

相対作用素エントロピーをめぐって

大阪教育大学 藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

久保-安藤による Hilbert 空間上の正作用素に対する平均の理論 [17] に基づいて、相対作用素エントロピー $S(A|B)$ を、 A, B が可逆な場合、

$$S(A|B) = A^{1/2} \left(\log A^{-1/2} B A^{-1/2} \right) A^{1/2} = B^{1/2} \eta \left(B^{-1/2} A B^{-1/2} \right) B^{1/2}$$

($\eta(x) = -x \log x$) で定義し、可逆でない場合は、

$$S(A|B) = \underset{\varepsilon \downarrow 0}{s\text{-}\lim} S(A|B + \varepsilon) \quad (\text{単調極限})$$

とする [9]。 $S(A|B)$ は、一般に有界なエルミット作用素として存在するとは限らず、存在条件は、次の下方有界性で与えられる [11] :

$$\text{存在条件 :} \quad \exists c \in \mathbb{R}; \quad c \leq tB - (\log t)A \quad (t > 1).$$

以下、有界作用素として $S(A|B)$ が存在するようなペア (A, B) に話を限る。

このとき、Douglas の majorization theorem [5] に基づいた、泉野の商作用素の理論 [15] を利用すれば、 $S(A|B)$ は次のように構成することができる [8,12] : $R = (A + B)^{1/2}$ としたとき、 $\ker X \supset \ker R$ の条件下で、 $XR = A^{1/2}$ を満たす X が一意的に定まり、

$$S(A|B) = R F(X^* X) R \quad \text{ここで} \quad F(x) = S(x|1-x) = x \log \frac{1-x}{x}.$$

この構成法は、 $S(A|B)$ の性質を証明するのに便利な公式である。

一方、Uhlmann 型の構成法では、 x^t を表現関数とするような (加重幾何) 作用素平均の族を g_t とするとき、

$$S(A|B) = \underset{t \downarrow 0}{s\text{-}\lim} \frac{A g_t B - A}{t} \quad (\text{単調極限})$$

となる [10]。

ここで、安藤 Lebesgue 分解 [3] における絶対連続性と、存在条件の関連に目を向けよう。A が B-絶対連続 とは、

$$A = [B]A \equiv \underset{n \rightarrow \infty}{s\text{-lim}} A : nB \quad (: \text{は並列和 [2, 6]})$$

で特徴づけられるが、実は後述するように $\underset{t \downarrow 0}{s\text{-lim}} A g_t B = [B]A$ となることから、Uhlmann 型構成法の収束を保証する必要条件であることが分かる。もともと存在条件は、

$$\text{核条件 : } \ker A \supset \ker B$$

より強い条件で、

$$\text{値域条件 : } \text{ran } A^{1/2} \subset \text{ran } B^{1/2}$$

より弱いことが分かっていたが、これらの条件間には次の強弱関係があり、すべて逆は成立しないことが分かる：

定理 1. 各条件に以下の関係があり、逆は成立しない：

$$\begin{array}{ccc} \text{値域条件 majorization (1)} & (2) & (3) \quad \text{核条件} \\ \text{ran } A^{1/2} \subset \text{ran } B^{1/2} & \implies \text{存在条件} & \implies B\text{-絶対連続性} \implies \ker A \supset \ker B. \end{array}$$

逆が成立しない例を挙げておく：

$$(1) B = A^2 \quad S(A|A^2) = A \log A^2 - A \log A = A \log A$$

$$(2) A = P_B \quad S(P_B|B) = P_B \log B \quad \text{で有界でない}$$

$$(3) C[0, 1] \text{ で } 1, x \text{ に対応する作用素を } A, B \text{ とする. //}$$

Uhlmann の構成法 [18] では幾何平均で作られた道の微分係数が相対エントロピーであったが、これを一般化して、次の性質を持つ補間的道 m_t を生成する対称な作用素平均 m を補間的平均と呼んだ [10,13]:

$$A m_0 B = A, \quad A m_1 B = B, \quad m_{1/2} = m,$$

$$(A m_r B) m_t (A m_s B) = A m_{(1-t)r+ts} B \quad (0 \leq r, s, t, \leq 1).$$

対称平均は必ずしも補間的でない。補間的平均の典型的な例は、 r -power mean $m^{[r]}$ ($-1 \leq r \leq 1$) と呼ばれるもの [7] で、

$$A g^{[r]} B = A^{1/2} \left(\frac{1 + (A^{-1/2} B A^{-1/2})^r}{2} \right)^{1/r} A^{1/2}$$

で定義され、その補間的道は、

$$A g_t^{[r]} B = A^{1/2} \left((1-t) + t(A^{-1/2} B A^{-1/2})^r \right)^{1/r} A^{1/2}$$

で与えられる。特に、

$$m^{[1]} = a \quad (\text{算術平均}), \quad m^{[0]} = g \quad (\text{幾何平均}), \quad m^{[-1]} = h \quad (\text{調和平均})$$

となっている。

ところで、 $[B]A$ は B -絶対連続部分であるが、幸崎 [16] は、閉部分空間 M を

$$M = \overline{\{y \mid A^{1/2}y \in \text{ran } B\}}$$

とし、それに対する射影を P_M とすると次が成り立つことを示していた：

幸崎の定理. $[B]A = A^{1/2} P_M A^{1/2}$

従って、 A, B が可逆でない場合は、

$$\text{s-lim}_{t \downarrow 0} A m_t B = A m_0 B$$

が一般には成立しない。また、先に触れたように、 $B[A]$ は次の等式から $\text{s-lim}_{t \downarrow 0} A g_t B = [B]A$ となることが分かる：

$$[B]A = \text{s-lim}_{t \downarrow 0} A : \frac{1-t}{t} B = \text{s-lim}_{t \downarrow 0} (1-t) (A g^{[-1]} B).$$

これを、補間的道 $A m_t B$ の極限の問題と見れば、次のように一般化できる：

定理 2. 補間的平均が初期条件 $1m_0 \equiv 0m_1 = 0$ を満たすとき、

$$\text{s-lim}_{t \downarrow 0} A m_t B = A^{1/2} P_M A^{1/2} = [B]A.$$

そうでないとき、 $\text{s-lim}_{t \downarrow 0} A m_t B = A$.

(証明) 初期条件から、 $1m_t 0 = 0m_t 1 = 0$ に注意。泉野式構成法を使うと、

$$F_t(x) = x \left(1 m_t \frac{1-x}{x} \right) \rightarrow x \chi_{(0,\infty)} \left(\frac{1-x}{x} \right) = x \chi_{(0,1)}(x) = x \chi_{[0,1)}(x).$$

P を $1 - XX^*$ の値域射影とすると、

$$F_t(X^*X) \longrightarrow X^*X\chi_{[0,1]}(X^*X) = X^*\chi_{[0,1]}(XX^*)X = X^*PX,$$

$$\text{s-lim}_{t \downarrow 0} A m_t B = RX^*PXR = A^{1/2}PA^{1/2}.$$

初期条件が非零のとき、 $F_t(x) \rightarrow x$ ($t \downarrow 0$) から分かる。//

ところで、補間的道について、 $A m_t B$ は t について凸であることを以前示した [13]。また、可逆な場合に限って、連続性、微分可能性を論じたが、可逆でなくても、次の定理が成り立つことは分かる：

定理 3. 補間的道 m_t について、 $A m_t B$ は $0 < t < 1$ でノルム連続及び微分可能。

(証明) $[0, 1]$ 上の作用素凹関数 $F_t(x) = x m_t(1-x)$ は、常に $F_t(1/2) = 1/2$ を満たし、 $[0, 1/2]$ では単調減少、 $[1/2, 1]$ では単調増加する。 $(0 \leq t \uparrow 1)$ したがって、 t について $C[0, 1]$ の元としてノルム連続だから、泉野式構成法から

$$\|A m_{t+\varepsilon} B - A m_t B\| \leq \|R\| \|F_{t+\varepsilon} - F_t\|_\infty \|R\| \longrightarrow 0.$$

また、以前の考察で凸性を利用すれば少なくとも強（作用素）位相で微分可能で、

$$\varphi_\varepsilon(x) \equiv \frac{F_{t+\varepsilon}(x) - F_t(x)}{\varepsilon} \downarrow \frac{dF_t}{dt}(x) \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

さらにこの導関数が、 x について連続であることが確かめられるので、Dini の定理より、 φ_ε は一様に導関数に収束し、 $A m_t B$ がノルムで微分可能となる。//

それで Uhlmann 型構成法を一般化して、補間的平均 m から補間的道 m_t を作り、その 0 での微係数として、**derivative solidarity** s_m が得られる：

$$A s_m B = \text{s-lim}_{t \downarrow 0} \frac{A m_t B - A}{t}.$$

このとき、 s_m を一種の計量と見れば、 m_t は対応する測地線と見ることができる：

定理 4. m_t は次の式を満たす唯一の補間的道である :

$$\frac{dAm_t B}{dt} = \frac{(Am_t B) s_m(Am_{t+h} B)}{h}.$$

$$\begin{aligned} \text{(証明)} \quad \frac{(Am_t B) s_m(Am_{t+h} B)}{h} &= s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(Am_t B) m_\varepsilon(Am_{t+h} B) - Am_t B}{h\varepsilon} \\ &= s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(Am_{(1-\varepsilon)t+\varepsilon(t+h)} B) - Am_t B}{h\varepsilon} \\ &= s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{(Am_{t+h\varepsilon} B) - Am_t B}{h\varepsilon} = \frac{dAm_t B}{dt}. \end{aligned}$$

この道以外はないことはすぐに確かめられる。//

上の式から、特に

$$\frac{dAg_t B}{dt} = \frac{S(Ag_t B | Ag_{t+h} B)}{h} = u\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(Ag_t B | Ag_{t+h} B)}{h}$$

が分かるが、対応しない道に関しても、左辺と右辺はほとんど等式が成立する。ここでは、特に相対作用素エントロピーについての収束を見るので、道具として対数関数についての収束を確認しておく : $(-1, \infty)$ 上の関数

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

は、 $f(0) = 1$ で、単調減少する連続関数だから、0 にノルム収束する対称作用素の列 E_h について、 $f(\|E_h\|) \leq f(E_h) \leq f(-\|E_h\|)$ となり、 $f(E_h)$ も 1 にノルム収束する。

また、 E_h が有界で、 $E_h \geq -1$, $s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} E_h = 0$ ならば、 $s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} f(E_h) = 1$. 従って、次の結果が得られる :

定理 5. A, B : 可逆正作用素のとき、

$$u\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(Am_t B | Am_{t+h} B)}{h} = u\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(Am_t B + \varepsilon | Am_{t+h} B + \varepsilon)}{h} = \frac{dAm_t B}{dt}.$$

(証明) 前の f を利用して、 $X_t = Am_t B, E_h = X_t^{-1/2} (X_{t+h} - X_t) X_t^{-1/2}$ とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{S(X_t | X_{t+h})}{h} &= X_t^{1/2} \frac{\log X_t^{-1/2} X_{t+h} X_t^{-1/2}}{h} X_t^{1/2} \\ &= X_t^{1/2} \frac{\log(1 + E_h)}{h} X_t^{1/2} \\ &= X_t^{1/2} \frac{E_h f(E_h)}{h} X_t^{1/2} \rightarrow \frac{dX_t}{dt} \text{ (uniformly)}. \end{aligned}$$

さらに、 $dX_t/dt = d(X_t + \varepsilon)/dt$ から、求める等式が得られる。//

非可逆な場合も等号成立を予想するが、今のところ、劣加法性から

$$S(X_t + \varepsilon | X_{t+h} + \varepsilon) \geq S(X_t | X_{t+h}) + S(\varepsilon|\varepsilon) = S(X_t | X_{t+h})$$

だから、次の結果しか言えない：

定理 5' :
$$\text{s-lim}_{h \downarrow 0} \frac{S(Am_t B | Am_{t+h} B)}{h} \leq \text{u-lim}_{h \rightarrow 0} \frac{S(Am_t B + \varepsilon | Am_{t+h} B + \varepsilon)}{h} = \frac{dAm_t B}{dt}$$

$g \geq m$ となる補間的平均については、等号が成立している： $X s_m Y \leq S(X|Y)$ より、

$$\frac{dAm_t B}{dt} = \frac{(Am_t B) s_m(Am_{t+h} B)}{h} \leq \frac{S(Am_t B | Am_{t+h} B)}{h}$$

が分かり、極限の存在と、等号が同時に分かる。//

また、 r -power mean の道については、すべて等号が成り立つ：証明で残っているのは、 $r > 0$ の場合のみである。 $F_t^{(r)}(x) = x m_t^{(r)}(1-x)$ について、 $K(h) = (t+h)/t$ とすれば、 $F_{t+h}^{(r)} \leq K(h)F_t^{(r)}$ となるので、 $X_t = Am_t B$ について

$$X_{t+h} = RF_{t+h}(C)R \leq K(h)RF_t(C)R = K(h)X_t$$

となって互いに majorize するので、 $\lim_{h \downarrow 0} K(h) = 1$ より

$$\exists Y_h; X_{t+h}^{1/2} = Y_h X_t^{1/2}, Y_h^* Y_h \leq K(h), \text{s-lim}_{h \downarrow 0} Y_h^* Y_h = 1_X.$$

さらに $S(X_t | X_{t+h}) = X_t S(1 | Y_h^* Y_h) X_t = X_t (\log Y_h^* Y_h) X_t$, だから

$$\frac{S(X_t | X_{t+h})}{h} = \frac{X_t (\log Y_h^* Y_h) X_t}{h} = \frac{X_t (Y_h^* Y_h - 1) f(Y_h^* Y_h - 1) X_t}{h} \rightarrow \frac{dX_t}{dt} \text{ (strongly). //}$$

最後に情報幾何学的な量を定義しておこう (cf. [1])。相対作用素エントロピーは、

$$S(A|B) = \text{s-lim}_{t \downarrow 0} \frac{Ag_t B - Aa_t B}{t} + B - A$$

の様に变形できるが、これに注目して α -divergence の作用素版を次の正作用素として定義するのは妥当であろう：

$$\begin{aligned} D_\alpha(A, B) &= \frac{4}{1-\alpha^2} (Aa_{(1+\alpha)/2}B - Ag_{(1+\alpha)/2}B) \\ &= \frac{4}{1-\alpha^2} \left(\frac{1-\alpha}{2}A + \frac{1+\alpha}{2}B - Ag_{(1+\alpha)/2}B \right). \end{aligned}$$

このとき、 $\alpha = 0$ については、算術平均と幾何平均の差の 4 倍となり、

$$\begin{aligned} D_1(A|B) &\equiv \text{s-lim}_{\alpha \uparrow 1} D_\alpha(A|B) = -S(B|A) + A - B \\ D_{-1}(A|B) &\equiv \text{s-lim}_{\alpha \downarrow -1} D_\alpha(A|B) = -S(A|B) + B - A. \end{aligned}$$

通常の α -divergence は密度関数を扱い、積分で平均値を取るのので、これらの正作用素を密度作用素として上式のトレースを取れば、 A, B の差の項が消えて、Belavkin-Staszewski の相対エントロピー [4,14] がでてくる。

謝辞. 幸崎定理における M の閉包の取り方が違っていました。それを指摘してくださった泉野先生にこの場を借りてお礼申し上げます。

References

- [1] 甘利俊一・長岡浩司：情報幾何の方法，岩波講座応用数学（対象12），1993.
- [2] W.N.Anderson and R.J.Duffin: Series and parallel addition of matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, **26**(1969), 576-594.
- [3] T.Ando: Lebesgue type decomposition of positive operators, *Acta Sci. Math.*, **38**(1976), 253-260.
- [4] V.P.Belavkin and P.Staszewski: C^* -algebraic generalization of relative entropy and entropy, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A*, **37**(1982), 51-58.
- [5] R.G.Douglas: On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**(1966), 413-416.
- [6] P.A.Fillmore and J.P.Williams: On operator ranges, *Adv. in Math.*, **7**(1971), 254-281.
- [7] J.I.Fujii, F.Kubo and K.Kubo : A parametrization between operator means, *Math. Japon.*, **33** (1988), 201-208.
- [8] J.I.Fujii: On Izumino's view of operator means, *Math. Japon.*, **33** (1988), 671-675.
- [9] J.I.Fujii and E.Kamei: Relative operator entropy in noncommutative information theory, *Math. Japon.*, **34** (1989), 341-348 .
- [10] J.I.Fujii and E.Kamei: Uhlmann's interpolational method for operator means. *Math. Japon.*, **34** (1989), 541-547.
- [11] J.I.Fujii, M.Fujii and Y.Seo: An extension of the Kubo-Ando theory: Solidarities, *Math. Japon.*, **35** (1990), 387-396.
- [12] J.I.Fujii: Operator means and the relative operator entropy, *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser, **59** (1992), 161-172.
- [13] J.I.Fujii and E.Kamei: Interpolational paths and their derivatives, *Math. Japon.*, **39**(1994), 557-560.
- [14] F.Hiai and D.Petz: The proper formula for relative entropy and its asymptotics in quantum probability, Preprint.
- [15] S.Izumino: Quotients of bounded operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106**(1989), 427-435.
- [16] H.Kosaki: Remarks on Lebesgue-type decomposition of positive operators, *J. Operator theory*, **11** (1984), 137-143.
- [17] F.Kubo and T.Ando: Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, **248** (1980) 205-224.
- [18] A.Uhlmann: Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory, *Commun. Math. Phys.*, **54** (1977), 22-32.