数理解析研究所講究録
903巻 1995年 39-48

二つの冪有界作用素に関する平均エルゴード定理

千葉大学理学部　渚　　勝　　(Masaru Nagisa)
木更津高専　　和田　州平　(Shuhei Wada)

1．序．ヒルベルト空間上の作用素の冪乗について、応用上有用な結果が知られている．特に、ユニタリ作用素の冪乗が作る列の平均極限について述べたフォンノイマンの平均エルゴード定理 [2] は重要で、数多くの応用、拡張が知られている．F. Riesz [3] はフォンノイマンの平均エルゴード定理を冪有界作用素にまで一般化した．

定理 **A**．　A をヒルベルト空間上の冪有界作用素とする．このとき算術平均列 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A^k$ は $PA = AP = P = P^2$ となる作用素 P に強収束する．

本稿では、定理A の拡張および、その応用について述べる．

補題．　A と B をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の冪有界作用素

とする．この時、

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^{i}(I-B)$$

はノルム位相で 0 に収束する．

証明．　作用素の列 $\{R_k\}$ を以下のように定義する．

$$R_k=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^{i}\quad(k=1,2,\ldots).$$

このとき、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^{i}(I-B)\\
=&\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}R_k(I-B)\\
=&\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(R_k-R_{k+1})-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}R_{k+1}\\
&\qquad+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}A^{k+1}\\
=&\frac{1}{n+1}(R_0-R_{n+1})-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}R_{k+1}\\
&\qquad+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}A^{k+1}.
\end{aligned}$$

$\{R_k\}$ と $\{A^k\}$ は有界列だから列 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}R_{k+1}$ と、
列 $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}A^{k+1}$ は ノルム位相で 0 に収束する.

（証明終）

2．定理Aの拡張．下記定理１は定理 A の２変数拡張に相当する．証明の前半はF．Riesz [3] に拠る．

定理 **1.** A と Bをヒルベルト空間上の冪有界作用素とする．射影作用素 P_Aと P_B を、列$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}A^k$ と$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}B^k$ の強収束極限とする．このとき、任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^{i}x=P_AP_Bx.$$

証明. 補題で用いた記号 R_n をここでも使用する．任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して, 列 x_n を次のように定義する．$x_n=B^nx$ ．ここで、空間 $\{x_n-x_{n+1}|n=0,1,2,\ldots\}$ と直交するベクトル y に対して $\langle x_n|y\rangle=\langle x_{n+1}|y\rangle=\langle x|y\rangle$. 定理Aより

$$\langle x|y\rangle=\langle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k|y\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k|y\rangle=\langle P_Ax|y\rangle.$$

故に、$\langle P_A x - x | y \rangle = 0$, 即ち、ベクトル $P_A x - x$ は $\{x_n - x_{n+1} | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ で生成された閉部分空間に含まれる．今、任意の $\epsilon > 0$, に対し、適当に正の整数 rを選べば、

$$
\begin{aligned}
&\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} R_k (P_B x - x) \| \\
\leq &\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} R_k \sum_{i=0}^{r} c_i (x_i - x_{i+1}) \| + M\epsilon \\
= &\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} R_k \sum_{i=0}^{r} c_i (I - B) x_i \| + M\epsilon \\
\leq &\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} R_k (I - B) \| \sum_{i=0}^{r} |c_i| \|x_i\| + M\epsilon.
\end{aligned}
$$

ここで、補題より、列 $\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} R_k (P_B x - Bx)$ は、ノルム位相で 0 に収束する．さらに

$$
\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} R_k P_B x = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} A^{k-i} P_B x \to P_A P_B x.
$$

となるため、$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} R_k \to P_A P_B$.

（証明終）

3．応用．$\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} A^{k-i} B^i$ が強収束するならば、任意の

$x \in \mathcal{H}$に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} A^{k-i} B^{i} x = P_A P_B x,$$

となることは、定理1より明らかである．従って、定理1の直接の結果として以下の定理が得られる．

定理2．　A と B はユニタリ作用素とする．もし、列 $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} A^{k-i} B^{i}$ が強収束すれば、以下の条件 $(*)$ が成立する．

$$(*) \quad FP_AE = FP_BE = FE \; or \; FAE \neq FBE,$$

ここで、F，E はそれぞれ A，B と可換な射影作用素とする．

証明．　$FAE = FBE$と仮定する．1変数の平均エルゴード定理より

$$\begin{aligned} FP_AE &= \lim_{n\to\infty} F \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} A^k E \\ &= \lim_{n\to\infty} F \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} B^k E \\ &= FP_BE. \end{aligned}$$

また、定理1より、

$$\begin{aligned}\|FP_B{}^{\perp}E\| &= \|A^k FP_B{}^{\perp}E\| \\ &= \|\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} A^k FP_B{}^{\perp}E\| \\ &= \|F\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i P_B{}^{\perp}E\| \\ &= \|FP_AP_BP_B{}^{\perp}E\| = 0.\end{aligned}$$

（証明終）

$AB = BA$ の時、もしくは $dim(\mathcal{H}) < +\infty$, の時は、上の条件 $(*)$ は、列 $\frac{1}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i$ が強収束する為の必要十分条件になる.

定理3．　A と B を可換なユニタリ作用素とする．この時 $\frac{1}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i$ が強収束する事と、以下の条件は必要十分である.

$$P_AP_B = P_{A^{-1}B}.$$

証明.　$(\rightarrow)$ $F = I$, $E = P_{A^{-1}B}$ とする．ここで、定理2

より、$FP_AE = FP_BE = FE$ となる．即ち、$P_AP_B = P_{A^{-1}B}$ が成立する．(←) 以下の式は容易に得られる．

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^iP_{A^{-1}B} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^iP_AP_B$$
$$= P_AP_B.$$

また、平均エルゴード定理から

$$\lim_{k\to\infty}\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^iP_{A^{-1}B}{}^{\perp}\|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(A^{-1}B)^iP_{A^{-1}B}{}^{\perp}\|$$
$$= \|P_{A^{-1}B}P_{A^{-1}B}{}^{\perp}\| = 0,$$

となる．上の 2 つの結果から $\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i$ は強収束することが分かる．

（証明終）

定理４．　A と B を有限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素とする．A の固有値λと Bの固有値μに対し、F_λ と E_μ をそれぞれの固有空間への射影作用素とする．この時、$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} A^{k-i}B^i$ が強収束することと以下の条件は必要十分である．

$$\delta_{\lambda,1}\delta_{1,\mu}F_\lambda E_\mu = \delta_{\lambda,\mu}F_\lambda E_\mu,$$

ここで、δ は Kronecker のデルタとする.

証明.　$(\rightarrow)$ $\lambda=\mu$とする. 定理2より

$$\delta_{\lambda,1}F_\lambda E_\mu=\delta_{1,\mu}F_\lambda E_\mu=F_\lambda E_\mu=\delta_{\lambda,\mu}F_\lambda E_\mu.$$

故に、

$$\delta_{\lambda,1}\delta_{1,\mu}F_\lambda E_\mu={\delta_{1,\mu}}^2F_\lambda E_\mu=\delta_{1,\mu}F_\lambda E_\mu=\delta_{\lambda,\mu}F_\lambda E_\mu.$$

$(\leftarrow)$ 作用素$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^i$ は以下のように書くことができる.

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^i=\sum_{\lambda,\mu}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}\mu^iF_\lambda E_\mu.$$

定理3より、$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}\mu^iF_\lambda E_\mu$ は各λ, μに対して収束する. 故に$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^i$ も強収束する.

（証明終）

定理1の他の応用として以下の定理が考えられる.

定理5.　ヒルベルト空間上の冪有界作用素 A と Bが次の条件を満たすとする

$$d=sup_k\|I-\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^i\|<1.$$

この時 $A=B=I$となる.

証明. 定理1で定義した記号 P_A, P_B, R_k をここでも使用する. 仮定から以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned}\|I-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}R_k\| &= \|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(I-A^{k-i}B^i)\| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(I-A^{k-i}B^i)\| \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|I-\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}A^{k-i}B^i\| \\ &\leq d<1.\end{aligned}$$

ここで定理1から

$$\|I-P_AP_B\|\leq d<1.$$

従って P_AP_B は可逆であることが分かる. さらに定理Aから

$$(I-A)P_A=0,\quad P_B(I-B)=(I-B)P_B=0,$$

となる. 故に

$$(I-A)P_AP_B=0,\quad P_AP_B(I-B)=0.$$

$P_A P_B$ は可逆だから、$A = B = I$ が分かる.

（証明終）

系.　ヒルベルト空間上の作用素 A が以下の条件を満たすとする.

$$d = sup_n \|I - A^n\| < 1,$$

このとき $A = I$.

上記系はＣｏｘの定理として知られている [1].

参考文献

[1] R.H.Cox, Matrices all whose powers lie close to the identity, Amer. Math. Monthly, 73(1966),813.

[2] J.von Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, Proc. N.A.S.18 (1932) 70-82.

[3] F.Riesz, Some mean ergodic theorems. J. London Math. Soc. 13(1938), 274-278.