数理解析研究所講究録
905巻 1995年 15-25

Absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(\mathbb{R}^3)$

京都大学 野村祐司 (Yuzi Nomura)

§1 Introduction

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、$\omega \in \Omega$ に対して、

$$H_\omega \equiv -\Delta + V_\omega(x) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$V_\omega(x) \equiv \sum_{i \in \mathbb{Z}^3} q_i(\omega) f(x-i)$$

とする。ここで、$\{q_i\}_{i\in\mathbb{Z}^3}$ は、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立同分布の実数値確率過程で、その分布は $[0,1]$ 上の一様分布とする。又、$f(x)$ については、ある正の数 C_0, C_1 が存在して、

$$C_0 \chi_{\Lambda_0}(x) \leq f(x) \leq C_1 \quad \text{on } \Lambda_0$$

$$x \notin \Lambda_0 \Longrightarrow f(x) = 0$$

とする。ただし、$\Lambda_0 \equiv [0,1)^3$ で、χ_{Λ_0} は Λ_0 上の characteristic function である。

$V_\omega(x)$ は有界だから、

H_ω ; self-adjoint operator on $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\text{with } \mathrm{Dom}(H_\omega) = H^2(\mathbb{R}^3)$$

が成り立つ。

H_ω はランダム金属媒質中の電子の hamiltonian に対応する operator と考えられ、alloy type 又は Anderson type と呼ばれることがある。

H_ω について次の事が知られている。$\sigma(H_\omega)$ は H_ω のスペクトルを表す。

<u>Proposition 1</u> (Kirsch, Martinelli)

$$\sigma(H_\omega) = [0, \infty) \quad a.s.$$

<u>§2. Absence of diffusion</u>

$E > 0$ を fix して、g_E は以下の性質を満たすとする。

$$(*) \quad 0 \neq g_E \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \ g_E \geq 0, \ \mathrm{supp}\, g_E \subset (0, E)$$

この時、

$$\Phi_\omega \equiv g_E(H_\omega)\psi, \quad \psi \in L^2_2(\mathbb{R}^3) \equiv \{f \,;\, \langle x \rangle^2 f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

$$r_E^2(t) \equiv \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \left| e^{-itH_\omega} \Phi_\omega(x) \right|^2 dx\right]$$

と定義する。但し $\mathbb{E}$ は P による積分を表す。

$r_E^2(t)$ は、スペクトルの下端にエネルギーを持つ電子の初期波動関数 Ψ_ω を時間発展した時、時刻 t における電子の原点からの距離の2乗平均を表すと考えられる。

$V\equiv 0$ 又は periodic の時（自由電子、又は金属の純粋結晶中の電子に対応する。）

$$r_E^2(t) \sim C_E t^2 \qquad (t\to\infty)$$

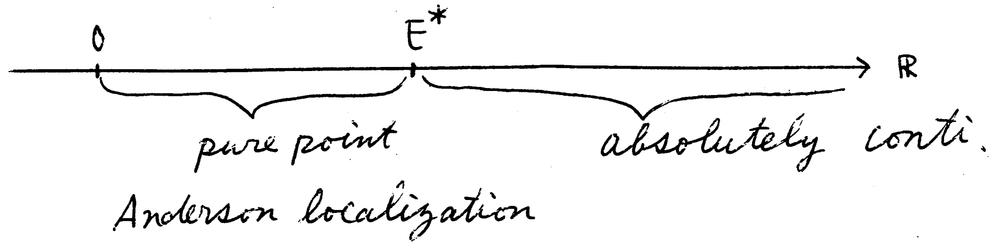
という漸近挙動を示す。ところが、

V が random potential の場合、

$$r_E^2(t) \sim D_E t \qquad (t\to\infty)$$

という漸近挙動を示すと、物理的には思われている。この D_E を diffusion constant と呼ぶ。（D_E の存在は、数学的には示されていないが。）

3次元空間の場合、物理的には、H_ω のスペクトルに関し次のように予想されている。



即ち、ある $E^* > 0$ が存在して、E^* 以下では、pure point spectrum で、固有関数は、exponential decay する。これを Anderson localization (Anderson. '58) と呼ばれる。又、E^* 以上では、絶対連続スペクトルのみが現われる。この予想が正しければ、

$$E:\text{十分小} \implies D_E = 0$$

が成立するであろう。

実際、以下のように ergodic な意味でこれが示せる。

Theorem Z.

$$\exists E^* > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < E \leq E^*$$

$$\implies$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_1^T \frac{r_E^2(t)}{t}\,dt = 0$$

for $\forall g_E$ satisfying $(*)$, $\forall \psi \in L_2^2(\mathbb{R}^3)$.

§3. Theorem Z の証明について

次の proposition から Th. Z がほとんどただちに従う。

Proposition 3

for $0 < {}^{\forall}\eta < 1$ に対し.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\eta T}^{T}\frac{r_E^2(t)}{t}\,dt = 0$$

Proposition 3 の証明について.

$\frac{1}{T}=\varepsilon$ と置き換えて、$r_E^2(t)$ の定義に注意すると、

$$\frac{1}{T}\int_{\eta T}^{T}\frac{r_E^2(t)}{t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{\eta T}^{T}e^{\varepsilon t}e^{-\varepsilon t}\frac{r_E^2(t)}{t}\,dt$$

$$\leqq \frac{e}{\eta}\varepsilon^2\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon t}r_E^2(t)\,dt$$

$$= \frac{e}{2\pi\eta}\varepsilon^2\,\mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\| x R_\omega(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}i)\,\Phi_\omega(x)\|^2 d\lambda\right)$$

ここで $R_\omega(z) \equiv (H_\omega - z)^{-1}$ とする。

$\varepsilon \downarrow 0$ の時、右辺 $\longrightarrow 0$ を示せばよい。

Remark

1. 上の中の左から2番目の不等号の評価は一見、荒そう

だが、

$$\exists \lim_{t\to\infty} \frac{r_E^2(t)}{t} = D \Longrightarrow \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} r_E^2(t)\,dt = D$$

が成り立つので、そうでもない。

之、上よりもさらに強く、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} r_E^2(t)\,dt = 0$$

が示せれば、RAGE Th. を使うことにより、

$$\sigma_c(H_\omega) \cap [0, E^*] = \phi \qquad a.s.$$

が従う。

上式の右辺の考察に戻る。 $\mathrm{supp}\, g_E \subset (\bar{E}, E)$, $0 < \bar{E} < E$ とする。

$$\varepsilon^2 \int_{-\infty}^\infty \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \left|R_\omega(E'+i\varepsilon)\Phi_\omega(x)\right|^2 dx\right] dE'$$

$$= \varepsilon^2 \int_E^\infty \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \left|R_\omega(E'+i\varepsilon)\Phi_\omega(x)\right|^2 dx\right] dE' \quad \cdots\cdots ①$$

$$+ \varepsilon^2 \int_{\bar{E}}^\infty \mathbb{E}\left[\qquad \text{〃} \qquad \right] dE' \quad \cdots\cdots ②$$

$$+ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\bar{E}} \mathbb{E}\left[\qquad \text{〃} \qquad \right] dE' \quad \cdots\cdots ③$$

①, ③ について

$E' \in (-\infty, \tilde{E}] \cup [E, \infty)$ とする。

$$R_\omega(E'+i\varepsilon)\Phi_\omega(x) = f_{\varepsilon,E'}(H_\omega)\psi(x)$$

ここで

$$f_{\varepsilon,E'}(x) \equiv \frac{g_E(x)}{x-E'-i\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

この時

$$\| f_{\varepsilon,E'}(H_\omega) \|_{L_2^2 \to L_2^2} \leqslant \frac{C}{dist(supp\, g_E, E')}$$

が成り立つ。ここで C は、ε, ω によらない。従って、

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |R_\omega(E'+i\varepsilon)\Phi_\omega(x)|^2 dx\right] \leqslant \frac{C}{dist(supp\, g_E, E')^2}$$

$$\sim |E'|^{-2} \quad \text{as } |E'| \to \infty \text{ uniformly in } \varepsilon.$$

これより、①, ③ $\longrightarrow 0$ as $\varepsilon \downarrow 0$ がわかる。

② について.

まず、新たな確率空間と、random Schrödinger operator を用意する。

$$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes (\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3), \mu)$$

μ は $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ 上の Lebesgue measure とする。

$(\omega, k) \in (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ に対し、

$$H_{(\omega,k)} \equiv -\Delta + V_{(\omega,k)}(x), \quad V_{(\omega,k)}(x) = V_\omega(x-k).$$

と定義する。$E' \in [\underline{E}, E]$ とする。以下が成り立つ。

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |R_\omega(E'+i\varepsilon)\Phi_\omega(x)|^2 dx\right]$$

$$\leqq \left(\int_{\mathbb{R}^3} K(x)dx\right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left\{\overline{\mathbb{E}}\left(|\Phi_{(\omega,\xi)}(y)|^4\right)\right\}^{\frac{1}{2}} dy$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^3} |x| K(x) dx\right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left\{\overline{\mathbb{E}}\left(|\Phi_{(\omega,\xi)}(y)|^4\right)\right\}^{\frac{1}{2}} dy$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^3} K(x)dx\right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left\{\overline{\mathbb{E}}\left(|y\Phi_{(\omega,\xi)}(y)|^4\right)\right\}^{\frac{1}{2}} dy$$

ここで、

$$K(x) = K(E'+i\varepsilon; x) \equiv \left\{\overline{\mathbb{E}}\left[|G_{(\omega,\xi)}(E'+i\varepsilon; x, 0)|^4\right]\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$G_{(\omega,\xi)}(E'+i\varepsilon; x, 0) \equiv (H_{(\omega,\xi)} - (E'+i\varepsilon))^{-1}(x, 0)$$

$$\left(= G_\omega(E'+i\varepsilon; x-\xi, -\xi) \right)$$

$\overline{\mathbb{E}}$ は $\overline{P}$ による積分を表す。

$$\Phi_{(\omega,\xi)}(y) \equiv g_E(H_{(\omega,\xi)})\psi_{(\omega,\xi)}(y)$$

$$\psi_{(\omega,\xi)}(y) \equiv \psi(y-\xi)$$

と定義する。まず、

$\int_{\mathbb{R}^3} \left\{\overline{\mathbb{E}}\left(|y\Phi_{(\omega,\xi)}(y)|^4\right)\right\}^{\frac{1}{2}} dy$ について。

$g_E \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ だから、$g_E(H_{(\omega,\xi)})$ は $L_2^2(\mathbb{R}^3) \to L_2^\infty(\mathbb{R}^3)$ の

有界作用素となるので、

$$\left|\langle y\rangle^2 \Phi_{(\omega,t_k)}(y)\right| = \left|\langle y\rangle^2 g_\varepsilon(H_{(\omega,t_k)})\Psi_{(\omega,t_k)}(y)\right| \leq C$$

Cはω, t_kによらない。従って

$$\left|\Phi_{(\omega,t_k)}(y)\right| \leq \frac{C}{1+y^2}$$

これと、$g_E(H_{(\omega,t_k)})$が$L^2_2(\mathbb{R}^3)\to L^2_2(\mathbb{R}^3)$の有界作用素で、そのnormは$\omega$, t_kによらない定数で押さえられることを用いると、

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left\{\mathbb{E}\left(\left|y\,\Phi_{(\omega,t_k)}(y)\right|^4\right)\right\}^{\frac{1}{2}}dy < C$$

が示される。ここでCはω, t_kによらない。

上式の評価で、ε, E'によっているのは被積分関数に$K(x)$が入っている積分の部分だけであり、それ以外の部分は今のことより有限であることがわかったので、すべては以下のTheorem 4に帰着される。

<u>Theorem 4</u>

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)\left\{\mathbb{E}\left(\left|G_{(\omega,t_k)}(E'+i\varepsilon;x,0)\right|^4\right)\right\}^{\frac{1}{4}}dx = 0$$

uniformly in $E'\in[\underline{E},E]$

$$\mathbb{E}\left(|G_{(\omega,k)}(E'+i\varepsilon\,;x,0)|^4\right)$$
$$=\mathbb{E}\left[\int_{[0,1)^3}|G_\omega(E'+i\varepsilon\,,x-k,-k)|^4\,dk\right]$$

に注意すると、Theorem 4 は次の Theorem 5 より従う。

<u>Theorem 5</u>

$\forall p>0$, $\exists E^*(p)>0$, $\exists K_p>0$ s.t.

$0<E\leqslant E^*(p)$

$\Longrightarrow$

$$P\left\{\omega\,;\,|G_\omega(E+i\varepsilon\,;x,y)|\leqslant\max\left\{e^{m(E)(NL(E)^2-|x-y|)},\ \frac{e^{m(E)(NL(E)^2-|x-y|)}}{|x-y|}\right\}\ \text{for}\ \forall x\in\mathbb{R}^3,\ \forall y\in[0,1)^3\right\}$$
$$\geqq 1-\frac{K_p}{N^p}$$

for $\forall N\in\mathbb{N}$ uniformly in $\varepsilon>0$.

ここで $m(E)={}^{\exists}C E^{1/2}$, $L(E)=[E^{-1/2}]$

参考文献

[1] J.M. Combes and P.D. Hislop, Localization for some continuous random hamiltonians in d-dimension, preprint.

[2] J. Fröhlich and T. Spencer, Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy, Comm. Math. Phys. 88. 151-184 (1983)

[3] W. Kirsch and F. Martinelli, On the spectrum of random Schrödinger operators, Comm. Math. Phys. 85, 329-350 (1982)

[4] F. Martinelli and H. Holden, On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(R^d)$, Comm. Math. Phys. 93, 197-217 (1984)