-1 \\ 2c & c(r-s) & c-1 \\ 0 & 2c\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$	4
AI − II		$\begin{pmatrix} U(2m) \\ O(2m) \\ Sp(m) \end{pmatrix}$	A_{m-1}	$\begin{pmatrix} 2 & - & - \\ 2 & - & - \end{pmatrix}$	4

$\mathrm{DIII}-\mathrm{III}'$		$\begin{pmatrix} SO(4m) \\ U(2m) \\ I'U(2m)I' \end{pmatrix}$ $(I'=I_{4m-1,1})$	BC_{m-1}	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathrm{DI}-\mathrm{I}'$ $\begin{pmatrix} p,r= \\ 5 \text{ or } 7 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \pi(SO(8)) \\ \pi(SO(p)\times SO(q)) \\ \kappa\pi(SO(r)\times SO(s)) \end{pmatrix}$	$p=r=5$ のとき G_2 $\begin{pmatrix} \text{その他は} \\ A=\{e\} \end{pmatrix}$	$\begin{array}{ccc} & \text{short} & \text{long} \\ 1 & 1 & 1 \\ \pm\omega & 1 & 0 \end{array}$	2

ここで、

$$\mathbb{F}'=\begin{cases} \mathbb{C} & (\mathbb{F}=\mathbb{R}) \\ \mathbb{H} & (\mathbb{F}=\mathbb{C}) \end{cases} \qquad c=\begin{cases} 1 & (\mathbb{F}=\mathbb{R}) \\ 2 & (\mathbb{F}=\mathbb{C}) \\ 4 & (\mathbb{F}=\mathbb{H}) \end{cases}$$

$p+q=r+s=n\,(=2m),\qquad r\geq p\geq q\geq s,\qquad \varepsilon=s-2s'=\begin{cases} 0 & (s\text{ :even}) \\ 1 & (s\text{ :odd}) \end{cases},\qquad \omega^3=1,$

$\pi: SO(8)\to SO(8)/\{\pm I\}\cong \mathrm{Ad}\,(SO(8))$, κ は $\pi(SO(8))$ の位数 3 の外部自己同型。

DI-I' 型以外の $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$ の配列は、

$$\begin{array}{c|c} \lambda \backslash \alpha & \pm e_j \pm e_k \quad \pm e_j \quad \pm 2e_j \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ (\pm i) \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array}$$

また、$J=W\ltimes J_0$,

$$J_0=\{a\in A \mid a^N=e\}$$

である。

<u>$\sigma\tau_x$ の固有値</u>　$x\in G$, $\tau_x=\mathrm{Ad}\,(x)\tau\,\mathrm{Ad}\,(x)^{-1}$ とするとき、$\sigma\tau_x$ の固有値を調べる。(G,H,L) が定理 1 の仮定を満たすとすると

$$x=ha\ell \qquad (h\in H, a\in A, \ell\in L)$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} \sigma\tau_x &= \sigma\,\mathrm{Ad}\,(ha\ell)\tau\,\mathrm{Ad}\,(ha\ell)^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}\,(h)\sigma\,\mathrm{Ad}\,(a)\tau\,\mathrm{Ad}\,(a)^{-1}\,\mathrm{Ad}\,(h)^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}\,(h)\sigma\tau\,\mathrm{Ad}\,(a)^{-2}\,\mathrm{Ad}\,(h)^{-1} \end{aligned}$$

よって、$\sigma\tau\,\mathrm{Ad}\,(a)^{-2}$ の固有値を調べればよい。$0\neq X\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$ のとき、

$$\sigma\tau\,\mathrm{Ad}\,(a)^{-2}X=\sigma\tau a^{-2\alpha}X=\lambda a^{-2\alpha}X$$

(ただし、$A \ni a \mapsto a^\alpha \in U(1)$ は $\alpha : \mathfrak{a} \to i\mathbb{R}$ から決まる準同型) であるから、$\lambda a^{-2\alpha}$ は $\sigma\tau_x$ の 1 つの固有値である。

注意(例 1 の再考)　$(G, H, L) = (O(2m), O(r)\times O(s), U(m))$ or $(U(2m), U(r)\times U(s), Sp(m))$ について、s :odd, $s < m$ とする。表の DI-III,AIII-II 型のところを見ると、$\alpha = \pm e_j$ のとき、

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \lambda = \pm 1, \pm i$$

よって、

$$\{\sigma\tau_x \text{ の固有値 }\} \supset \{\pm a^{-2\alpha}, \pm i a^{-2\alpha}\} \not\subset \{\pm 1\}$$

$$\therefore \quad (\sigma\tau_x)^2 \neq \mathrm{id}. \qquad \sigma\tau_x \neq \tau_x\sigma$$

regular elements　$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) \neq \{0\}$ を満たす任意の $\alpha \neq 0$, λ に対して、

$$\lambda a^{-2\alpha} \neq 1$$

のとき、$x = ha\ell$ は regular であると言おう。明らかに次が成り立つ。

命題 3　x が regular $\Longleftrightarrow \mathfrak{g}^{\sigma\tau_a} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, 0) \Longleftrightarrow \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_a} = \mathfrak{a} \Longleftrightarrow \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_x}$ が可換

例 5　$G = G_1 \times \cdots \times G_1$ ($2n$ 個) とし、σ, τ を次で定義する。

$$\sigma(g_1, g_2, g_3, g_4, \ldots, g_{2n-1}, g_{2n}) = (g_2, g_1, g_4, g_3, \ldots, g_{2n}, g_{2n-1})$$

$$\tau(g_1, g_2, g_3, \ldots, g_{2n-2}, g_{2n-1}, g_{2n}) = (g_{2n}, g_3, g_2, \ldots, g_{2n-1}, g_{2n-2}, g_1)$$

このとき $\sigma\tau$ の位数は n である。$H = G^\sigma$, $L = G^\tau$ とおく。このとき、写像

$$H(g_1, \ldots, g_{2n})L \mapsto \{g g_1^{-1} g_2 \cdots g_{2n-1}^{-1} g_{2n} g^{-1} \mid g \in G_1\}$$

により

$$H\backslash G/L \cong \{\text{conjugacy classes in } G_1\} \qquad (2.4)$$

である。

(2.4) の証明

$$\begin{aligned}
H(g_1, \ldots, g_{2n})L &= H(g_1^{-1}, g_1^{-1}, e, \ldots, e)(g_1, \ldots, g_{2n})L \\
&= H(e, g_1^{-1}g_2, g_3, \ldots, g_{2n})L \\
&= H(e, g_1^{-1}g_2, g_3, \ldots, g_{2n})(e, g_2^{-1}g_1, g_2^{-1}g_1, e, \ldots, e)L \\
&= H(e, e, g_3 g_2^{-1} g_1, g_4, \ldots, g_{2n})L \\
&= H(e, e, e, g_1^{-1} g_2 g_3^{-1} g_4, g_5, \ldots, g_{2n})L \\
&= \cdots \\
&= H(e, \ldots, e, g_1^{-1} g_2 \cdots g_{2n-1}^{-1} g_{2n})L.
\end{aligned}$$

$g,\ g' \in G_1$ に対し、

$$(e,\dots,e,g') = h(e,\dots,e,g)\ell^{-1}$$

$$\text{for some } h=(h_1,\dots,h_{2n})\in H,\ \ \ell=(\ell_1,\dots,\ell_{2n})\in L$$

とすると、

$$\ell_{2n}=\ell_1=h_1=h_2=\ell_2=\ell_3=\cdots=\ell_{2n-2}=\ell_{2n-1}=h_{2n-1}=h_{2n}$$

$$\therefore\quad g' = h_{2n}g\ell_{2n}^{-1} = h_{2n}gh_{2n}^{-1}$$

逆に、$g'=x_1gx_1^{-1}$ $(x_1\in G_1)$ のとき、$x=(x_1,\dots,x_1)\in H\cap L$ とおくと

$$(e,\dots,e,g') = x(e,\dots,e,g)x^{-1} \qquad \square$$

$$\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{-\tau} = \{(-X,X,\dots,-X,X)\in\mathfrak{g}\mid X\in\mathfrak{g}_1\}$$

であるから、$\mathfrak{a}_1$ を $\mathfrak{g}_1$ の 1 つの極大可換部分環とするとき、

$$\mathfrak{a} = \{(-X,X,\dots,-X,X)\in\mathfrak{g}\mid X\in\mathfrak{a}_1\}$$

は $\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{-\tau}$ の極大可換部分空間である。

任意の $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{a})$ は、

$$\alpha(-X,X,\dots,-X,X) = \alpha_1(X) \quad \text{for} \quad X\in\mathfrak{a}_1$$

によって $\alpha_1\in\Sigma(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{a}_1)$ と同一視でき、

$$\dim\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha) = 2n$$

である。さらに、任意の 1 の n-乗根 λ に対し、

$$\dim\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda) = 2$$

である。

容易に

$$W_H(\mathfrak{a}) = W_L(\mathfrak{a}) = W_{H\cap L}(\mathfrak{a}) = \{(w,\dots,w)\mid w\in W_1\}\cong W_1$$

$(W_1 = N_{G_1}(A_1)/Z_{G_1}(A_1))$ であるから、$J\cong W_1\ltimes J_0$ であり、

$$\begin{aligned} Z_H(\mathfrak{a}) &= \{(a_1,\dots,a_{2n})\in A_1\times\cdots\times A_1\mid a_{2j-1}=a_{2j} \text{ for } j=1,\dots,n\},\\ Z_L(\mathfrak{a}) &= \{(a_1,\dots,a_{2n})\in A_1\times\cdots\times A_1\mid a_{2j}=a_{2j+1} \text{ for } j=1,\dots,n-1 \text{ and } a_{2n}=a_1\}, \end{aligned}$$

$$Z_H(\mathfrak{a})Z_L(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \ldots, a_{2n}) \in A_1 \times \cdots \times A_1 \mid a_1^{-1}a_2a_3^{-1}a_4 \cdots a_{2n-1}^{-1}a_{2n} = e\}$$

であるから

$$J_0 = Z_H(\mathfrak{a})Z_L(\mathfrak{a}) \cap A = \{(a^{-1}, a, \ldots, a^{-1}, a) \in A \mid a^{2n} = e\}$$

である。

G_1 が連結のとき、次の 4 つの全単射からなる可換図式がかける。

$$\begin{array}{ccc} J\backslash A & \xrightarrow{\sim} & W_1\backslash A_1 \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ H\backslash G/L & \xrightarrow{\sim} & G_1/\mathrm{conj.} \end{array}$$

ここで、縦の写像は inclusion map で与えられ、横の写像は (2.4) により

$$(g_1, \ldots, g_{2n}) \mapsto g_1^{-1}g_2 \cdots g_{2n-1}^{-1}g_{2n}$$

特に $J\backslash A \longrightarrow W_1\backslash A_1$ は

$$(a^{-1}, a, \ldots, a^{-1}, a) \mapsto a^{2n}.$$

によって与えられる。

3 Noncompact case

簡単のため、G は連結、半単純とする。

基本的考え方

$$G/L \ni gL \mapsto f_g = \sigma\tau_g = \sigma\,\mathrm{Ad}\,(g)\tau\,\mathrm{Ad}\,(g)^{-1} \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$$

により、HgL に対し、$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$ の中の $\mathrm{Ad}\,(H)$-共役類

$$\{\,\mathrm{Ad}\,(h)f_g\,\mathrm{Ad}\,(h)^{-1}\}$$

が対応する。

Jordan 分解

$$f_g = su = us$$

を $f_g \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$ の乗法的 Jordan 分解とすると、$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$ は代数群だから、

$$s,\ u \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}), \quad u = \exp\,\mathrm{ad}\,(-2X_u) \quad \text{for some nilpotent element } X_u \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。

命題 4　(i) $\sigma X_u = \tau_g X_u = -X_u$
(ii) $g_s = (\exp X_u)^{-1} g$ とおくと、$f_{g_s} = s$

証明　(i) $\sigma(su)\sigma = \sigma(\sigma\tau_g)\sigma = \tau_g\sigma = (\sigma\tau_g)^{-1} = (us)^{-1} = s^{-1}u^{-1}$

$$\therefore \quad \sigma s \sigma = s^{-1}, \quad \sigma u \sigma = u^{-1}, \quad \sigma X_u = -X_u$$

同様にして、$\tau_g X_u = -X_u$
(ii) $f_{g_s} = \sigma \operatorname{Ad}(g_s)\tau \operatorname{Ad}(g_s)^{-1} = \sigma \operatorname{Ad}(\exp X_u)^{-1}\tau_g \operatorname{Ad}(\exp X_u) = \sigma\tau_g \operatorname{Ad}(\exp 2X_u) = suu^{-1} = s$ □

命題 4 を用いて、容易に次の定理が得られる。

定理 3　(i) 任意の $g \in G$ は

$$g = (\exp X_u) g_s$$

(ただし、f_{g_s} は semisimple, X_u は $\mathfrak{g}$ の巾零元で $\sigma X_u = \tau_{g_s} X_u = -X_u$ を満たす。) と一意的に表せる。
(ii) $g = (\exp X_u) g_s$, $g' = (\exp X'_u) g'_s$ を g, $g' \in G$ の (i) における分解とする。
(a) $h \in H$, $\ell \in L$ に対し、

$$g' = hg\ell \iff g'_s = hg_s\ell \quad \text{and} \quad X'_u = \operatorname{Ad}(h) X_u$$

(b) $g_s = g'_s$ のとき、

$$g' \in HgL \iff X'_u \in \operatorname{Ad}(H \cap g_s L g_s^{-1}) X_u$$

注意　(ii) の (b) における $\operatorname{Ad}(H \cap g_s L g_s^{-1}) X_u$ は対称対 $(\mathfrak{g}^{\sigma\tau_{g_s}}, \mathfrak{g}^{\sigma} \cap \mathfrak{g}^{\tau_{g_s}})$ の巾零共役類である (c.f. [6],[10],[12] etc.)。

命題 5　HgL is closed in $G \iff g = g_s$

例 6 ([8])　$G = GL(n, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F}$ は標数 $\neq 2$ の体) とする。$\sigma g = I_{p,q} g I_{p,q}$, $\tau g = I_{r,s} g I_{r,s}$, $H = G^\sigma$, $L = G^\tau$ $(n = p + q = r + s)$ とすると、

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \middle| \ h_1 \in GL(p, \mathbb{F}),\ h_2 \in GL(q, \mathbb{F}) \right\}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \ell_1 & 0 \\ 0 & \ell_2 \end{pmatrix} \middle| \ \ell_1 \in GL(r, \mathbb{F}),\ \ell_2 \in GL(s, \mathbb{F}) \right\}$$

このとき、$g \in G,\ X \in \mathfrak{g}$ に対し、

$$f_g X = \sigma \operatorname{Ad}(g)\tau \operatorname{Ad}(g)^{-1} X = \operatorname{Ad}(I_{p,q} g I_{r,s} g^{-1})X$$

よって、$\tilde{f}_g = I_{p,q} g I_{r,s} g^{-1}$ とおけば、

$$f_g = \operatorname{Ad}(\tilde{f}_g)$$

である。従って、$f_g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ の Jordan 分解のかわりに $\tilde{f}_g \in GL(n, \mathbb{F})$ の Jordan 分解を考えればよい。

簡単な場合を考えてみよう。$p = q = r = s = 1$ とし、

$$g_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{g_s} &= I_{p,q} g_s I_{r,s} g_s^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -I_2 \end{aligned}$$

であり、$\tau_{g_s} = \tau = \sigma$ であるから

$$X_u \in \mathfrak{g}^{-\sigma} = \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_{g_s}}$$

となり、

$$g = (\exp X_u) g_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は定理 3 (i) の条件を満たす。この場合、g は群 G の元としては semisimple であり、$\exp X_u$ と g_s は可換でない。($\tilde{f}_g \in G$ の Jordan 分解は $\tilde{f}_g = \tilde{f}_{g_s} \exp(-2X_u) = \exp(-2X_u)\tilde{f}_{g_s}$ であるから、$\exp X_u$ は $\tilde{f}_{g_s}$ と可換である。)

<u>極分解</u>　$f_g = \sigma\tau_g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ は semisimple とする。f_g による $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の固有空間分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \oplus_{\lambda \in \mathbb{C}^\times} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}, \qquad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid f_g X = \lambda X\}$$

を用いて、線形写像 $k,\ p : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} kX &= \frac{\lambda}{|\lambda|} X \quad \text{for} \quad X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} \\ pX &= (\log|\lambda|) X \quad \text{for} \quad X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} \end{aligned}$$

容易に、次のことがわかる。

$$f_g = k \exp p = (\exp p)k, \qquad k \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), \qquad p \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}),$$

$$p = \mathrm{ad}(-2X_p) \quad \text{for some } X_p \in \mathfrak{g}$$

<u>命題 6</u>　(i) $\sigma X_p = \tau_g X_p = -X_p$
　(ii) $g_k = (\exp X_p)^{-1} g$ とおくと、$f_{g_k} = k$
(証明は命題 4 と同じ。)

<u>命題 7</u>　次の 3 条件を満たす $\mathfrak{g}$ の Cartan involution θ が存在する。

$$\sigma\theta = \theta\sigma, \qquad k\theta = \theta k, \qquad \theta X_p = -X_p$$

以下、次の条件を満たす Cartan involution θ が存在するとし、それを 1 つ固定する。

$$\sigma\theta = \theta\sigma, \qquad \tau\theta = \theta\tau$$

(一般に τ をその共役に取り替える必要がある。) $K = G^\theta$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\theta$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{-\theta}$, $G_{ss} = \{g \in G \mid f_g \text{ is semisimple}\}$ とおく。
命題 7 を用いて、容易に次の基本的な定理が証明できる。

<u>定理 4</u>　(i) G_{ss} に含まれる任意の H-L double coset は次の形の代表元を含む。

$$g = (\exp X_p) g_k$$

ただし、$g_k \in K$, $\sigma X_p = \tau_{g_k} X_p = \theta X_p = -X_p$
　(ii) $g = (\exp X_p) g_k$, $g' = (\exp X_p') g_k'$ を (i) の形の 2 つの元とする。
　(a) $g' \in HgL \iff g_k' = h g_k \ell,\ X_p' = \mathrm{Ad}(h) X_p$ for some $h \in K \cap H$, $\ell \in K \cap L$
　(b) $g_k = g_k'$ のとき、

$$g' \in HgL \iff X_p' \in \mathrm{Ad}(K \cap H \cap g_k L g_k^{-1}) X_p$$

<u>fundamental Cartan subset</u> (群の場合の fundamental Cartan subgroup の一般化)　$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}^{-\sigma} \cap \mathfrak{k}^{-\tau}$ の 1 つの極大可換部分空間とし、$T = \exp \mathfrak{t}$ とおく。$\mathfrak{c} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p})$ を $\mathfrak{t}$ を含む $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$ の 1 つの極大可換部分空間とし、$C = (\exp \mathfrak{a})T$ (a fundamental Cartan subset) とおく。

<u>直交系</u>　次のような "直交系" Q を考える。

$$Q = \{X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_k}\} \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$$

ただし、各 $j=1,\ldots,k$ に対し、$\alpha_j \in \mathfrak{c}^*_{\mathbb{C}}-\{0\}$, $\alpha_j(\mathfrak{a})=\{0\}$, $0\neq X_{\alpha_j}\in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{c},\alpha_j)$, $\sigma\tau X_{\alpha_j}=\lambda_j X_{\alpha_j}$ for some $\lambda_j\in U(1)$, $\sigma X_{\alpha_j}=-\overline{X_{\alpha_j}}$,

$$[X_{\alpha_j},X_{\alpha_\ell}]=[X_{\alpha_j},\sigma X_{\alpha_\ell}]=0 \quad \text{for} \quad j\neq \ell$$

standard Cartan subsets　このような直交系 Q に対し、

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_Q &= \mathfrak{a}\oplus \mathbb{R}(X_{\alpha_1}-\sigma X_{\alpha_1})\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}(X_{\alpha_k}-\sigma X_{\alpha_k})\\ T_Q &= \{t\in T \mid t^{2\alpha_j}=\lambda_j \text{ for } j=1,\ldots,k\}\\ C_Q &= (\exp\mathfrak{a})T_Q\end{aligned}$$

とおき、C_Q の各連結成分を standard Cartan subset と呼ぼう。

注意　fundamental Cartan subset C は可換だが、一般に standard Cartan subset C' は G の部分集合としては可換でない。($\{f_g \mid g\in C'\}$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の可換部分集合である。)

$$J_K=N_T^K/Z_T^K$$

を§2で定義した

$$J_K\backslash T\cong K\cap H\backslash K/K\cap L$$

となる群とする。2つの standard Cartan subset C_1, C_2 が J_K-共役とは、

$$C_2\cap T=h(C_1\cap T)\ell^{-1} \quad \text{for some } (h,\ell)\in N_T^K$$

であることとする。$\{C_i \mid i\in I\}$ を standard Cartan subsets の J_K-共役類の1つの完全代表系とする。

$$\begin{aligned}N_{C_i}^K &= \{(h,\ell)\in(K\cap H)\times(K\cap L) \mid hC_i\ell^{-1}=C_i\}\\ Z_{C_i}^K &= \{(h,\ell)\in(K\cap H)\times(K\cap L) \mid hg\ell^{-1}=g \text{ for all } g\in C_i\}\\ J_{C_i} &= N_{C_i}^K/Z_{C_i}^K\end{aligned}$$

とおき、$G_{rs}=\{g\in G_{ss} \mid \mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{-\tau_g}$ が可換 $\}$ とおく。

定理5　(i) $G_{ss}=\bigcup_{i\in I}HC_iL$

(ii) $G_{rs}=\bigsqcup_{i\in I}H(C_i\cap G_{rs})L$

(iii) $H\backslash G_{rs}/L\cong\bigsqcup_{i\in I}J_{C_i}\backslash(C_i\cap G_{rs})$

(iv) $H\backslash HCL/L\cong J_C\backslash C$　(C は fundamental Cartan subset)

系　G が complex で、σ, τ が正則のとき、

(i) $G_{ss}=HCL$

(ii) $H\backslash G_{ss}/L\cong J_C\backslash C$

(この場合、$J_C\cong J_K$ である。なぜならば、$(h,\ell)\in N_T^K$ のとき、$C=(\exp i\mathfrak{t})T$ だから $hC\ell^{-1}=(\exp i\,\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{t})hT\ell^{-1}=(\exp i\mathfrak{t})T=C$。)

References

[1] S. Aoki and S. Kato. $U(n,n)/GL(n,\mathbb{C})$ 上の不変固有超関数の接続公式について. In 数理解析研究所講究録 *855*, pages 78–100, 1993.

[2] S. Gindikin. On Stein extensions of real symmetric spaces. *Math. Ann.*, 286:1–12, 1990.

[3] B. Hoogenboom. *Intertwining functions on compact Lie groups.* PhD thesis, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983.

[4] T. Kakehi and C. Tsukamoto. Characterization of images of Radon transforms. *Advanced Studies in Pure Math.*, 22:101–116, 1993.

[5] T. Kobayashi. 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現論. In 数学 *46* 巻 *2* 号 , pages 124–143, 1994.

[6] B. Kostant and S. Rallis. Orbits and representations associated with symmetric spaces. *Amer. J. Math.*, 93:753–809, 1971.

[7] T. Matsuki. 代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解. In 数理解析研究所講究録 *855*, pages 64–77, 1993.

[8] T. Matsuki. Double coset decompositions of algebraic groups arising from two involutions I. to appear in Journal of Algebra.

[9] T. Matsuki. Double coset decompositions of algebraic groups arising from two involutions II. in preparation.

[10] T. Ohta. Classification of admissible nilpotent orbits in the classical real Lie algebras. *Journal of algebra*, 136:290–333, 1991.

[11] S. Sano. Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples $G_{\mathbb{C}}/G$. *J. Math. Kyoto University*, 31:377–417, 1991.

[12] J. Sekiguchi. Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. *J. Math. Soc. Japan*, 39:127–138, 1987.