数理解析研究所講究録
905巻 1995年 1-5

Radiation Conditions for Relativistic Schrödinger Operators

姫路工大理　楳田登美男 (Tomio UMEDA)

1. 序

相対論的 Schrödinger 作用素は相対論的なスピンなし粒子の状態を記述する作用素であって

$$H=\sqrt{-\Delta+1}+V(x)$$

により定義される。相対論的な粒子の状態を記述する作用素として通常は Dirac 作用素が扱われることが多いが, 相対論的 Schrödinger 作用素は Dirac 作用素にない特徴を持っている。即ち、相対論的 Schrödinger 作用素は多粒子系を扱えるという点において Dirac 作用素と大きく異なる。従って、相対論的 Schrödinger 作用素の研究は歴史的には物質の安定性 (stability of matters) の観点からの研究が多い。この観点からの研究については Lieb[4, Part VII] 及びその文献表を参照されたい。相対論的な多体理論として完全なものは現時点では勿論存在しないが、相対論的 Schrödinger 作用素に基づく多体理論は本質を押さえているはずだ、と言うのが Lieb の主張である。

一方、場の量子論に対する興味から作用素 $\sqrt{-\Delta+1}$ の性質を論じた仕事がある (Lämmerzahl [3]). 場の量子論においては発散の困難が常に付きまとうが、これは粒子を質点と考えることに起因する、即ち、微分作用素 (local な作用素) を扱うことに起因するとされる。よって nonlocal な作用素を扱うことは場の量子論の立場から重要である、との認識にたっている。[3] において Lämmerzahl は作用素 $\sqrt{-\Delta+1}$ が特殊相対論の要請を満たすことを論じている。

さて、ここではスペクトル散乱理論の立場から一体の相対論的 Schrödinger 作用素 H のレゾルベントの性質を述べる。一体の場合に限っても相対論的 Schrödinger 作用素の性質は十分に解明されているとは言いがたいことを注意しておこう。

2. 主定理

相対論的 Schrödinger 作用素 H に対する極限吸収原理と放射条件について述べよう。まず初めに仮定を述べる。

<u>仮定 (A)</u>　ポテンシャル $V(x)$ は実数値可測関数であって、次の不等式を満たす。

$$|V(x)|\le C(1+|x|)^{-1-\epsilon}\qquad(\epsilon>0).$$

仮定 (A) の下で 相対論的 Schrödinger 作用素 H の $L^2(\mathbf{R}^n)$ における自己共役実現が次式により得られる：

$$\begin{cases} H = \sqrt{-\Delta+1} + V(x) \\ \mathrm{Dom}(H) = H^1(\mathbf{R}^n). \end{cases}$$

自己共役実現を再び H と書くことにし、H のレゾルベントを $R(z)$ で表す：

$$R(z) = (H-z)^{-1} \qquad (z \in \rho(H)).$$

極限吸収原理が成り立つことを示すにはまず H のスペクトルを知る必要がある。仮定 (A) の下では H のスペクトルは良く知られている。

定理 (Simon). 仮定 (A) の下で次が成り立つ。

(i) $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H) = [1, \infty)$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) = \phi$.

(ii) $\sigma_{\mathrm{p}}(H)$ の集積点は高々 1 のみであって、しかも $(1, \infty)$ に存在する H の固有値は重複度有限である。

相対論的 Schrödinger 作用素 H に対する極限吸収原理を述べるために記号を導入しよう：

$$L^2_s = \{ f \mid \|f\|_s^2 := \|(1+|x|)^s f\|_{L^2}^2 < +\infty \},$$
$$H^m_s = \{ f \mid \|f\|_{m,s}^2 := \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial_x^\alpha f\|_s^2 < +\infty \}.$$

また $\mathbf{B}(X, Y)$ で Banach 空間 X から Banach 空間 Y への有界な線形作用素の全体を表すことにする。

定理 1 (極限吸収原理). 仮定 (A) の下、 $1/2 < s < \min\{1, (1+\epsilon)/2\}$ とする。各 $\lambda \in (1, \infty) \backslash \sigma_{\mathrm{p}}(H)$ に対し次の 2 つの極限が存在する：

$$R^{\pm}(\lambda) = \lim_{\mu \downarrow 0} R(\lambda \pm i\mu) \quad \text{in} \quad \mathbf{B}(L^2_s;\, H^1_{-s}).$$

さて $\lambda \in (1, \infty) \backslash \sigma_{\mathrm{p}}(H)$, $f \in L^2_s$ に対して

$$u^{\pm} := R^{\pm}(\lambda) f$$

とおくと、定理 1 により u^+, u^- ともに H^1_{loc} の元となり、しかも同一の方程式

$$(\sqrt{-\Delta+1} + V - \lambda) u = f \tag{2.1}$$

を満たすことがわかる。これら 2 つの解 $u^{\pm}$ は適切な放射条件を与えることによって識別できる。即ち、次の定理が成り立つ。

定理 2 (放射条件). 仮定 (A) の下、 $1/2 < s < \min\{1, (1+\epsilon)/2\}$ とする。このとき $u^{\pm}$ は次の $(2.2)_{\pm}$ を満たす (2.1) の一意解である：

$$(2.2)_{\pm} \qquad \begin{cases} u \in L^2_{-s} \cap H^1_{\text{loc}} \\ (\partial_j \mp \sqrt{\lambda^2 - 1}\, x_j/|x|)u \in L^2_{s-1} \qquad (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

3. 証明の方針

定理 1 、定理 2 ともに証明において肝要な部分は $V = 0$ のとき、即ち、自由粒子の相対論的 Schrödinger 作用素 $\sqrt{-\Delta + 1}$ に対して同じ結論を導くところである。ここのところで $-\Delta$ に対する極限吸収原理、放射条件についての結果を用いる。 Agmon[1], Ikebe-Saito[2] の定式化に従ってこれらの結果を述べよう。そのために $-\Delta$ のレゾルベントを $\Gamma_0(z)$ で表すことにする：

$$\Gamma_0(z) = (-\Delta - z)^{-1} \qquad (\, z \in \rho(-\Delta) = \mathbf{C}\backslash[0, \infty)\,).$$

定理 (Agmon[1]). $s > 1/2$ とする。 このとき任意の $\lambda > 0$ に対し次の 2 つの極限が存在する：

$$\Gamma_0^{\pm}(\lambda) = \lim_{\mu \downarrow 0} \Gamma_0(\lambda \pm i\mu) \quad \text{in} \quad \mathbf{B}(L^2_s;\, H^2_{-s}).$$

次に $-\Delta$ に対する放射条件を述べる：

$$(3.1)_{\pm} \qquad \begin{cases} u \in L^2_{-s} \cap H^2_{\text{loc}} \\ (\partial_j \mp \sqrt{\lambda} x_j/|x|)u \in L^2_{s-1} \qquad (j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

$(3.1)_+$ を外向き放射条件、 $(3.1)_-$ を内向き放射条件と呼ぶ。

定理 (Ikebe-Saito[2]) $1/2 < s < 1,\ \lambda > 0$ とする。このとき次が成り立つ。

(i) u が方程式 $(-\Delta - \lambda)u = 0$ の解であって、かつ、 $(3.1)_+$ または $(3.1)_-$ を満たすとすると $u = 0$.

(ii) $f \in L^2_s$ に対し $v_0^{\pm} := \Gamma_0^{\pm}(\lambda) f$ とおくと

$$(-\Delta - \lambda) v_0^{\pm} = f$$

が成り立ち、しかも $v_0^{\pm}$ は $(3.1)_{\pm}$ を満たす。

この節の最初に述べた理由により $V=0$ の場合に定理 1 、定理 2 の証明の方針を簡単に述べよう。作用素 $\sqrt{-\Delta+1}$ の $L^2(\mathbf{R}^n)$ における自己共役実現を H_0 で表すことにし、そのレゾルベントを $R_0(z)$ で表す：

$$R_0(z)=(H_0-z)^{-1} \qquad (z\in\rho(H_0)=\mathbf{C}\backslash[1,\,\infty)\,).$$

<u>H_0 に対する極限吸収原理の証明の方針</u>

はじめに $R_0(z)$ が Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を用いて

$$R_0(z)=\mathcal{F}^{-1}\,\Big[\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{1/2}\,-\,z}\Big]\,\mathcal{F} \tag{3.2}$$

と表されることを注意しよう。$\lambda>1$ が与えられたとし、z は λ の十分小さな近傍に属しているとする。$\gamma(\xi)\in C_0^{\infty}$ を次の性質を満たすように選ぶ:support は球面 $|\xi|=\sqrt{\lambda^2-1}$ の近傍に含まれており、かつ同じ球面の十分小さな近傍上で値 1 を取る。そこで $\operatorname{Im} z\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}R_0(z)&=\mathcal{F}^{-1}\,\Big[\frac{1}{|\xi|^2\,-\,(z^2-1)}\Big]\,\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1}\,\big[(1+|\xi|^2)^{1/2}\gamma(\xi)\,+\,z\big]\,\mathcal{F}\\&\quad+\mathcal{F}^{-1}\,\Big[\frac{(1+|\xi|^2)^{1/2}(1-\gamma(\xi))}{|\xi|^2\,-\,(z^2-1)}\Big]\,\mathcal{F}\\&=:\Gamma_0(z^2-1)\,A(z)\,+\,B(z)\end{aligned}$$

と分解する。 Calderón-Vaillancourt の定理を用いれば $A(z)$ は $\mathbf{C}$ 全体で $\mathbf{B}(L_s^2;\,L_s^2)$−値連続関数であることが、また $B(z)$ は $z=\lambda$ の近傍で $\mathbf{B}(L_s^2;\,H_s^1)$−値連続関数であることが、それぞれ示される。これらの事実と定理 (Agmon) を用いれば H_0 に対する極限吸収原理が導かれる。とくに $R_0(z)$ の境界値は

$$R_0^{\pm}(\lambda)=\Gamma_0^{\pm}(\lambda^2-1)\,A(\lambda)\,+\,B(\lambda)$$

と表されることがわかる。

<u>H_0 に対する放射条件について</u>

$f\in L_s^2$ に対して $u_0^{\pm}:=R_0^{\pm}(\lambda)f$ おくと

$$(\sqrt{-\Delta+1}-\lambda)u_0^{\pm}=f$$

が成り立つことは容易に示される。(3.3) により

$$u_0^{\pm} = \Gamma_0^{\pm}(\lambda^2 - 1)\, A(\lambda) f \, + \, B(\lambda) f$$

と表されるが、このことと定理 (Ikebe-Saito)(ii) 及び H_0 に対する極限吸収原理の証明の方針の項で述べた事実を用いれば $u_0^{\pm}$ が放射条件 $(2.2)_{\pm}$ を満たすことがわかる。次に放射条件を満たす解の一意性を示そう。 u を方程式

$$(\sqrt{-\Delta + 1} - \lambda) u = 0$$

の解であって、$(2.2)_{+}$ 又は $(2.2)_{-}$ を満たすものとする。このとき u は

$$(-\Delta - (\lambda^2 - 1)) u = 0$$

を満たすので、定理 (Ikebe-Saito)(i) を用いれば $u = 0$ となる。

文献表

[1] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa(4) **2** (1975), 151–218.

[2] T. Ikebe and Y. Saito, Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operators, J. Math. Kyoto Univ. **7** (1972), 513–542.

[3] C. Lämmerzahl, The pseudodifferential operator square root of the Klein-Gordon equation, J. Math. Phys. **34**(1993), 3918–3932.

[4] E.H. Lieb, The stability of matters: From atoms to stars, Bull. Amer. Math. Soc. **22**(1990), 1–49.

[5] B. Simon, Phase space analysis of simple scattering system: Extensions of some works of Enss, Duke Math. J. **46**(1979), 119–168.