

## Rectangular Products with a Paracompact M Factor

静岡大学・教育 大田春外 (Haruto OHTA)

### 1. Pasynkov の問題

積空間  $X \times Y$  は、その任意の有限正規開被覆が cozero-rectangles からなる  $\sigma$ -局所有限細分を持つとき、rectangular product と呼ばれる<sup>1</sup>。ここで、cozero-rectangle とは、 $X$  の cozero-集合  $U$  と  $Y$  の cozero-集合  $V$  を用いて  $U \times V$  の形に表される集合である。本稿の目的は rectangular products に関する次の Pasynkov の問題について考えることである。

**問題** (Pasynkov [17]) 空間  $X$  から空間  $X_0$  の上への完全写像  $f$  と空間  $Y$  から距離空間  $M$  の上への完全写像  $g$  が与えられ、 $X_0 \times M$  が正規であると仮定する。このとき、 $X \times Y$  は rectangular product か？

保科-森田 [5] によって注意されたように、この問題で、もし  $X$  が正規空間ならば  $X \times M$  は正規である。このとき  $X \times Y$  は rectangular product であることが [5] と [18] で証明された。したがって、 $X$  が正規空間の場合にはこの問題は肯定解を持つ。

本稿では、まず「標準的な rectangular 細分」について考える。次に  $\dim(X \times Y) = 0$  の場合にも上の問題は肯定解を持つことを証明し、その結果を連続関数の拡張問題に応用する。また、 $Y = M \times C$  ( $C$  はコンパクト空間でこの場合  $g$  は射影) の場合も肯定解を持つことを示す。上述の  $X$  が正規空間の場合の [5] と [18] の証明は、Starbird [20] の定理を使っている。Starbird の定理の証明はかなり複雑であるが、その本質的な部分の見通しのよい証明が Filippov [3] によって与えられた。最後に、この Filippov の証明を紹介し、それをを用いて  $X$  が正規空間の場合に Pasynkov の問題が肯定解を持つことを直接に証明する。以下、空間には分離公理を仮定しない。また  $N$  は正整数の集合をあらわす。

<sup>1</sup>この定義は Pasynkov [16] による。正規である積空間に対しては、rectangular product は Nagata [13] による  $F$ -product と一致する。

## 2. 標準的な rectangular 細分

積空間が rectangular product であることは、積空間の正規開被覆 (= 連続関数) の情報が座標空間に伝わることを意味するが、cozero-rectangles からなる  $\sigma$ -局所有限細分は扱い易いとは言えない. 実際,  $X \times Y$  の cozero-rectangles の族  $\{U_\alpha \times V_\alpha\}$  が局所有限であっても,  $X$  の集合族  $\{U_\alpha\}$  と  $Y$  の集合族  $\{V_\alpha\}$  については殆ど何も言えない. しかし座標空間の1つが強い空間の場合には, もっと「よい形の rectangular 細分」をとることが出来る. 例えば,  $X$  とコンパクト空間  $C$  の積は常に rectangular product であるが,  $X \times C$  の正規開被覆は

$$\{U_\lambda \times V : V \in \mathcal{V}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

の形の細分を持つ. ここで,  $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  は  $X$  の cozero-集合からなる局所有限被覆,  $\mathcal{V}_\lambda$  は  $C$  の cozero-集合からなる有限被覆である ([1], [10], [22]). また,  $X$  と距離空間  $M$  の積が rectangular product のとき,  $X \times M$  の正規開被覆は常に

$$\{U_B \times B : B \in \mathcal{B}\}$$

の形の細分を持つ. ここで,  $U_B$  は  $X$  の cozero-集合,  $\mathcal{B}$  は  $M$  の  $\sigma$ -局所有限基底である ([15], [21]). それでは  $X$  とパラコンパクト  $M$ -空間  $Y$  の積の場合には, 望ましい細分としてどのような形が期待出来るだろうか.

**定義** 空間  $X$ , 空間  $Y$  から距離空間  $M$  の上への完全写像  $g$  と  $M$  の  $\sigma$ -局所有限基底  $\mathcal{B}$  が与えられたとせよ. このとき, 積空間  $X \times Y$  の正規開被覆の標準的な rectangular 細分とは  $\{U_{B,\lambda} \times V : V \in \mathcal{V}_{B,\lambda}, \lambda \in \Lambda_B, B \in \mathcal{B}\}$  の形の細分のことを言う. ここで,  $\mathcal{V}_{B,\lambda}$  は  $Y$  の cozero-集合からなる  $Y$  で  $\sigma$ -局所有限な  $g^{-1}[B]$  の被覆,  $\{U_{B,\lambda} : \lambda \in \Lambda_B\}$  は  $X$  の cozero-集合の  $\sigma$ -局所有限族である.

定義の中の空間  $X, Y$  の積が rectangular product であるとき,  $X \times Y$  の任意の有限正規開被覆が常に標準的な rectangular 細分を持つかどうか筆者は知らない.

## 3. $\dim(X \times Y) = 0$ の場合

本節を通して,  $X$  は任意の空間,  $Y$  はパラコンパクト  $M$ -空間を表す. したがって,  $Y$  から距離空間  $M$  の上への完全写像  $g$  が存在する.  $M$  が離散空間の場合は,  $Y$  はパラコンパクト局所コンパクトだから,  $X \times Y$  は rectangular product である. したがって,  $M$  が離散空間でない場合だけを考える. さらに,

$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$  を  $M$  の基底で各  $n \in \mathbb{N}$  について次の条件 (a)-(d) をみたすものとする。

- (a)  $\mathcal{B}_n$  は  $M$  の局所有限開被覆。
- (b)  $\text{mesh } \mathcal{B}_n < 1/2^n$ .
- (c)  $\mathcal{B}_{n+1}$  は  $\mathcal{B}_n$  の細分である。
- (d) 任意の  $B \in \mathcal{B}_n$  対し,  $\bigcup\{B' \in \mathcal{B}_n : B' \neq B\} \neq M$ .

このような基底の存在は [2, 定理 5.3.1] によって保証される。また, [8] にしたがって任意の可算単調増大開被覆が正規被覆である空間を cb-空間と呼ぶ。

**定理 1**  $X \times Y$  が cb-空間であるとする。このとき,  $X \times Y$  の互いに交わらない開集合からなる開被覆  $\mathcal{G}$  は標準的な rectangular 細分を持つ<sup>2</sup>。

**証明** 点  $p \in X \times Y$  に対し,  $p \in G \in \mathcal{G}$  のとき  $\varphi(p) = G$  と書く。各  $B \in \mathcal{B}$  に対し,  $X$  上の同値関係  $R_B$  を “ $xR_Bx' \Leftrightarrow$  任意の  $y \in g^{-1}[B]$  に対し,  $\varphi(x, y) = \varphi(x', y)$ ” によって定義し,  $\{D_{B,\lambda} : \lambda \in \Lambda_B\}$  を  $R_B$  による  $X$  の分割とする。  $F_B = X \setminus \bigcup\{\text{Int}_X D_{B,\lambda} : \lambda \in \Lambda_B\}$  とおくと,

$$B \subseteq B' \Rightarrow F_B \subseteq F_{B'}$$

が成り立つ。各  $n \in \mathbb{N}$  について,  $F_n = \bigcup\{F_B \times \text{cl}_Y g^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}_n\}$  とおく。このとき, 基底の条件 (a) から  $F_n$  は  $X \times Y$  の閉集合であり, 基底の条件 (c) から  $F_n \supseteq F_{n+1}$  である。また,  $g$  が完全写像であることと基底の条件 (b) を使って  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$  であることが証明出来る。いま  $X \times Y$  は cb-空間だから,  $\{(X \times Y) \setminus F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  はその正規開被覆である。したがって,  $X \times Y$  の cozero-集合からなる単調増大被覆  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  で, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $\text{cl}_{X \times Y} J_n \cap F_n = \emptyset$  であるものが存在する。各  $n \in \mathbb{N}$  と  $B \in \mathcal{B}_n$  に対し, 基底の条件 (d) から  $g(y_B) \in M \setminus \bigcup\{B' \in \mathcal{B}_n : B' \neq B\}$  である点  $y_B \in g^{-1}[B]$  を選び,  $K_B = \{x \in X : (x, y_B) \in J_n\}$  とおく。また, 各  $\lambda \in \Lambda_B$  に対し,  $U_{B,\lambda} = K_B \cap \text{Int}_X D_{B,\lambda}$  とおく。このとき,  $K_B$  は  $X$  の cozero-集合だから  $U_{B,\lambda}$  も  $X$  の cozero-集合である。また,  $\text{cl}_X K_B \subseteq \bigcup\{\text{Int}_X D_{B,\lambda} : \lambda \in \Lambda_B\}$  だから  $\{U_{B,\lambda} : \lambda \in \Lambda_B\}$  は  $X$  で疎である<sup>3</sup>。各  $\lambda \in \Lambda_B$  に対し,  $\mathcal{V}_{B,\lambda} = \{\pi_Y[(D_{B,\lambda} \times g^{-1}[B]) \cap G] : G \in \mathcal{G}\}$  とおく。ここで,  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  は射影である。このとき,  $\mathcal{V}_{B,\lambda}$  は  $Y$  の cozero-集合からなる  $Y$  で疎な  $g^{-1}[B]$  の被覆である。いま  $\{U_{B,\lambda} \times V : V \in \mathcal{V}_{B,\lambda}, \lambda \in \Lambda_B, B \in \mathcal{B}\}$  は  $\mathcal{G}$  の標準的な rectangular 細分である。これが実際  $X \times Y$  の被覆であることを確かめよう。任意の点  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  に対し  $t_0 = g(y_0)$  とする。  $g^{-1}(t_0)$  はコンパ

<sup>2</sup>筆者はこの定理を論文 ‘Disjoint open covers of a product with a paracompact M factor (unpublished, 1983)’ 中に書いたが服部泰直氏によって証明の誤りが指摘された。ここに与える証明はその誤りを修正したものである。この場を借りて服部氏の指摘に感謝する。

<sup>3</sup>疎な族とは discrete collection のことである (cf. [2])。

クトだから, ある  $n \in N$  と  $t_0 \in B' \in \mathcal{B}_n$  である  $B'$  について  $\{x_0\} \times g^{-1}[B'] \subseteq J_n$  が成り立つ. このとき,  $x_0 \in K_{B'} \setminus F_{B'}$  だから,  $x_0 \in U_{B',\lambda} \times V$  である  $\lambda \in \Lambda_{B'}$  と  $V \in \mathcal{V}_{B',\lambda}$  が存在する.  $\square$

もし  $\dim(X \times Y) = 0$  ならば,  $X \times Y$  の任意の正規開被覆は互いに交わらない開集合からなる細分をもつ. したがって, 定理1から次の系を得る.

**系1**  $X \times Y$  が cb-空間で  $\dim(X \times Y) = 0$  ならば  $X \times Y$  は rectangular product である.

Pasynkov の問題は  $\dim(X \times Y) = 0$  のとき肯定解をもつことが系1と次の補題からわかる.

**補題1**  $X$  から  $X_0$  の上への完全写像  $f$  が存在し  $X_0 \times M$  が正規空間ならば  $X \times Y$  は cb-空間である.

**証明**  $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \in N}$  を  $X \times Y$  の単調増大開被覆とする.  $h = f \times g$  は完全写像だから,  $H_n = (X_0 \times M) \setminus h[(X \times Y) \setminus G_n]$  とおくと,  $\mathcal{H} = \{H_n\}_{n \in N}$  は  $X_0 \times M$  の開被覆である. いま  $M$  は離散空間でないから, Rudin-Starbird [19] の定理によって  $X_0 \times M$  は正規可算パラコンパクトである. したがって,  $\mathcal{H}$  は正規開被覆である.  $h^{-1}[H_n] \subseteq G_n$  だから  $\mathcal{G}$  も正規開被覆である.  $\square$

**注意**  $Y = M \times C$  ( $C$  はコンパクト空間でこの場合  $g$  は射影  $M \times C \rightarrow M$ ) の場合も Pasynkov の問題は肯定解を持つ. 実際,  $X \times M \times C$  が cb-空間ならば, その任意の正規開被覆  $\mathcal{G}$  は標準的な rectangular 細分を持つことを示そう. 2節で述べたように,  $\mathcal{G}$  は  $\{U_\lambda \times V : V \in \mathcal{V}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  の形の細分を持つ. ここで,  $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  は  $X \times M$  の cozero-集合からなる局所有限被覆,  $\mathcal{V}_\lambda$  は  $C$  の cozero-集合からなる有限被覆である. いま  $X \times M$  は cb-空間だから [14] より rectangular product である. したがって, 2節で述べたように  $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  は  $\{U_B \times B : B \in \mathcal{B}\}$  の形の細分をもつ. ここで,  $U_B$  は  $X$  の cozero-集合である. 各  $B \in \mathcal{B}$  に対し,  $U_B \times B \subseteq U_{\lambda(B)}$  となる  $\lambda(B) \in \Lambda$  を選ぶ. このとき,  $\{B \times V : V \in \mathcal{V}_{\lambda(B)}\}$  は  $g^{-1}[B]$  の有限被覆だから,  $\{U_B \times B \times V : V \in \mathcal{V}_{\lambda(B)}, B \in \mathcal{B}\}$  は  $X \times M \times C$  の標準的な rectangular 細分である.

定理1の応用として, 次の2つの定理を証明する. いま  $Y$  はパラコンパクトだから,  $Y$  の任意の閉集合は  $Y$  で  $P$ -embedded であることに留意する.

**定理2**  $X \times Y$  は cb-空間,  $A$  は  $Y$  の閉集合,  $\dim(X \times A) = 0$  とする. このとき,  $X \times A$  は  $X \times Y$  で  $P$ -embedded である.

定理3  $X \times Y$  は cb-空間,  $A$  は  $X$  の  $P$ -embedded 閉集合,  $\dim(A \times Y) = 0$  とする. このとき,  $A \times Y$  は  $X \times Y$  で  $P$ -embedded である.

これらの定理の背景については保科 [6] を参照せよ. 証明のために3つの補題を用意する.

補題2 (Mack [9]) cb-空間  $S$  の閉集合  $F$  と  $F$  と交わらない  $S$  の zero-集合  $Z$  が与えられたとせよ. このとき,  $\varphi[F] = \{0\}$ ,  $\varphi[Z] = \{1\}$  である連続関数  $\varphi: S \rightarrow [0, 1]$  が存在する.

補題3 空間  $S$  の  $P$ -embedded 集合  $A$  の cozero-集合からなる  $\sigma$ -局所有限族  $\mathcal{V}$  が与えられたとせよ. このとき,  $S$  の cozero-集合からなる  $\sigma$ -局所有限族  $\mathcal{W}$  で  $\{W \cap A : W \in \mathcal{W}\}$  が  $\mathcal{V}$  の細分であり  $\cup\{W \cap A : W \in \mathcal{W}\} = \cup\{V : V \in \mathcal{V}\}$  をみたすものが存在する.

証明  $V_0 = \cup\{V : V \in \mathcal{V}\}$  は  $A$  の cozero-集合だから, 連続関数  $\varphi: A \rightarrow [0, 1]$  を使って  $V_0 = \varphi^{-1}(0, 1]$  と表される. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $\mathcal{V}_n = \mathcal{V} \cup \{\varphi^{-1}[0, 1/n]\}$  は  $A$  の正規開被覆である.  $A$  は  $S$  で  $P$ -embedded だから,  $S$  の cozero-集合からなる  $\sigma$ -局所有限被覆  $\mathcal{U}_n$  で  $\{U \cap A : U \in \mathcal{U}_n\}$  が  $\mathcal{V}_n$  の細分であるものが存在する. このとき,  $\mathcal{W} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{U \in \mathcal{U}_n : (\exists V \in \mathcal{V})(U \subseteq V)\}$  が求めるものである.  $\square$

2点からなる離散空間を  $D = \{0, 1\}$  で表す.

補題4  $X \times Y$  は cb-空間,  $A$  は  $Y$  の閉集合とする. このとき, 連続関数  $\varphi: X \times A \rightarrow D$  は連続関数  $\Phi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$  に拡張される.

証明  $G_i = \varphi^{-1}(i)$  ( $i = 0, 1$ ) とおく. 定理1から  $X \times A$  の開被覆  $\{G_0, G_1\}$  は標準的な rectangular 細分  $\{U_{B,\lambda} \times V : V \in \mathcal{V}_{B,\lambda}, \lambda \in \Lambda_B, B \in \mathcal{B}\}$  を持つ. ここで,  $\mathcal{V}_{B,\lambda}$  は  $A$  の cozero-集合からなる  $g^{-1}[B] \cap A$  の  $\sigma$ -局所有限被覆である.  $A$  は  $Y$  で  $P$ -embedded だから, 補題3より  $Y$  の cozero-集合からなる  $\sigma$ -局所有限族  $\mathcal{W}_{B,\lambda}$  で  $\{W \cap A : W \in \mathcal{W}_{B,\lambda}\}$  は  $\mathcal{V}_{B,\lambda}$  を細分し  $g^{-1}[B] \cap A = \cup\{W \cap A : W \in \mathcal{W}_{B,\lambda}\} \subseteq \cup\{W : W \in \mathcal{W}_{B,\lambda}\} \subseteq g^{-1}[B]$  をみたすものが存在する.  $H_i = \cup\{U_{B,\lambda} \times W : U_{B,\lambda} \times (W \cap A) \subseteq G_i, W \in \mathcal{W}_{B,\lambda}, \lambda \in \Lambda_B, B \in \mathcal{B}\}$  ( $i = 0, 1$ ) と定義せよ. このとき,  $H_i$  は  $X \times Y$  の cozero-集合で  $H_i \cap (X \times A) = G_i$  である.  $Z = (X \times Y) \setminus (H_0 \cup H_1)$  は  $X \times Y$  の zero-集合だから, 補題2より  $X \times A \subseteq Z' \subseteq (X \times Y) \setminus Z$  をみたす  $X \times Y$  の zero-集合  $Z'$  が存在する.  $Z_i = Z' \setminus H_{1-i}$  ( $i = 0, 1$ ) とおく. このとき,  $Z_0$  と  $Z_1$  は互いに交わらない  $X \times Y$  の zero-集合で  $Z_i \cap (X \times A) = G_i$ . したがって,  $\Phi[Z_i] = \{i\}$  である連続関数  $\Phi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$  が存在する.  $\Phi$  が求める  $\varphi$  の拡張である.  $\square$

さて定理2を証明しよう。森田-保科 [11, 定理 1.3] によって, 任意の基数  $\kappa$  に対し  $X \times A \times D^\kappa$  が  $X \times Y \times D^\kappa$  で  $C$ -embedded であることを示せばよい。  $Z_i$  ( $i = 0, 1$ ) を  $X \times A \times D^\kappa$  の互いに交わらない zero-集合とする。  $\dim(X \times A \times D^\kappa) = 0$  だから, 連続関数  $\varphi : X \times A \times D^\kappa \rightarrow D$  で  $Z_i \subseteq \varphi^{-1}(i)$  ( $i = 0, 1$ ) をみたすものが存在する。いま射影  $\pi_Y : Y \times D^\kappa \rightarrow Y$  と  $g : Y \rightarrow M$  の合成は完全写像で  $X \times Y \times D^\kappa$  は  $cb$ -空間である。したがって, 補題4から,  $\varphi$  は連続関数  $\Phi : X \times Y \times D^\kappa \rightarrow [0, 1]$  に拡張される。  $Z_i \subseteq \Phi^{-1}(i)$  ( $i = 0, 1$ ) だから, [4, 定理 1.17] より  $X \times A \times D^\kappa$  は  $X \times Y \times D^\kappa$  で  $C^*$ -embedded である。さらに補題2と [4, 定理 1.18] より, それは  $C$ -embedded である。□

定理3は, 補題4の代わりに次の補題5を使えば, 定理2と同様に証明出来る。

補題5  $X \times Y$  は  $cb$ -空間,  $A$  は  $X$  の  $P$ -embedded 閉集合とする。このとき, 連続関数  $\varphi : A \times Y \rightarrow D$  は連続関数  $\Phi : X \times Y \rightarrow [0, 1]$  に拡張される。

証明  $G_i = \varphi^{-1}(i)$  ( $i = 0, 1$ ) が  $X \times Y$  の  $cozero$ -集合  $H_i$  に拡張されることを示せば, 補題4と同様に証明出来る。定理1から  $A \times Y$  の開被覆  $\{G_0, G_1\}$  は標準的な rectangular 細分  $\{U_{B,\lambda} \times V : V \in \mathcal{V}_{B,\lambda}, \lambda \in \Lambda_B, B \in \mathcal{B}\}$  を持つ。ここで,  $\{U_{B,\lambda} : \lambda \in \Lambda_B\}$  は  $A$  の  $cozero$ -集合からなる  $\sigma$ -局所有限族である。補題3より,  $X$  の  $cozero$ -集合からなる  $\sigma$ -局所有限族  $\{W_{B,\delta} : \delta \in \Delta_B\}$  と写像  $r : \Delta_B \rightarrow \Lambda_B$  が存在して  $\cup\{U_{B,\lambda} : \lambda \in \Lambda_B\} = \cup\{W_{B,\delta} \cap A : \delta \in \Delta_B\}$  かつ  $W_{B,\delta} \cap A \subseteq U_{B,r(\delta)}$  ( $\delta \in \Delta_B$ ) が成り立つ。  $H_i = \cup\{W_{B,\delta} \times V : (W_{B,\delta} \cap A) \times V \subseteq G_i, V \in \mathcal{V}_{B,r(\delta)}, \delta \in \Delta_B, B \in \mathcal{B}\}$  ( $i = 0, 1$ ) と定義せよ。このとき,  $H_i$  は  $X \times Y$  の  $cozero$ -集合で  $H_i \cap (A \times Y) = G_i$  である。□

定理2, 3が  $\dim = 0$  の仮定なしに証明出来るかどうか筆者は知らない。一方,  $X \times Y$  が  $cb$ -空間でなければ, これらの定理の主張は必ずしも正しくないことが知られている ([12], [23] を見よ)。

#### 4. $X$ が正規空間の場合

定理1と比較するために次の定理を証明する。

定理4 (保科-森田 [5], Pasynkov [16], [18]) 正規空間  $X$  と空間  $Y$  から距離空間  $M$  の上への完全写像  $g$  が与えられ  $X \times M$  が正規であるとする。このとき,  $X \times Y$  の任意の正規開被覆は標準的な rectangular 細分を持つ。

証明の鍵は Filippov によって本質的に証明された次の補題である。

補題6 (Filippov [3]) 空間  $X$ , 全射完全写像  $g: Y \rightarrow T$ ,  $T$  の基底  $\mathcal{B}$  と  $X \times Y$  上の連続な擬距離  $d$  が与えられたとする. 各  $B \in \mathcal{B}$  に対し,  $X$  上の擬距離  $d_B$  を  $d_B(x, x') = \sup\{d((x, y), (x', y)) : y \in g^{-1}[B]\}$  ( $x, x' \in X$ ) で定義する. このとき, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, 次の (1)–(3) をみたす  $X$  の開集合族  $\mathcal{D}_{B,m}$  ( $B \in \mathcal{B}, m \in N$ ) が存在する.

- (1)  $\mathcal{D}_{B,m}$  の各元は互いに交わらない.
- (2)  $\mathcal{D}_{B,m}$  の各元の  $d_B$  に関する直径は  $\varepsilon$  以下である.
- (3)  $\cup\{D \times g^{-1}[B] : D \in \mathcal{D}_{B,m}, B \in \mathcal{B}, m \in N\} = X \times Y$ .

証明 任意の  $B \in \mathcal{B}$  と  $m \in N$  に対し,  $d_B$  に関する直径が  $2^{-m}$  以下の  $X$  の開集合全体の族を  $\mathcal{H}_{B,m}$  で表す. また, 任意の  $x \in X, B \in \mathcal{B}, m \in N$  に対し,  $F_{x,B,m} = \{x' \in X : d_B(x, x') \leq 2^{-1}\varepsilon - 2^{-m+1}\}$ ,  $G_{x,B,m} = St(F_{x,B,m}, \mathcal{H}_{B,m})$  とおく<sup>4</sup>.  $X$  上に整列順序  $\leq$  を与え,  $D_{x,B,m} = St(F_{x,B,m} \setminus \cup_{x' < x} G_{x',B,m}, \mathcal{H}_{B,m+1})$  とおく. このとき,  $\mathcal{D}_{B,m} = \{D_{x,B,m} : x \in X\}$  が求める開集合族である. (1) を示す. もし  $D_{x,B,m} \cap D_{x',B,m} \neq \emptyset$  ( $x' < x$ ) ならば,  $H, H' \in \mathcal{H}_{B,m+1}$  が存在して,  $H \cap H' \neq \emptyset$ ,  $H \cap (F_{x,B,m} \setminus G_{x',B,m}) \neq \emptyset$ ,  $H' \cap F_{x',B,m} \neq \emptyset$  が成り立つ. このとき,  $H \cup H' \in \mathcal{H}_{B,m}$  だから  $H \subseteq H \cup H' \subseteq St(F_{x',B,m}, \mathcal{H}_{B,m}) = G_{x',B,m}$  となり矛盾が生じる. 次に (2) を示す. 任意の  $x_1, x_2 \in D_{x,B,m}$  に対し,  $x_i \in H_i$  かつ  $H_i \cap F_{x,B,m} \neq \emptyset$  をみたす  $H_i \in \mathcal{H}_{B,m+1}$  ( $i = 1, 2$ ) が存在する.  $x'_i \in H_i \cap F_{x,B,m}$  ( $i = 1, 2$ ) をとれ. このとき,  $d_B(x_1, x_2) \leq d_B(x_1, x'_1) + d_B(x'_1, x) + d_B(x, x'_2) + d_B(x'_2, x_2) \leq 2^{-(m+1)} + 2(2^{-1}\varepsilon - 2^{-m+1}) + 2^{-(m+1)} = \varepsilon - 3 \cdot 2^{-m}$ . ゆえに,  $D_{x,B,m}$  の  $d_B$  に関する直径は  $\varepsilon$  以下である. 最後に (3) を示すために, 任意の  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  をとり  $t = g(y_0)$  とおく.  $X$  上の擬距離  $d_t$  を  $d_t(x, x') = \sup\{d((x, y), (x', y)) : y \in g^{-1}(t)\}$  で定義して,  $x_1 = \min\{x \in X : d_t(x_0, x) < 2^{-1}\varepsilon\}$  とおく.  $d_t(x_0, x_1) \leq 2^{-1}\varepsilon - 2^{-n+2}$  をみたす  $n \in N$  をとれ.  $d$  は連続で  $g^{-1}(t)$  はコンパクトだから,  $d_{B'}(x_0, x_1) \leq d_t(x_0, x_1) + 2^{-n+1}$  をみたす  $t \in B' \in \mathcal{B}$  と  $x_0 \in H_0 \in \mathcal{H}_{B',n+1}$  である  $H_0$  が存在する. このとき,  $x_0 \in D_{x_1, B', n}$  であることを示す.  $d_{B'}(x_0, x_1) \leq d_t(x_0, x_1) + 2^{-n+1} \leq 2^{-1}\varepsilon - 2^{-n+2} + 2^{-n+1} = 2^{-1}\varepsilon - 2^{-n+1}$  だから  $x_0 \in F_{x_1, B', n}$  である. 他方, もし  $x < x_1$  かつ  $x_0 \in G_{x, B', n}$  ならば,  $x_0 \in H$  かつ  $F_{x, B', n} \cap H \neq \emptyset$  である  $H \in \mathcal{H}_{B', n}$  が存在する.  $x' \in F_{x, B', n} \cap H$  をとれ. このとき,  $d_t(x_0, x) \leq d_{B'}(x_0, x) \leq d_{B'}(x_0, x') + d_{B'}(x', x) \leq 2^{-n} + (2^{-1}\varepsilon - 2^{-n+2}) < 2^{-1}\varepsilon$ . これは  $x_1$  の最小性に矛盾する. したがって,  $x_0 \in F_{x_1, B', n} \setminus \cup_{x < x_1} G_{x, B', n}$  である.  $x_0 \in H_0 \in \mathcal{H}_{B', n+1}$  だから  $x_0 \in D_{x_1, B', m}$ . ゆえに,  $(x_0, y_0) \in D_{x_1, B', n} \times g^{-1}[B']$ .  $\square$

補題6を使って定理4を証明しよう. 3節と同様に  $M$  は離散空間でないとは

<sup>4</sup>空間  $X$  の部分集合  $F$  と部分集合族  $\mathcal{H}$  に対して,  $St(F, \mathcal{H}) = \cup\{H \in \mathcal{H} : H \cap F \neq \emptyset\}$  と定める.

定してよい.  $B = \bigcup_{n \in N} B_n$  を  $M$  の  $\sigma$ -疎な開基底とする. さて,  $X \times Y$  の正規開被覆  $\mathcal{G}$  をとる. このとき,  $X \times Y$  上の連続な擬距離  $d$  で,  $d$  に関する直径が 1 以下の  $X \times Y$  の部分集合は  $\mathcal{G}$  のある元に含まれるものが存在する. この  $d$  と  $\varepsilon = 1/3$  と  $\mathcal{G}$  に対して補題 6 の条件 (1)–(3) をみたす  $X$  の開集合族  $\mathcal{D}_{B,m}$  ( $B \in \mathcal{B}, m \in N$ ) が存在する. (3) より  $\bigcup \{D \times B : D \in \mathcal{D}_{B,m}, B \in \mathcal{B}, m \in N\} = X \times M$ . したがって,  $m, n \in N$  に対し  $G_{m,n} = \bigcup \{D \times B : D \in \mathcal{D}_{B,m}, B \in \mathcal{B}_n\}$  とおくと  $\{G_{m,n} : m, n \in N\}$  は  $X \times M$  の開被覆. いま  $X \times M$  は正規可算パラコンパクトだから  $X \times M$  の cozero-集合からなる局所有限被覆  $\{J_{m,n} : m, n \in N\}$  で  $\text{cl}_{X \times M} J_{m,n} \subseteq G_{m,n}$  ( $m, n \in N$ ) をみたすものが存在する. 各  $B \in \mathcal{B}$  と  $m, n \in N$  に対して, 点  $t_B \in B$  を任意に選び,  $K_{B,m,n} = \{x \in X : (x, t_B) \in J_{m,n}\}$ ,  $U_{B,m,n} = \{D \cap K_{B,m,n} : D \in \mathcal{D}_{B',m}\}$  とおく. このとき, (1) と  $\text{cl}_X K_{B,m,n} \subseteq \bigcup \{D : D \in \mathcal{D}_{B',m}\}$  であることから  $U_{B,m,n}$  は  $X$  の cozero-集合からなる疎な族である. したがって, 各  $B \in \mathcal{B}$  に対し,  $U_B = \bigcup \{U_{B,m,n} : m, n \in N\}$  とおくと,  $U_B$  は  $X$  で  $\sigma$ -疎である. また, (2) より  $U_B$  の各元の  $d_B$  に関する直径は  $\varepsilon$  以下である. さらに,  $\bigcup \{U \times B : U \in U_B, B \in \mathcal{B}\} = X \times M$  だから  $\bigcup \{U \times g^{-1}[B] : U \in U_B, B \in \mathcal{B}\} = X \times Y$  である. 各  $U \in U$  に対し, もし  $U = \emptyset$  ならば  $\mathcal{V}_U = \{g^{-1}[B]\}$  とする. もし  $U \neq \emptyset$  ならば, まず任意に点  $x_U \in U$  をとる. 次に  $d$  の連続性から,  $Y$  の cozero-集合からなる  $Y$  で  $\sigma$ -局所有限な  $g^{-1}[B]$  の被覆  $\mathcal{V}_U$  で, 各  $V \in \mathcal{V}_U$  について  $\{x_U\} \times V$  の  $d$  に関する直径が  $\varepsilon$  以下のものとする. このとき,  $U \times V$  の  $d$  に関する直径は  $3\varepsilon = 1$  以下である. ゆえに,  $\bigcup \{U \times V : V \in \mathcal{V}_U, U \in U_B, B \in \mathcal{B}\}$  は  $\mathcal{G}$  の標準的な rectangular 細分である.  $\square$

次の系は  $X$  が正規空間の場合に Pasyukov の問題は肯定解を持つことを示す.

系 2 (保科-森田 [5]) 正規空間  $X$  から空間  $X_0$  の上への完全写像  $f$  と空間  $Y$  から距離空間  $M$  の上への完全写像  $g$  が与えられ,  $X_0 \times M$  が正規空間であるとする. このとき,  $X \times Y$  は rectangular product である.

証明 定理 4 と同様に  $M$  が離散空間でないと仮定してよい. したがって, Rudin-Starbird [19] の定理から  $X_0 \times M$  は可算パラコンパクトである.  $f \times g$  は完全写像だから,  $X \times M$  も可算パラコンパクト.  $X$  は正規だから, 森田の定理 (cf. [7]) から  $X \times M$  は正規である. ゆえに, 主張は定理 4 から導かれる.  $\square$



## 参考文献

1. W. W. Comfort and A. W. Hager, The projection mapping and other continuous functions on a product space, *Math. Scand.* **28** (1971), 77-90.
2. R. Engelking, General topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin (1989).
3. V. V. Filippov, On dimension of products of topological spaces, *Fund. Math.* **105** (1980), 181-212 (in Russian).
4. L. Gillman and M. Jerison, Rings of continuous functions, Van Nostrand, Princeton (1960).
5. T. Hoshina and K. Morita, On rectangular products of topological spaces, *Topology and its Appl.* **11** (1980), 47-57.
6. T. Hoshina, Extensions of mappings, in: M. Hušek and J. van Mill eds. *Recent Progress in General Topology*, North-Holland, Amsterdam (1992), 405-416.
7. T. Ishii, On product spaces and product mappings, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 166-181.
8. J. E. Mack, On a class of countably paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 467-472.
9. J. E. Mack, Countable paracompactness and weak normality properties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **148** (1970), 265-272.
10. K. Morita, Čech-cohomology and covering dimension for topological spaces, *Fund. Math.* **87** (1975), 31-52.
11. K. Morita and T. Hoshina,  $P$ -embedding and product spaces, *Fund. Math.* **93** (1976), 71-80.
12. K. Morita, On the dimension of the product of topological spaces, *Tsukuba J. Math.* **1** (1977), 1-6.
13. J. Nagata, Product theorems in dimension theory I, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **15** (1967), 439-448.

14. H. Ohta, Rectangular products with a metric factor, *Q and A in General Topology* **1** (1983), 57-61.
15. H. Ohta, Extensions of zero-sets in the product of topological spaces, *Topology and its Appl.* **35** (1990), 21-39.
16. B. A. Pasynkov, On the dimension of rectangular products, *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 344-347.
17. B. A. Pasynkov, On the dimension of topological products and limits of inverse sequences, *Soviet Math. Dokl.* **22** (1980), 596-601.
18. B. A. Pasynkov, Factorization theorems in dimension theory, *Russian Math. Surveys* **36:3** (1981), 175-209.
19. M. E. Rudin and M. Starbird, Products with a metric factor, *Gen. Topology Appl.* **5** (1975), 235-248.
20. M. Starbird, Extending maps from products, in: N. M. Stavrakas and K. R. Allen eds. *Studies in Topology*, Academic Press, New York (1975), 559-564.
21. K. Tamano, A note on E. Michael's example and rectangular products, *J. Math. Soc. Japan* **34** (1982), 187-190.
22. J. Terasawa, Lemma 1 in 'Q-paracompactness and closed mappings' by T. and K. Chiba, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect A* **11** (1972), 231-234.
23. A. Waśko, Extensions of functions defined on product spaces, *Fund. Math.* **124** (1984), 27-39.