

差分微分方程式に対する Chebyshev 近似解法

山梨大工 栗原光信 (Mitsunobu Kurihara)

山梨大工 油井誠志 (Seishi Yui)

0 序文

1966 年, *A.Halanay*[1] は, 次のような線形差分微分方程式の境界値問題を研究した.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t)x(t) + B(t)x(t-r) + f(t) \quad 0 < t \leq l \\ x(\theta) &= M\psi(l+\theta), \quad x(l+\theta) = N\psi(\theta) \quad -r \leq \theta \leq 0 \end{aligned}$$

ここで, $A(t), B(t)$ は, 閉空間 $[0, l]$ で連続な $n \times n$ 行列, M, N は, $n \times n$ 定数行列, $f(t)$ は, 閉空間 $[0, l]$ で連続な n 次元ベクトル関数である.

彼は, この境界値問題をある種の積分方程式に変換し, Fredholm の交代定理に相当する結果を導いている.

1976 年, *J.K.Hale*[2] は, 上記の結果を線形関数微分方程式に拡張した.

一方, 1966 年, *M.Urabe*[3][4] が, 常微分方程式に対する多点境界値問題への Chebyshev 近似解法の応用を発表した. ここでは, 直交多項式系であり, 一様ノルムについて, 準最良近似多項式でもある Chebyshev 多項式を用い, それらを基底関数とする Galerkin 法により近似解を求めている.

本研究は, *M.Urabe* の開発した手法を, 差分微分方程式の境界値問題に応用しようというものである. 本研究においては, 次のような差分微分方程式の境界値問題を考察する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= P(t)X(t) + Q(t)X(t-r) + F(t) \quad 0 \leq t \leq l \\ X(\theta) &= M\Psi(l+\theta), \quad X(l+\theta) = \Psi(\theta) \quad -r \leq \theta \leq 0 \end{aligned}$$

ここで, $P(t), Q(t), M$ は $n \times n$ の正方行列であり, $X(t), F(t), \Psi(\theta)$ は, n 次のベ

クトルである。更に、非線形差分微分方程式の境界値問題も考察する。

1 Chebyshev 多項式の諸性質

1.1 Chebyshev 多項式

Chebyshev 多項式 $T_n(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) を、関係式

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad x = \cos \theta, \quad n = 0, 1, \dots$$

で定義する。例えば、

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \dots$$

となる。多項式 $T_n(x)$ は、次の性質を満たす。

1. $T_n(x)$ は、 n 次の多項式で、 x^n の係数は、 2^{n-1} ($n \geq 1$) である。
2. $T_n(x)$ は、次の直交性を持つ。

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n = 0) \\ \frac{\pi}{2} & (m = n \geq 1) \end{cases}$$

3. 閉空間 $[-1, 1]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し、直交多項式系 $T_n(x)$ による Fourier 展開が可能である。

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_n a_n T_n(x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

ただし、

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos n\theta d\theta$$

$$u_n = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ \frac{1}{2} & (n = 0) \\ 1 & (n > 0) \end{cases}$$

また、この展開に対する Parseval の等式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n |a_n|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |f(\cos \theta)|^2 d\theta \end{aligned}$$

4. $T_n(x)$ は, n 個の相異なる実数の零点を持つ. 即ち, $T_n(x) = \cos n\theta = 0$ より,

$$x_j = \cos \theta_j, \theta_j = \frac{(2j-1)}{2n} \pi, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

5. 正整数 N をとる $T_N(x)$ の零点

$$x_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j := \frac{2j-1}{2N} \pi \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

を標本点とする. Fourier 係数

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos n\theta d\theta \quad (n \leq N-1)$$

の Gauss-Chebyshev 数値積分は

$$a_n \doteq \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(\cos \theta_j) \cos n\theta_j \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

と表される.

1.2 導関数の Chebyshev 多項式

関数 $f(t)$ を, 区間 $[-1, 1]$ 上で t に関して連続微分可能であると仮定する. そのとき, 関数 $f(t)$ の一階導関数は,

$$f'(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_n a'_n T_n(t)$$

と置くことができる. $' = \frac{d}{dt}$ である. このとき,

$$a'_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f'(\cos \theta) \cos n\theta d\theta$$

となる. それゆえ, $n \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} a'_{n-1} - a'_{n+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f'(\cos \theta) [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] d\theta \\ &= \frac{4n}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos n\theta d\theta \end{aligned}$$

を得, これは,

$$a'_{n-1} - a'_{n+1} = 2na_n$$

を導く。この式から、

$$\begin{aligned} a'_n - a'_{n+2} &= 2(n+1)a_{n+1}, & n \geq 0 \\ a'_{n+2} - a'_{n+4} &= 2(n+3)a'_{n+3}, \\ &\vdots \\ a'_{n+2p-2} - a'_{n+2p} &= 2(n+2p-1)a_{n+2p-1} \end{aligned}$$

を得、ゆえに、

$$\begin{aligned} a'_n &= 2[(n+1)a_{n+1} + (n+3)a_{n+3} + \cdots \\ &\quad + (n+2p-1)a_{n+2p-1}] + a'_{n+2p} \end{aligned}$$

を得る。Parseval の等式より、 $p \rightarrow \infty$ で $a'_{n+2p} \rightarrow 0$ となることから、

$$a'_n = 2 \sum_{p=1}^{\infty} (n+2p-1)a_{n+2p-1}, \quad n \geq 0$$

を得、この式は、次のように書き換えることができる。

$$a'_n = \sum_{s=0}^{\infty} u_{s-n} v_{s-n} a_s$$

ここで、

$$v_r = 1 - (-1)^r$$

である。

1.3 有限 Chebyshev 級数

Chebyshev 級数の $(m+1)$ 次以降を打ち切ったものを m 次有限 Chebyshev 級数と呼ぶ。関数 $f(t)$ を、 m 次までの有限 Chebyshev 級数とすると、関数 $f(t)$ は、次のように表される。

$$(1.1) \quad f(t) = \sum_{n=0}^m u_n a_n T_n(t)$$

公式

$$(1.2) \quad c_n = a_n + 2c_{n+1}t - c_{n+2}$$

より、

$$(1.3) \quad c_{m+1} = c_{m+2} = 0$$

から始めて、逐次的に c_n を計算をすることで、次の、 $f(t)$ の値を得ることができる。

$$f(t) = \frac{1}{2}(c_0 - c_2)$$

[証明] (1.2) を、以下のように再表記する。

$$a_n = c_n - 2c_{n+1}t + c_{n+2}$$

この式を、(1.1) に代入する。そのとき、

$$\begin{aligned} f(t) = f(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(c_0 - 2c_1 \cos \theta + c_2) \\ &\quad + (c_1 - 2c_2 \cos \theta + c_3) \cos \theta \\ &\quad + (c_2 - 2c_3 \cos \theta + c_4) \cos 2\theta \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad + (c_{m-2} - 2c_{m-1} \cos \theta + c_m) \cos(m-2)\theta \\ &\quad + (c_{m-1} - 2c_m \cos \theta) \cos(m-1)\theta \\ &\quad + c_m \times \cos m\theta \end{aligned}$$

となり、恒等式

$$\cos(n-2)\theta - 2\cos\theta\cos(n-1)\theta + \cos n\theta = 0$$

を先の式の斜線部に適用し、(1.3) を使うことで、

$$f(t) = \frac{1}{2}(c_0 - c_2)$$

を得る。

2 差分微分方程式

2.1 線形差分微分方程式の近似解法

次の線形差分微分方程式の境界値問題に対する Chebyshev 近似解法を考える。

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{X}(t) &= P(t)X(t) + Q(t)X(t-r) + F(t) \quad (0 \leq t \leq l) \\ X(\theta) &= M\Psi(\theta), \quad x(l+\theta) = \Psi(\theta) \quad (-r \leq \theta \leq 0) \end{aligned}$$

ここで、 $X(t), \Psi(t), F(t)$ は n 次のベクトルであり、 $P(t), Q(t)$ は $n \times n$ 行列、 M は、 $M = (M_{ij})$ の $n \times n$ の定数行列である。

Chebyshev 多項式 $T_n(x)$ の定義域 $-1 \leq x \leq 1$ に適合させるため、境界値問題の定義域を変換する。そのため、区間を $-r \leq \theta \leq 0$ と $0 \leq t \leq l$ の二つの区間に分け、それぞれを $-1 \leq \eta \leq 1$ と $-1 \leq \xi \leq 1$ に一次変換し、近似解法を適用する。

まず、 t を ξ を用いて変換する。 $t \in [0, l]$ を $\xi \in [-1, 1]$ に変換するため、 t と ξ の間には、次の関係が成立する。

$$t = \frac{2}{l}(\xi + 1)$$

そのため、

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX^* d\xi}{d\xi dt} = \frac{2 dX^*}{l d\xi}$$

となり、与えられた境界値問題 (2.1) の微分方程式は、

$$\frac{2 dX^*}{l d\xi} = A^*(\xi)X^*(\xi) + B^*(\xi)X^*(\xi - R) + F(\xi)$$

となる。ここで、 $R = 2r/l$ である。

次に、 $\theta \in [-r, 0]$ を $\eta \in [-1, 1]$ に変換する。そのとき、関係式

$$\theta = \frac{r}{2}(\eta + 1) - r$$

が成立し、境界条件は、以下のようになる。

$$X^*(-1) = M\Psi^*(1)$$

$$X^*(\xi - R) = M\Psi^*(\eta), \quad (\eta = \frac{l}{r}(\xi + 1) - 1)$$

$$X^*(\xi) = \Psi^*(\eta), \quad (\eta = \frac{l}{r}(\xi - 1) + 1)$$

以上をまとめると、与えられた境界値問題 (2.1) は、 ξ と η を用いて次のように書き換えられる。

$$(2.2) \quad \dot{X}^*(\xi) = P^*(\xi)X^*(\xi) + Q^*(\xi)\Phi^*(\xi) + F^*(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1)$$

$$P^*(\xi) = \frac{l}{2}P(t), \quad Q^*(\xi) = \frac{l}{2}Q(t), \quad F^*(\xi) = \frac{l}{2}F(t)$$

$$t = \frac{l}{2}(\xi + 1)$$

$$\Phi^*(\xi) = \begin{cases} M\Psi^*(\eta) & ; -1 \leq \xi \leq R-1 \\ X^*(\xi - R) & ; R-1 < \xi \leq 1 \end{cases}$$

$$\eta = \frac{l}{r}(\xi + 1) - 1$$

$$X^*(-1) = M\Psi^*(1)$$

$$X^*(\xi) = \Psi^*(\eta) \quad : \quad 1 - R \leq \xi \leq 1$$

$$\eta = \frac{l}{r}(\xi - 1) + 1$$

(2.1) の代わりに, (2.2) を用いて, 解を求める. また, 今後, 表記の簡単化のために, それぞれの項の * は, 省略して表記する.

求める解 $X(\xi)$ を

$$X(\xi) = \sum_{n=0}^m u_n x_n T_n(\xi)$$

とし, 未知関数 $\Psi(\eta)$ を

$$\Psi(\eta) = \sum_{n=0}^m u_n \psi_n T_n(\eta)$$

とし, $x_0, \dots, x_m, \psi_0, \dots, \psi_m$ を導く. $x_0, \dots, x_m, \psi_0, \dots, \psi_m$ は, n 次のベクトルである.

$P(\xi), Q(\xi), F(\xi)$ を Chebyshev 展開する.

$$P(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n p_n T_n(\xi)$$

$$Q(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n q_n T_n(\xi)$$

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n f_n T_n(\xi)$$

p_n, q_n, f_n は, 行列になる. ここでは, 計算上 m 次までの項で打ち切った Chebyshev 係数を用いる. $m+1$ 以降の係数は 0 行列とする.

さらに, $\Phi(\xi)$ の Chebyshev 展開した式を,

$$\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \phi_n T_n(\xi)$$

とする. 先の場合と同様に, m 次までの項で打ち切ったものを計算に用いる. $\Phi(\xi)$ は, $\Psi(\eta)$ と $X(\xi)$ を合成した関数であるから, Chebyshev 係数 ϕ_n , ($n = 0, 1, \dots, m$) は, 未知係数 x_n, ψ_n の一次結合で表すことができる.

(2.2) から次の決定方程式を得る.

$$(2.3) \quad \sum_{n=0}^m u_n x_n (-1)^n - M \sum_{n=0}^m u_n \psi_n = 0$$

$$(2.4) \quad \sum_{n=0}^m u_n x_n T_n(\xi) - \sum_{n=0}^m u_n x'_n T_n(\eta) = 0$$

$$(2.5) \quad P(\xi)X(\xi) + Q(\xi)\Phi(\xi) + F(\xi) = \sum_{n=0}^l (m-1)u_n x'_n T_n(\xi)$$

$$(2.6) \quad \dot{X}(\xi) = \sum_{n=0}^{m-1} u_n x'_n T_n(\xi)$$

まず, $P(\xi)X(\xi)$ を考える.

$$\begin{aligned} (2.7) \quad P(\xi)X(\xi) &= \sum_{r=0}^m u_r p_r T_r(\xi) \sum_{s=0}^m u_s x_s T_s(\xi) \\ &= \sum_{r,s} u_r u_s T_r(\xi) T_s(\xi) p_r x_s \\ &= \sum_{r,s} u_r u_s \cdot \frac{1}{2} [T_{r+s}(\xi) + T_{|r-s|}(\xi)] p_r x_s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} u_r u_s p_r x_s T_{r+s}(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{r,s} u_r u_s p_r x_s T_{|r-s|}(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^m u_{n-s} u_s p_{n-s} x_s \right) T_n(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m u_s^2 p_s x_s T_0(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^m u_{n+s} u_s p_{n+s} x_s \right) T_n(\xi) \quad (r-s=n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^m u_{s-n} u_s p_{s-n} x_s \right) T_n(\xi) \quad (s-r=n) \\ &= \frac{1}{2} [u_0^2 p_0 x_0 + \sum_{s=0}^m u_s^2 p_s x_s] T_0(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m [\sum_{s=0}^m (u_{n-s} u_s p_{n-s} \\ &\quad + u_{n+s} u_s p_{n+s} + u_{s-n} u_s p_{s-n}) x_s] T_n(\xi) \end{aligned}$$

を得る. (2.7) と同様の展開を $Q(\xi)\Phi(\xi)$ に対して実行する. (2.5) より, (2.7) を用いて,

$$\begin{aligned} x'_0 &= f_0 + \sum_{s=0}^m u_s p_s x_s + \sum_{s=0}^m u_s q_s \phi_s \\ x'_n &= f_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m (u_{n-s} u_s p_{n-s} + u_{n+s} u_s p_{n+s} + u_{s-n} u_s p_{s-n}) x_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m (u_{n-s} u_s q_{n-s} + u_{n+s} u_s q_{n+s} + u_{s-n} u_s q_{s-n}) \phi_s \\
& (n \geq 1)
\end{aligned}$$

この x'_0 が, x'_n ($n \geq 1$) に含まれるように x'_n を変形すると,

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m (u_{n-s} u_s p_{n-s} + u_{n+s} u_s p_{n+s} + u_{s-n} u_s p_{s-n} + u_{-n} u_{-s} p_s) x_s \\
& + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m (u_{n-s} u_s q_{n-s} + u_{n+s} u_s q_{n+s} + u_{s-n} u_s q_{s-n} + u_{-n} u_{-s} q_s) \phi_s \\
& + f_n \quad (n = 0, 1, \dots, m-1)
\end{aligned}$$

となる. (2.6) から,

$$\begin{aligned}
(2.8) \quad & \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m (u_{n-s} u_s p_{n-s} + u_{n+s} u_s p_{n+s} + u_{s-n} u_s p_{s-n} + u_{-n} u_{-s} p_s - 2u_{s-n} u_{s-n} s) x_s \\
& + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m (u_{n-s} u_s q_{n-s} + u_{n+s} u_s q_{n+s} + u_{s-n} u_s q_{s-n} + u_{-n} u_{-s} q_s) \phi_s = -f_n \\
& (n = 0, 1, \dots, m-1)
\end{aligned}$$

を得る.

次に, (2.4) について考える. 両式の左辺の各項は, ξ と η の異なった多項式となっている. しかし, 次の式を用いて, 多項式展開を行ない整理することが可能である.

$$\xi = \frac{r}{l}(\eta - 1) + 1$$

を用い, 例えば, (2.4) の初項に対して, $m = 3$ の場合,

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad & \sum_{n=0}^3 u_n x_n T_n(\xi) \\
&= \frac{1}{2} x_0(1) + x_1(\xi) + b_2(2\xi^2 - 1) + x_3(4\xi^3 - 3\xi) \\
&= \frac{1}{2} x_0 + \left(\frac{r}{l}(\eta - 1) + 1\right) x_1 + \left(2\left(\frac{r}{l}(\eta - 1) + 1\right)^2\right) x_2 \\
& \quad + \left(4\left(\frac{r}{l}(\eta - 1) + 1\right)^3 - 3\left(\frac{r}{l}(\eta - 1) + 1\right)\right) x_3 \\
&= \frac{r^3}{l^3} x_0(4\eta^3 - 3\eta) \\
& \quad + \left(\frac{r^2}{l^2} x_2 + \frac{6lr^2 + 6r^3}{l^3} x_3\right)(2\eta^2 - 1) \\
& \quad + \left(\frac{r}{l} x_1 + \frac{4rl - 4r^2}{l^2} x_2 + \frac{9l^2r - 24lr^2 + 15r^3}{l^3} x_3\right)(\eta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{l-r}{l}x_1 + \frac{l^2-4lr+3r^2}{l^2}x_2 + \frac{l^3-9l^2r+18lr^2-10r^3}{l^3}x_3 \right) (1) \\
& = \sum_{n=0}^3 u_n P_n(\alpha) T_n(\eta)
\end{aligned}$$

を, 得ることができる. ここで,

$$\begin{aligned}
P_0(\alpha) &= \frac{1}{2}x_0 + \frac{l-r}{l}x_1 + \frac{l^2-4lr+3r^2}{l^2}x_2 + \frac{l^3-9l^2r+18lr^2-10r^3}{l^3}x_3 \\
P_1(\alpha) &= \frac{r}{l}x_1 + \frac{4rl-4r^2}{l^2}x_2 + \frac{9l^2r-24lr^2+15r^3}{l^3}x_3 \\
P_2(\alpha) &= \frac{r^2}{l^2}x_2 + \frac{6lr^2+6r^3}{l^3}x_3 \\
P_3(\alpha) &= \frac{r^3}{l^3}x_0
\end{aligned}$$

であり, $\alpha = \text{col}(x_0, x_1, \dots, x_m)$ である. このように, 式(2.9)に関しては, m を固定することによって, 変数を η に統一することが可能である. ξ ではなく η に統一するのは, $\xi \in [1-R, 1]$ に対して, $\eta \in [-1, 1]$ の範囲が, Chebyshev 多項式の定義域と一致するためである. (2.4) に (2.9) の様な変形を適用すると,

$$(2.10) \sum_{n=0}^m u_n P_{xn}(\alpha) T_n(\eta) - \sum_{n=0}^m u_n \psi_{xn} T_n(\eta) = 0$$

となる. ここで,

$$\alpha = \text{col}(x_0, x_1, \dots, x_m)$$

である.

以上から, $2n(m+1)$ 個の未知数 $(x_0, x_1, \dots, x_m, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m)$ に対して, 式(2.3) から n 個, (2.8) より nm 個, (2.10) より, $n(m+1)$ 個の関係式を導き出す. 従って,

$$\sum_{s=0}^{4m+3} A_{ns} c_s = B_n \quad (n = 0, 1, \dots, 4m+3)$$

と表すことができる. ここで,

$$\begin{aligned}
c_s &= x_r \quad ; \quad (s = 0, 1, \dots, n(m+1) - 1) \\
& \quad ; \quad (r = 0, 1, \dots, m) \\
c_s &= \psi_r \quad ; \quad (s = n(m+1), n(m+1) + 1, \dots, 2n(m+1) - 1) \\
& \quad ; \quad (r = 0, 1, \dots, m)
\end{aligned}$$

である. すなわち, Gauss の消去法等を用いて, x_n, ψ_n を計算することは可能であり, 解 $X(\xi)$ と境界関数 $\Psi(\eta)$ を導くことができる.

2.2 非線形差分微分方程式の近似解法

次の非線形連立差分微分方程式の境界値問題についての近似解法を考える。

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= F[t, X(t), X(t-r)] \quad (0 \leq t \leq l) \\ X(\theta) &= M\Psi(\theta), \quad X(l+\theta) = \Psi(\theta) \quad (-r \leq \theta \leq 0) \end{aligned}$$

ここで, $F[t, X(t), X(t-r)]$ である. $X(t), \Psi(t)$ については, 線形の場合と同様である.

やはり, t の範囲が Chebyshev 多項式の定義域と異なるので, 線形の場合と同様の一次変換を行なうことで, 次の方程式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{X}(\xi) &= F[\xi, X(\xi), \Phi(\xi)] \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \\ \Phi(\xi) &= \begin{cases} M\Psi(\eta) & ; -1 \leq \xi \leq R-1 \\ X(\xi-R) & ; R-1 < \xi \leq 1 \end{cases} \\ \eta &= \frac{1}{r}(\xi+1) - 1 \\ X(-1) &= M\Psi(1) \\ X(\xi) &= \Psi(\eta) \quad ; 1-R \leq \xi \leq 1 \\ \eta &= \frac{1}{r}(\xi-1) + 1 \end{aligned}$$

ここで, $R = 2r/l$ であり, $\Phi(\xi)$ は, 線形の場合と同様に定義する.

やはり線形の場合と同様に, 求める解を

$$X(\xi) = \sum_{n=0}^m u_n x_n T_n(\xi)$$

とし, 未知関数 $\Psi(\eta)$ を

$$\Psi(\eta) = \sum_{n=0}^m u_n \psi_n T_n(\eta)$$

として, 未知係数 $x_0, x_1, \dots, x_m, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m$ を導く.

未定係数法により,

$$(2.11) \begin{cases} x'_n - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 F[\xi, X(\xi), \Phi_x(\xi)] T_n(\xi) \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0 \\ \sum_{n=0}^m u_n x_n (-1)^n - M \sum_{n=0}^m u_n \psi_n = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x \left(\frac{r}{l}(\eta-1) + 1 \right) T_n(\eta) \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta - \psi_n = 0 \\ (n = 0, 1, \dots, m) \end{cases}$$

となる。ここで、

$$x'_n = \sum_{s=0}^m u_{s-n} v_{s-n} x_s$$

である。

N を十分大にとり、次のような θ_i を定義する。

$$\theta_i := \pi - \frac{2i-1}{2N}\pi \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

これにより、 $\theta_1 \rightarrow \theta_N$ に対して、 $\cos \theta_i$ は、 -1 から、 1 の値をとる。先の式を用いて変形すると、

$$F_n[\alpha, \beta] := \sum_{s=0}^m u_{s-n} v_{s-n} s x_s - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f[\cos \theta_i, X(\cos \theta_i), \Phi(\cos \theta_i)] \cos n\theta_i$$

$(n = 0, 1, \dots, m-1)$

$$F_m[\alpha, \beta] := \sum_{n=0}^m u_n x_n (-1)^n - M \sum_{n=0}^m u_n \psi_n = 0$$

$$G_n[\alpha, \beta] := \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x \left(\frac{r}{l} (\cos \theta_i - 1) + 1 \right) \cos n\theta_i - \psi_n$$

$(n = 0, 1, \dots, m)$

となる。ここで、

$$\alpha = \text{col}(x_0, x_1, \dots, x_m)$$

$$\beta = \text{col}(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m)$$

である。さらに、

$$F[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} F_0[\alpha, \beta] \\ F_1[\alpha, \beta] \\ \vdots \\ F_m[\alpha, \beta] \end{pmatrix}, \quad G[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} G_0[\alpha, \beta] \\ G_1[\alpha, \beta] \\ \vdots \\ G_m[\alpha, \beta] \end{pmatrix}$$

と置くことにより、Chebyshev 係数 α, β を決定する方程式は、

$$\Phi[\alpha, \beta] := \begin{pmatrix} F[\alpha, \beta] \\ G[\alpha, \beta] \end{pmatrix} = 0$$

となる。ここで、Newton-Raphson 法により、

$$J[\alpha_p, \beta_p] h_p + \Phi[\alpha_p, \beta_p] = 0$$

となる。ここで、 $J[\alpha, \beta]$ は、 $\Phi[\alpha, \beta]$ の Jacobian 行列である。

$$J[\alpha, \beta] = \left[\frac{\partial \Phi[\alpha, \beta]}{\partial(\alpha, \beta)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_n}{\partial x_k} & \frac{\partial F_n}{\partial \psi_k} \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_k} & \frac{\partial G_n}{\partial \psi_k} \end{bmatrix}$$

$$h_p = \begin{pmatrix} \alpha_{p+1} \\ \beta_{p+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

この Jacobian 行列の各要素を考える。関数 $\phi(\xi)$ は、2つの関数から成り立っており、すなわち、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N F[\cos \theta_i, X(\cos \theta_i), \Phi(\cos \theta_i)] \cos n\theta_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_R} F[\cos \theta_i, X(\cos \theta_i), M\Psi(\frac{l}{r}(\cos \theta_i + 1) - 1)] \cos n\theta_i \\ & \quad + \sum_{N_{R+1}}^N F[\cos \theta_i, X(\cos \theta_i), X(\cos \theta_i - R)] \cos n\theta_i \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos \theta_{N_R} < R - 1 < \cos \theta_{N_{R+1}}$ である。以上から、行列の要素は、以下のように定まる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_n}{\partial x_k} &= u_{k-n} v_{k-n} k \\ & \quad - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_k} [\cos \theta_i, X(\cos \theta_i), \Phi(\cos \theta_i)] u_k \cos k\theta_i \cos n\theta_i \\ & \quad - \frac{2}{N} \sum_{N_{R+1}}^N \frac{\partial F}{\partial \psi_k} [\cos \theta_i, X(\cos \theta_i), X(\cos \theta_i - R)] u_k T_k(\cos \theta_i - R) \cos n\theta_i \\ \frac{\partial F_n}{\partial \psi_k} &= -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N_R} \frac{\partial F}{\partial \psi_k} [\cos \theta_i, x(\cos \theta_i), M\Psi(\frac{l}{r}(\cos \theta_i + 1) - 1)] \\ & \quad \times M u_k T_k(\frac{l}{r}(\cos \theta_i + 1) - 1) \cos n\theta_i \\ & \quad (n = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_m}{\partial x_k} &= u_k (-1)^k \\ \frac{\partial F_m}{\partial \psi_k} &= -M u_k \quad (k = 0, 1, \dots, m) \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_k} &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N u_k T_k(\frac{r}{l}(\cos \theta_i - 1) + 1) \cos n\theta_i \\ \frac{\partial G_n}{\partial \psi_k} &= -\delta_{nk} \\ & \quad (n = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, m) \end{aligned}$$

ここで, δ_{nk} は, Kronecker の δ 関数で,

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & ; n = k \\ 0 & ; n \neq k \end{cases}$$

である. これにより, この反復法を, コンピューターにおいて, 計算することができる.

2.3 解の存在定理と誤差評価

次の非線形差分微分方程式の境界値問題に対する解の存在定理を表す.

$$(2.12) \dot{x}(t) = F[t, x(t), x(t-r)] \quad (0 < t \leq l)$$

$$(2.13) x(\theta) = Mx(l+\theta) \quad (-r \leq \theta \leq 0)$$

今後, 以下のように表記する.

$$\begin{aligned} D(t) &: -r \leq t \leq l \text{ において開領域, } \subset R^N \\ D &:= \{(t, x) \mid -r \leq t \leq l, x \in D(t)\} \\ \Omega &:= \{(t, x, y) \mid 0 \leq t \leq l, x \in D(t), y \in D(t-r)\} \\ F(t, x, y) &: \Omega \text{ で } \begin{cases} t \text{ について連続} \\ x, y \text{ について連続微分可能} \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} \Phi(t, x, y) \\ \Psi(t, x, y) \end{array} \right\} &: x, y \text{ に関する } F(t, x, y) \text{ の Jacobian 行列} \end{aligned}$$

滑らかな関数 $F(t, x, y)$ に対して, $\Phi(t, x, y)$ と $\Psi(t, x, y)$ は, それぞれ, 関数 $F(t, x, y)$ の x と y に関しての Jacobian 行列とする. そのグラフ $(t, \hat{x}(t))$ が境界値問題 (2.12) と (2.13) の領域 D に存在する任意の解 $x = \hat{x}(t)$ に対して, 行列 $\Phi(t, x, y), \Psi(t, x, y)$ と M に関して H -写像 $\hat{H} : C[-r, 0] \rightarrow C[-r, 0]$ を定義することができ, $\hat{\mu}$ と $\hat{\nu}$ を線形作用素 $\hat{L} = I - A$ の指標を意味するものとすることができる. ここで, I は, Banach 空間 $C[-r, 0]$ における恒等作用素である. そのグラフ $(t, \hat{x}(t))$ が領域 D に存在する解 $x = \hat{x}(t)$ は, 先の指標が $\hat{\mu} = \hat{\nu} = 0$ を満足するならば, 孤立していると呼ばれる. 「孤立」という言葉は, 解 $x = \hat{x}(t)$ の十分に小さい近傍において, 孤立解 $x = \hat{x}(t)$ の他に解が存在していないという事実から来ている.

存在定理. $x = \bar{x}(t)$ を微分可能な関数とし, そのグラフ $(t, \bar{x}(t))$ が境界値問題 (2.12) と (2.13) の領域 D に存在するものとする. それは, $0 \leq t \leq l$ に対して $|\dot{\bar{x}}(t) - F[t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-r)]| \leq \varepsilon$ を, そして $-r \leq \theta \leq 0$ に対して $|\bar{x}(\theta) - M\bar{x}(l+\theta)| \leq \varepsilon$ を満

足する正定数 ε を持つ. 区間 $0 \leq t \leq l$ で, t の連続な行列 $A(t)$ と $B(t)$ が, そして次の条件を満足する定数 $\delta > 0$ と $0 \leq \kappa < 1$ が, 存在すると仮定する.

1. 指標 μ と ν は, 線形演算子 $L = I - H$ に対して $\mu = \nu = 0$ を満足する. ここで, H は, 行列 $A(t), B(t)$ そして M に関する H -写像である.
2. $D[\delta] = \{(t, x) : -r \leq t \leq l, |x - \bar{x}(t)| \leq \delta\} \subset D$
3. 領域 $\Omega[\delta] = \{(t, x, y) : 0 \leq t \leq l, |x - \bar{x}(t)| \leq \delta, |y - \bar{x}(t-r)| \leq \delta\} \subset \Omega$ において, 任意の (t, x, y) に対して, $|\Phi(t, x, y) - A(t)| \leq \kappa/\sigma_1$ と $|\Psi(t, x, y) - B(t)| \leq \kappa/\sigma_1$ となる.
4. $\frac{\varepsilon\sigma_2}{(1-\kappa)} \leq \delta$

ここで, $\gamma = \|(I - H)^{-1}\|_c, b = \max\{|B(t)| : 0 \leq t \leq l\}, m = |M|$, であり, そして, $X(t, s)$ が同次線形方程式 $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-r)$ の基本行列であるならば, $K = \max\{|X(t, s)| : (t, s) \in [0, l] \times [0, l]\}$ を表す. さらにまた,

$$\sigma_1 = 2Kl\gamma \max\{m(1+rb) + \gamma^{-1}, m, 1\}$$

$$\sigma_2 = \max\{m\gamma K^2(1+rb)(1+rb+l) + l + 1, m\gamma K(1+rb+l) + 1\}$$

を表す.

そのとき, そのグラフ $(t, \hat{x}(t))$ が境界値問題 (2.12) と (2.13) の $D[\delta] \subset D$ に存在する唯一の解 $x = \hat{x}(t)$ が存在する. さらに, それは孤立解であり, $-r \leq t \leq l$ に対する誤差境界 $|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon\sigma_2/(1-\kappa)$ を満足する.

この定理の証明は, [6] に, 詳しく述べられている.

3 数値実験例

3.1 数値実験例 1

次の線形差分微分方程式の境界値問題を解く.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-r) \\ y(t-r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(t-1) \\ -\sin(t-1) \end{pmatrix} \quad (0 < t \leq l)$$

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x(\theta) \\ \psi_y(\theta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(l+\theta) \\ y(l+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_x(\theta) \\ \psi_y(\theta) \end{pmatrix} \quad (-r \leq \theta \leq 0)$$

ここで, $l = \pi, r = 1$ である. $m = 10$ とおく.

近似解

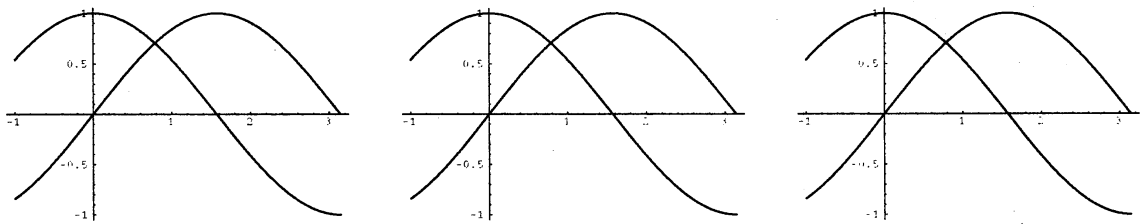
$$X(\xi) = \sum_{n=0}^{10} u_n x_n T_n(\xi)$$

と未知関数

$$\Psi(\eta) = \sum_{n=0}^{10} u_n \psi_n T_n(\eta)$$

を求める.

以下に, 真の解から求めた $X(t), M\Psi(\theta)$ のグラフ, 近似多項式のグラフ, さらに重ね合わせたグラフを提示する. 左から順に, 真の解のグラフ, 近似解のグラフ, 重ね合わせたグラフである.



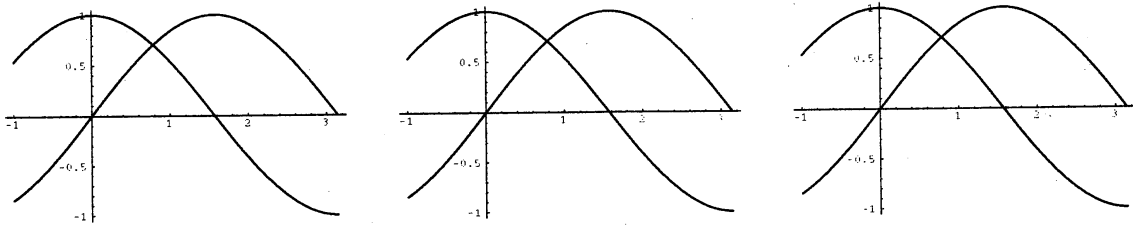
真の解は, $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ である.

また, 同じ問題を次のように再定義し, 非線形問題として計算した.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) + x(t-r) - \cos(t-1) \\ x(t) + y(t-r) - \sin(t-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x(\theta) \\ \psi_y(\theta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(l+\theta) \\ y(l+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_x(\theta) \\ \psi_y(\theta) \end{pmatrix} \quad (0 < \theta \leq l)$$

$l, r, m, X(\xi), \Psi(\eta)$ の定義は, 線形の場合と同様である. この時の計算結果のグラフを, 以下に表示する. 左から順に, 真の解のグラフ, 近似解のグラフ, 二つを重ね合わせたグラフである.



3.2 数値実験例 2

次の線形差分微分方程式の境界値問題を解く。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-r) \\ y(t-r) \\ z(t-r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ (\cos(t-1) - \sin(t-1))^2 \\ (\cos(t-1) + \sin(t-1))^2 \end{pmatrix} \quad (0 < t \leq l)$$

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x(\theta) \\ \psi_y(\theta) \\ \psi_z(\theta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(l+\theta) \\ y(l+\theta) \\ z(l+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_x(\theta) \\ \psi_y(\theta) \\ \psi_z(\theta) \end{pmatrix} \quad (-r \leq \theta \leq 0)$$

ここで, $l = \pi, r = 1$ である. $m = 10$ とおく.

近似解

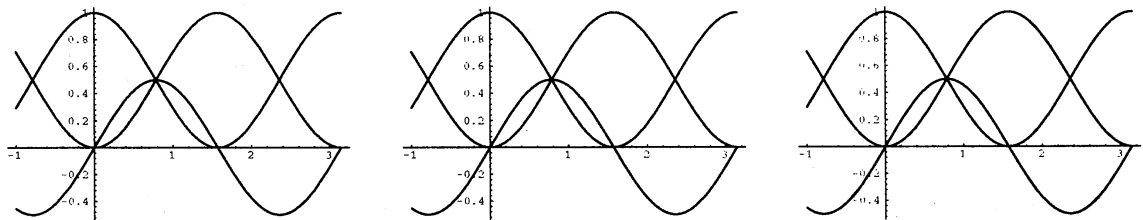
$$X(\xi) = \sum_{n=0}^{10} u_n x_n T_n(\xi)$$

と未知関数

$$\Psi(\eta) = \sum_{n=0}^{10} u_n \psi_n T_n(\eta)$$

を求める.

以下に, 真の解から求めた $X(t), M\Psi(\theta)$ のグラフ, 近似多項式のグラフ, さらに重ね合わせたグラフを提示する. 左から順に, 真の解のグラフ, 近似解のグラフ, 重ね合わせたグラフである.



真の解は, $x(t) = \sin^2(t), y(t) = \cos^2(t), z(t) = \sin t \cos t$ である.

参考文献

- [1] A. Halanay, "A boundary-value problem for linear systems with time lag", *J. Diff. Eqs.*, 2(1966), pp. 47-56.
- [2] J. K. Hale, "Theory of functional differential equations", *Springer-Verlag.*, (1976), Chapter 6.
- [3] Urabe M., unpublished paper.
- [4] Urabe M., "Numerical Solution of Multi-Point Boundary Value Problems in Chebyshev Series Theory of the Method", *Nun. Math.*, 9(1967), pp.341-366.
- [5] Kurihara M., "An Existence Theorem of a Boundary Value Problem for Differential Difference Equation", *FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, (1991), pp. 191-195
- [6] 雨宮廣和, "関数微分方程式の境界値問題の Chebyshev 近似解法", 山梨大学計算機科学科修士論文,(1992).