数理解析研究所講究録
900 巻 1995 年 148-158

バナッハ空間上の周期線形関数微分方程式の周期解の存在について

朝鮮大学理学部　申　正善
(Jong Son Shin)
電気通信大学　内藤　敏機
(Toshiki Naito)

§1 はじめに

次の無限遅れの線形関数微分方程式を考える：

$$(E) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + L(t, x_t) + F(t).$$

ここで $x(t)$ は実数の集合 R のある無限区間 $(-\infty, a)$ で定義されバナッハ空間 E の値をとる関数，また x_t は $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \le 0$, で定義される $(-\infty, 0]$ 上の関数とする．$\mathcal{B}$ は関数 $\phi : (-\infty, 0] \to E$ のある族からなるバナッハ空間で次節で定義される公理系をみたすとし，方程式 (E) は次の仮定を常にみたすとする：

(H-1) 線形作用素 A は E 上の C_0−コンパクト半群の生成作用素である．

(H-2) $L : R \times \mathcal{B} \to E$ は連続で，$L(t, \cdot) : \mathcal{B} \to E$ は線形写像である．

(H-3) $F : R \to E$ は連続である．

特に $L(t, \phi), F(t)$ が周期関数の場合は (E) を (PE) とあらわし, $F \equiv 0$ の場合は $(E), (PE)$ を各々 $(E_0), (PE_0)$ とあらわす．

本論文の目的は (PE) の周期解の存在を示すことにある．

§2　相空間 $\mathcal{B}$ と解の評価

バナッハ空間 E のノルムは $|\cdot|_E$, $\mathcal{B}$ のノルムは $|\cdot|_{\mathcal{B}}$ であらわす．添え字は省略することもある．前節で述べた $\mathcal{B}$ の公理系を掲げる．

(B-1) 関数 $x : (-\infty, \sigma + a) \to E, a > 0,$ が区間 $[\sigma, \sigma + a)$ で連続で，$x_\sigma \in \mathcal{B}$ であれば，各 $t \in [\sigma, \sigma + a)$ において次のことが成り立つ：

(i) $x_t \in \mathcal{B}$.

(ii) $|x(t)|_E \le H|x_t|_{\mathcal{B}}$.

(iii) $|x_t|_B \le K(t-\sigma)\sup\{|x(s)|_E : \sigma \le s \le t\} + M(t-\sigma)|x_\sigma|_B$.

ここで H は定数，$K, M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ で，$K(t)$ は連続，$M(t)$ は局所有界であり，これらは x に依存しない．

(B-2) 上記 (B-1) の中の x に対して x_t は $t \in [\sigma, \sigma+a)$ に関する $\mathcal{B}$-値連続関数である．

公理 (B-1),(B-2) は本論文全体で仮定する．区間 $(-\infty, 0]$ から E への連続でコンパクト台をもつ関数の族を C_{00} であらわし，有界連続関数の集合を BC で表す．明らかに $C_{00} \subset BC$であり，また上記 (B-1) により $C_{00} \subset \mathcal{B}$. 次の公理はしばしば仮定する．

(C) 一様有界な関数列 $\{\phi^n\} \subset C_{00}$ が $(-\infty, 0]$ において関数 ϕ に局所一様収束するならば，$\phi \in \mathcal{B}$ でかつ $\mathcal{B}$ において $\{\phi^n\}$ は ϕ に収束する．

公理 (C) の下では $BC \subset \mathcal{B}$ となる．BC の関数 ϕ に対して $|\phi|_\infty = \sup\{|\phi(\theta)| : \theta \le 0\}$ とおく．

補題 2.1. [3] 相空間 $\mathcal{B}$ が公理 (C) をみたすならば，ある定数 L に対して

$$|\phi|_B \le L|\phi|_\infty, \qquad \forall \phi \in BC. \tag{2.1}$$

作用素 $S(t) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}, t \ge 0$, を

$$[S(t)\phi](\theta) = \begin{cases} \phi(0), & -t \le \theta \le 0, \\ \phi(t+\theta), & \theta \le -t, \end{cases}$$

と定める．$\mathcal{B}_0 = \{\phi \in \mathcal{B} : \phi(0) = 0\}$ とおき，$S(t)$ の $\mathcal{B}_0$ への制限を $S_0(t)$ とする．関数 $x : (-\infty, \infty) \to E$ が $[\sigma, \infty)$ で連続で，$x_\sigma \in \mathcal{B}$ ならば，公理 (C) により

$$x_t = y_t + S_0(t-\sigma)[x_\sigma - \overline{x(\sigma)}]. \tag{2.2}$$

と分解される．ここで

$$y(s) = x(s), \quad s \ge \sigma, \qquad y(s) = x(\sigma), \quad s \le \sigma,$$

$$\left[\overline{x(\sigma)}\right](\theta) = x(\sigma), \quad \theta \le 0.$$

(2.1),(2,2) により次の不等式を得る．

$$|x_t| \leq L\sup\{|x(s)| : \sigma \leq s \leq t\} + \left|S_0(t-\sigma)\left[x_\sigma - \overline{x(\sigma)}\right]\right|. \tag{2.3}$$

次に一般的な半線形関数微分方程式の初期値問題を考える：

$$(SE) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + F(t, x_t), & t > \sigma, \\ x_\sigma = \phi \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

ここで A は第1節と同じ，$F : R \times \mathcal{B} \to E$ は連続で局所リプシッツ条件をみたし，さらにある連続関数 $n, f : R \to [0, \infty)$ が存在して

$$|F(t, \psi)| \leq n(t)|\psi|_B + f(t), \quad (t, \psi) \in R \times \mathcal{B},$$

が成り立っているとする．関数 $x : (-\infty, \sigma + a) \to E$ が, $[\sigma, \sigma + a)$ で連続で次の積分方程式を満たすとき，x を (SE) の mild solution といい，今後単に (SE) の解といえばこの意味の解とする：

$$\begin{cases} x(t) = T(t-\sigma)\phi(0) + \displaystyle\int_\sigma^t T(t-s)F(s, x_s)\, ds, & \sigma \leq t \leq \sigma + a, \\ x_\sigma = \phi. \end{cases}$$

命題 2.2. (SE) の解は $[\sigma, \infty)$ において一意的に存在する．

命題 2.3. $|T(t)| \leq M_w e^{wt}$ とする．このとき (SE) の解 $x(t, \sigma, \phi)$ に対して

$$\begin{aligned} &|x_t(\sigma, \phi)|_B \\ &\quad \leq |\phi|_B \left\{\hat{M}(t-\sigma) + K(t-\sigma)\left[HN(t, \sigma, \sigma) + \int_\sigma^t N(t, s, \sigma)n(s)\hat{M}(s-\sigma)\, ds\right]\right\} \\ &\qquad + K(t-\sigma)\int_\sigma^t N(t, s, \sigma)f(s)\, ds, \end{aligned}$$

ただし $\hat{M}(t)$ は $M(t) \leq \hat{M}(t)$ であるような局所可積分な任意の関数（たとえば $\hat{M}(t) = \sup\{M(s) : 0 \leq s \leq t\}$ ）とし，また

$$N(t, s, \sigma) = M_w \exp\int_s^t (\max\{w, 0\} + M_w n(r)K(r-\sigma))\, dr, \quad \sigma \leq s \leq t.$$

特に $f(t) \equiv 0$ であれば，ある局所可積分な関数 $m(\cdot, \sigma) : [\sigma, \infty) \to [0, \infty)$ が存在して

$$|x_t(\sigma, \phi)|_B \leq m(t, \sigma)|\phi|_B.$$

§3．解の分解とその性質

$x(t,\sigma,\phi)$ は $[\sigma,\infty)$ で定義された (SE) の解とする．B 上の作用素

$$\hat{T}(t),\quad t\geq 0;\ U(t,\sigma),\ \hat{K}(t,\sigma),\quad t\geq\sigma,$$

を次のように定める：

$$U(t,\sigma)\phi = x_t(\sigma,\phi),$$

$$\left[\hat{T}(t)\phi\right](\theta)=\begin{cases} T(t+\theta)\phi(0), & t+\theta\geq 0,\\ \phi(t+\theta), & t+\theta\leq 0,\end{cases}$$

$$\left[\hat{K}(t,\sigma)\phi\right](\theta)=\begin{cases} \displaystyle\int_\sigma^{t+\theta} T(t+\theta-s)F(s,x_s(\sigma,\phi))\,ds, & t+\theta\geq\sigma,\\ 0, & t+\theta\leq\sigma.\end{cases}$$

$U(t,\sigma)$ を (SE) の解作用素という．明らかに，$U(t,\sigma)=\hat{T}(t-\sigma)+\hat{K}(t,\sigma)$ と表される．また $\hat{T}(t):B\to B,\ t\geq 0,$ は C_0−半群となる．

解作用素 $U(t,\sigma)$ の性質を調べる．その準備として，あるバナッハ空間 G の有界な部分集合 Ω のクラトウスキー測度を

$$\alpha_G(\Omega)=\inf\left\{d>0:\exists U_1,U_2,\cdots,U_k\subset G,\ \Omega\subset\bigcup_{i=1}^k U_i,\ U_i\text{ の直径}\leq d\right\}$$

と定め，α−測度とよぶ．添え字 G は普通省略する．Ω が相対コンパクトであることは $\alpha(\Omega)=0$ と同値である．G 上の連続線形写像 T に対し，その α−測度を

$$\alpha(T)=\inf\{k:\alpha(TM)\leq k\alpha(M), M\text{は有界部分集合}\}$$

と定める．

関数 $x:(-\infty,\infty)\to E$ のある族 X があるとき，$t\geq\sigma$ に対して

$$X(t)=\{x(t)\in E: x\in X\},\qquad X_t=\left\{x_t\in B: x\in X\right\},$$

$$X|[\sigma,t]=\{x|[\sigma,t]: x\in X\}$$

とおく．$x|[\sigma,t]$ は x の $[\sigma,t]$ への制限である．$(-\infty,\infty)$ から E への連続関数全体の族を C とおく．

補題 3.1. $t \geq \sigma$ とし，X_σ は B の有界集合，$X|[\sigma, t]$ は上限ノルムつきのバナッハ空間 $C[\sigma, t]$ の有界集合とする．このとき次の関係式が成り立つ．

(1) $$(1/H)\alpha_E(X(t)) \leq \alpha_B(X_t) \leq K(t-\sigma)\alpha_C(X|[\sigma,t]) + M(t-\sigma)\alpha_B(X_\sigma).$$

(2) 相空間 B に公理 (C) を付加し，X_σ が BC の有界部分集合とする．このとき

(i) $$\alpha_B(X_t) \leq L \max\{\alpha_{BC}(X_\sigma), \alpha_C(X|[\sigma,t])\}.$$

(ii) $$\alpha_B(X_t) \leq L\alpha_C(X|[\sigma,t]) + (1+LH)\alpha(S_0(t-\sigma))\alpha_B(X_\sigma).$$

ここで L は (2.1) で定めた定数である．

証明．(1) は [5] で証明され，そこでの議論と補題 2.1 により (2) の (i) が示される．(2) の (ii) を示す．分解 (2.2) により (2) の (i) と (1) を用いて

$$\begin{aligned}
\alpha(X_t) &\leq \alpha(\{y_t \in B : x \in X\}) + \alpha\left(\left\{S_0(t-\sigma)\left[x_\sigma - \overline{x(\sigma)}\right] : x \in X\right\}\right) \\
&\leq L\alpha(X|[\sigma,t]) + \alpha(S_0(t-\sigma))\alpha\left(\left\{x_\sigma - \overline{x(\sigma)} : x \in X\right\}\right) \\
&\leq L\alpha(X|[\sigma,t]) + \alpha(S_0(t-\sigma))[\alpha(X_\sigma) + L\alpha(X(\sigma))] \\
&\leq L\alpha(X|[\sigma,t]) + (1+LH)\alpha(S_0(t-\sigma))\alpha(X_\sigma).
\end{aligned}$$

$T(t)$ は E上の C_0−半群とし，関数 $f \in C[a,b]$ に対して $C[a,b]$ の関数 G_f を

$$G_f(t) = \int_a^t T(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

で定義する．

補題 3.2. [6] M は $C[a,b]$ の有界部分集合，$K = \{G_f : f \in M\}$ とおく．このとき

$$\alpha\left(K|[a,t]\right) \leq \gamma_T \sup\left\{\alpha(K(\tau)) : a \leq \tau \leq t\right\}, \quad t \in [a,b],$$

ただし $\gamma_T = \limsup_{\delta\to 0+} |T(\delta)|$.

補題 3.3. $a > 0$ で $\Omega \subset E$ は有界とする．
(1) $T(t)$ が E 上の C_0−半群であれば

$$\alpha(\{T(\cdot)\Omega|[0,a]\}) \leq \sup\{|T(s)| : 0 \leq s \leq a\}\alpha(\Omega).$$

(2) $T(t)$ が E 上の C_0−コンパクト半群であれば

(i) 任意の $\epsilon > 0$ に対して$\alpha(\{T(\cdot)\Omega|[\epsilon, a]\}) = 0$.

(ii) $\alpha(\{T(\cdot)\Omega|[0, a]\}) \leq \max\{1, \gamma_T\}\alpha(\Omega)$.

与えられた局所有界な関数 $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ に対して，関数 $\tilde{g} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} \limsup_{s \to t-0} g(s), & t > 0, \\ \max\left\{g(0), \limsup_{s \to 0+} g(s)\right\}, & t = 0, \end{cases}$$

と定める．

補題 3.4. 上記の局所有界な g が

$$g(t + s) \leq g(t)g(s), \quad t, s \in [0, \infty),$$

を満たせば，$\tilde{g}$ も局所有界で同じ不等式をみたす．

これらの結果を用いて次の関係式を得る．

命題 3.5. $T(t)$ は C_0−コンパクト半群とする．このとき

(1) $\alpha(\hat{T}(t)) \leq C_1 \tilde{M}(t), \quad t \geq 0$.

(2) 相空間 B に公理 (C) を付加するならば

$$\alpha(\hat{T}(t)) \leq C_2 \tilde{\alpha}(S_0(t)), \quad t \geq 0.$$

ここで $C_1 = HK(0)\max\{1, \gamma_T\} + \tilde{M}(0)$, $C_2 = (1 + LH)C_1$.

証明．(1) $t = 0$ の場合は明かである．$t > 0$ とする．このとき任意の有界集合 $\Omega \subset B$ と $0 < \epsilon < t$ に対して補題 3.1 と 3.3 により

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{T}(t)\Omega) &\leq K(t - \epsilon)\alpha(\{T(\cdot)\Omega(0)|[\epsilon, t]\}) + M(t - \epsilon)\alpha(\hat{T}(\epsilon)\Omega) \\ &= M(t - \epsilon)\alpha(\hat{T}(\epsilon)\Omega) \\ &\leq M(t - \epsilon)[K(\epsilon)\alpha(\{T(\cdot)\Omega(0)|[0, \epsilon]\}) + M(\epsilon)\alpha(\Omega)] \\ &\leq M(t - \epsilon)[HK(\epsilon)\max\{1, \gamma_T\}\alpha(\Omega) + M(\epsilon)\alpha(\Omega)]. \end{aligned}$$

上極限をとると $\alpha(\hat{T}(t)\Omega) \leq C_1\tilde{M}(t)\alpha(\Omega)$. これは (1) を示す.

(2) (1) と同様に

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{T}(t)\Omega) &\leq L\alpha(\{T(\cdot)\Omega(0)|[\epsilon, t]\}) + (1+LH)\alpha(S_0(t-\epsilon))\alpha(\hat{T}(\epsilon)\Omega) \\ &= (1+LH)\alpha(S_0(t-\epsilon))\alpha(\hat{T}(\epsilon)\Omega) \\ &\leq (1+LH)\alpha(S_0(t-\epsilon))[HK(\epsilon)\max\{1,\gamma_T\} + M(\epsilon)]\alpha(\Omega) \end{aligned}$$

となり (2) の不等式を得る.

命題 3.6.

$$\alpha(\hat{K}(t,\sigma)) = 0, \qquad t \geq \sigma.$$

証明. $t=\sigma$ のときは明か. $t>\sigma$ とする. Ω が B の有界集合ならば, 命題 2.3 により $\phi \in \Omega$ をパラメタとする関数 $x_s(\sigma,\phi)$ の族は s の区間 $[\sigma, t]$ 上で有界である. よって補題 3.1 と 3.2 により

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{K}(t,\sigma)\Omega) &\leq K(t-\sigma)\alpha\left(\left\{\int_\sigma^{\cdot} T(\cdot - s)F(s, x_s(\sigma,\phi))\,ds \mid [\sigma,t] : \phi \in \Omega\right\}\right) \\ &\leq \gamma_T K(t-\sigma)\sup_{\sigma\leq\tau\leq t}\alpha\left(\left\{\int_\sigma^\tau T(\tau - s)F(s, x_s(\sigma,\phi))\,ds : \phi\in\Omega\right\}\right). \end{aligned}$$

ϵ を $0<\epsilon<\tau-\sigma$ ととり, 右辺の積分項の積分区間を $[\sigma, \tau-\epsilon]$ と $[\tau-\epsilon, \tau]$ に分割する. 最初の区間上の積分は

$$\int_\sigma^{\tau-\epsilon} T(\tau-s)F(s,x_s(\sigma,\phi))\,ds = T(\epsilon)\int_\sigma^{\tau-\epsilon} T(\tau-\epsilon-s)F(s,x_s(\sigma,\phi))\,ds.$$

$T(\epsilon)$ はコンパクト作用素であるから, $\phi\in\Omega$ をパラメタとするこの集合は E のコンパクト集合に含まれ, その $\alpha-$測度は 0 である. 他方残りの区間上で

$$\left|\int_{\tau-\epsilon}^{\tau} T(\tau-s)F(s,x_s(\sigma,\phi))\,ds\right| \leq \epsilon \sup_{0\leq u\leq t-\sigma}|T(u)| \sup_{\sigma\leq s\leq t}(n(s)|x_s(\sigma,\phi)|_B + f(s)).$$

したがってその $\alpha-$測度は右辺の量の 2 倍で上から押さえられる. ϵ は幾らでも小さくとれるから, $\alpha(\hat{K}(t,\sigma)) = 0$.

命題 3.5 と 3.6 を合わせて次の結果を得る。

命題 3.7.

(1) $$\alpha(U(t,\sigma)) = \alpha(\hat{T}(t-\sigma)) \leq C_1\tilde{M}(t-\sigma), \qquad t\geq\sigma.$$

(2) 相空間 B に公理 (C) を付加すれば

$$\alpha(U(t,\sigma)) = \alpha(\hat{T}(t-\sigma)) \le C_2\tilde{\alpha}(S_0(t-\sigma)), \quad t \ge \sigma.$$

§4．周期解の存在

T があるバナッハ空間からそれ自身への有界線形作用素であるとき，その真性スペクトル半径 $r_e(T)$ について，Nussbaum による次の公式がなりたつ [3]：

$$r_e(T) = \lim_{n\to\infty} \alpha(T^n)^{1/n}.$$

ここでは第 1 節で述べた線形方程式 (E_0) の解作用素を考える．(SE) において $F(t,\psi) = L(t,\psi)$ とおけば，(E_0) に対して前節の結果を用いることができる．いま

$$\hat{\beta} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \alpha(\hat{T}(t))}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \alpha(\hat{T}(t))}{t},$$

$$\tilde{\beta}_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \tilde{\alpha}(S_0(t))}{t}, \qquad \tilde{\mu}_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \tilde{M}(t)}{t}$$

とおくと，補題 3.4 により $-\infty \le \hat{\beta}, \tilde{\beta}_0, \tilde{\mu}_0 < \infty$ である．命題 3.7 より次のことがなりたつ．

定理 4.1.

(1) 公理 (B-1) のなかの関数 $M(t)$ が $M(t+s) \le M(t)M(s)$, $t, s \ge 0$, をみたすならば

$$r_e(U(t,s)) = r_e(\hat{T}(t-s)) = \exp(\hat{\beta}(t-s)) \le \exp(\tilde{\mu}_0(t-s)), \quad t > s.$$

(2) 相空間 B が公理 (C) をみたすならば

$$r_e(U(t,s)) = r_e(\hat{T}(t-s)) = \exp(\hat{\beta}(t-s)) \le \exp(\tilde{\beta}_0(t-s)), \quad t > s.$$

上記 (1) の結果は [4] の結果の改良となっている．つづいて真性スペクトルの定義から次のことがなりたつ．

定理 4.2. T があるバナッハ空間 X 上の有界線形作用素とする．このとき $|\lambda| > r_e(T)$ ならば，値域 $R(\lambda I - T)$ は X における閉集合である．

系 4.3. [1] 上の定理の T に対して $|\lambda| > \alpha(T)$ ならば $R(\lambda I - T)$ は閉集合である．

証明．$\alpha(T^n) \leq \alpha(T)^n$ から明かである．

周期線形方程式 (PE) の周期解の存在を Chow and Hale による次の不動点定理を用いて示す．

L がバナッハ空間 X 上の有界線形写像，z が X の定点であるとき，

$$Tx = Lx + z, \qquad x \in X,$$

で定義される X 上のアファイン線形写像 T を考える．

定理 4.4. [2] 写像 $I - L$ の値域 $R(I - L)$ が閉集合で，$\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \cdots\}$ が有界であるような x_0 が存在するならば T は不動点をもつ．

定理 4.5. (PE) は $\omega-$周期系とする．$\hat{\beta} < 0$ と仮定する．このとき (PE) が B-有界な解をもてば $\omega-$周期解をもつ．

証明．$U(t,s)$ は (PE_0) の解作用素とし，$P = U(\omega, 0)$ とおく．

まず定理 4.1 から $r_e(P) = r_e(\hat{T}(\omega)) = \exp(\hat{\beta}\omega)$. $\hat{\beta} < 0$ であるから $r_e(P) < 1$. したがって定理 4.2 により $R(I - P)$ は閉集合である．

$x(t, \sigma, \psi, F)$ を方程式 (PE) の初期条件 $x_\sigma = \psi$ をみたす mild solution とする．解の一意性より

$$x(t, \rho, x_\rho(\sigma, \psi, F), F) = x(t, \sigma, \psi, F), \quad \sigma \leq \rho \leq t.$$

解の一意性と $\omega-$周期性より

$$x(t + \omega, \sigma + \omega, \psi, F) = x(t, \sigma, \psi, F), \quad \sigma \leq t.$$

解の一意性と線形方程式であることより

$$x(t, \sigma, \psi_1 + \psi_2, F_1 + F_2) = x(t, \sigma, \psi_1, F_1) + x(t, \sigma, \psi_2, F_2).$$

次に $x(t) = x(t, 0, \phi, F)$ は $(0, \phi) \in R \times B$ を通る (PE) の解で x_t が B で有界，即ち $\sup\{|x_t|_B : t \geq 0\} < \infty$ とする．B 上のアファイン線形写像 V を

$$V\psi = P\psi + x_\omega(0, 0, F), \qquad \forall \psi \in B,$$

と定める．P の定義より

$$V\psi = x_\omega(0,\psi,0) + x_\omega(0,0,F) = x_\omega(0,\psi,F).$$

したがって $V^2\psi = x_\omega(0, x_\omega(0,\psi,F),F)$. 上の注意より

$$x_\omega(0,x_\omega(0,\psi,F),F) = x_{\omega+\omega}(\omega, x_\omega(0,\psi,F),F) = x_{2\omega}(0,\psi,F).$$

すなわち $V^2\psi = x_{2\omega}(0,\psi,F)$. 一般に $V^k\psi = x_{k\omega}(0,\psi,F)$, $k=1,2,\cdots$. とくに $V^k\phi = x_{k\omega}(0,\phi,F)$, $k=1,2,\cdots$, で仮定よりこれは B の有界列である．

以上により Chow and Hale の定理 4.4 を適用して定理 4.5 を得る．

系 4.6. 公理 (B-1) における $M(t)$ は $M(t+s) \le M(t)M(s)$, $t,s \ge 0$, をみたし $K(t)$ は $[0,\infty)$ で有界とする．$M(t) \to 0 (t\to\infty)$ かつ ω–周期系 (PE) が E–有界な解をもつならば (PE) はω–周期解をもつ．

証明．$M(t)\to 0(t\to\infty)$ であるから $\tilde{M}(t) \to 0(t\to\infty)$ がでる．よって $\tilde{\mu} < 0$, 従って $\hat{\beta} < 0$. 他方 $K(t)$ は $[0,\infty)$ で有界であるから, 公理 (B-1) によって E–有界な解は B-有界な解となる．よって定理 4.5 が適用できる．

注意 4.7. 任意の $\phi \in B_0$ に対して $|S_0(t)\phi|$ が $[0,\infty)$ で有界であることと $|S_0(t)|$ が $[0,\infty)$ で有界であることとは同値である．よって B が fading memory 空間 [3] であれば $|S_0(t)|$ は $[0,\infty)$ で有界である．

命題 4.8. 相空間 B は公理 (C) をみたしているとする．$\alpha(S_0(t)) \to 0(t\to\infty)$ かつ $|S_0(t)|$ が $[0,\infty)$ で有界であると仮定する．このとき ω–周期系 (PE) は E–有界な解をもてば ω–周期解をもつ．

証明．$\beta_0 = \lim_{t\to\infty}[\log\alpha(S_0(t))]/t$ とおけば仮定より $\beta_0 < 0$. したがって $\tilde{\beta}_0 < 0$. 定理 4.1 により $\hat{\beta} < 0$. である．(2.3) と仮定から E–有界な解は B-有界な解になる．よって定理 4.5 が適用できる．

系 4.9. 相空間 B は uniform fading memory 空間 [3] とする．このとき ω–周期系 (PE) が E–有界な解をもてば ω–周期解をもつ．

参考文献

[1] Ambrosetti A., Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach, Rend Sem. Math. Univ. Padova, 39(1967), 349-360.

[2] Chow S.-N and Hale J.K., Strongly limit-compact maps, Funkcial. Ekvac., 17(1974), 31-38.

[3] Hino Y., Murakami S. and Naito T., "Functional Differential Equations with Infinite Delay", Springer-Vlg, 1991.

[4] Murakami S., Stability for functional differential equations with infinite delay in Banach spaces, preprint.

[5] Shin J.S., An existence theorem of functional differential equations with infinite delay in a Banach space, Funkcial. Ekvac., 30(1987), 19-29.

[6] ———, Existence and continuous dependence of mild solutions to semelinear functional differential equations in Banach spaces, to appear.