

A global identifiability theorem for the Schrödinger
equation in a magnetic field

東京理科大 中村 玄 (Gen Nakamura)

§1. 序

初めにこの研究は, Sun 氏と Uhlmann 氏との共同研究である
事を断つておきたい。

$n \geq 3$ とし, 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。

考える Schrödinger 作用素 $H_{\vec{A}, \varphi}$ は,

$$H_{\vec{A}, \varphi} = \sum_{j=1}^n (-i \partial_{x_j} + A_j(x))^2 + \varphi(x)$$

とする。ここで $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n) \in C^1(\bar{\Omega})$ は magnetic potential,

$\varphi \in L^\infty(\Omega)$ は electric potential である。なお各 A_j と φ は実数
値関数である事に注意。

まず次の順向題を考える。

順向題 (BP):

$$(BP) \begin{cases} H_{\vec{A}, \varphi} u = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \end{cases}$$

以下常に次の仮定をおく。

仮定: $0 \notin \{\text{eigenvalue of (BP)}\}$

良く知られている様に次の事実が有りたつ。

事実: (BP)の解 $u \in H^1(\Omega)$ が"た"て"一"つ存在する。

そこで Dirichlet-Neumann (= D-N) map $\Lambda_{\vec{A}, q} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

を次の様に定める。

定義: $\forall f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \Lambda_{\vec{A}, q}(f) = \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_{\partial\Omega} + i(\vec{A} \cdot \vec{N})f$

但し \vec{N} は $\partial\Omega$ の単位外法線ベクトル場である。

次に逆問題として $\Lambda_{\vec{A}, q}$ により, \vec{A}, q が同定 (= 決定)

可能かどうかを考えてみる。この逆問題を考えるに当っては,

次の $\Lambda_{\vec{A}, q}$ についての gauge invariance に注意する必要がある。

事実 (gauge invariance): $g \in C^1(\Omega) \Rightarrow \Lambda_{\vec{A} + \nabla g, q} = \Lambda_{\vec{A}, q}$

従って我々の逆問題の定式化は次の様になる。

逆問題: $\Lambda_{\vec{A}, q}$ により $\text{rot } \vec{A}, q$ が同定可能か?

ここでは特に同定が一意的であるかどうかに関心をあてて考えて行く事にする。

注意: この問題の肯定的解決は, コンパクト台をもつ \vec{A}, q に対して固定されたエネルギーの下での逆散乱問題の一意的性を示すのに役に立つ。

分っている結果: Sun 氏による次の結果 (Trans. AMS, 338, '93, pp. 953-969) がある。即ち

$$\vec{A} \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \quad \|\text{rot } \vec{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1, \quad q \in L^\infty(\Omega)$$

\Rightarrow OK

我々の結果：次の定理 A と定理 B が有りたつ。

$$\text{定理 A} \quad \vec{A}_j, q_j \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad (j=1, 2), \quad \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{A}_1) = \text{rot}(\vec{A}_2), \quad q_1 = q_2 \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{定理 B} \quad \vec{A}_j \in C_0^\infty(\Omega), \quad q_j \in L^\infty(\Omega) \quad (j=1, 2), \quad \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{A}_1) = \text{rot}(\vec{A}_2), \quad q_1 = q_2 \quad \text{in } \Omega$$

§2. 定理の証明の概略

初めに定理 A は定理 B より従う事を示す。次の定理 C を用いる。

$$\text{定理 C} \quad \vec{A}_j, q_j \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad (j=1, 2), \quad \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, \quad \partial_x^\alpha (\text{rot } \vec{A}_1) = \partial_x^\alpha (\text{rot } \vec{A}_2) \quad \text{on } \partial\Omega$$

証明は、Nakamura-Sun-Uhlmann (to appear in Math. Annalen)

を参照されたい。

さて $\vec{A}_j, q_j \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad (j=1, 2), \quad \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$ とする。今 $\bar{\Omega}$ を含む原点中心、半径 $R > 0$ の開球 B_R をとる。そして $q_j' \in L^\infty(B_R)$ を $q_j \quad (j=1, 2)$ のゼロ拡張とする。必要ならば "gauge invariance" を用いて $\vec{A}_j \quad (j=1, 2)$ の何れか一方を修正すれば、定理 C より、 $\vec{A}_j' = \vec{A}_j \quad \text{in } \Omega \quad (j=1, 2), \quad \vec{A}_1' = \vec{A}_2' \quad \text{on } B_R \setminus \Omega$ を満たす $\vec{A}_j' \in C_0^\infty(B_R) \quad (j=1, 2)$ が存在する。更に必要ならば、 $R > 0$ を

適当に調節して, $\exists B_R$ に対して $\Lambda_{\vec{A}_j, q_j'} (j=1, 2)$ が定義出来る様にするものとする。このとき

$$\begin{cases} \vec{A}_j' = \vec{A}_j, & q_j' = q_j & \text{on } \Omega \quad (j=1, 2) \\ \vec{A}_1' = \vec{A}_2', & q_1' = q_2' = 0 & \text{on } B_R \setminus \Omega \\ \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2} \end{cases}$$

より, 容易に $\Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$ が示せる。従って $\Omega = B_R$ として $\vec{A}_j' \in C_0^\infty(B_R), q_j' \in L^\infty(B_R) (j=1, 2)$ について定理 B を適用すると, 定理 A の結論が従う。

次に定理 B の証明について説明する。Sun 氏の証明と比べて目新しい点は, $\|\text{rot } \vec{A}_j\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1 (j=1, 2)$ の条件が無くとも後述の "complex geometric optic solutions" が構成出来る点にある。そこで以下では主に "complex geometric optic solutions" の構成の話を中心にして定理 B の証明を説明する。

まず定理 B の仮定の条件を仮定する。 $\Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$ と Green の公式より, 次の key identity を得る。

$$\text{key identity: } i \int_{\Omega} (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) \cdot (u_1 \nabla \bar{u}_2 - \bar{u}_2 \nabla u_1) dx + \int_{\Omega} (\vec{A}_1^2 - \vec{A}_2^2 + q_1 - q_2) \times u_1 \bar{u}_2 dx = 0$$

$$\text{for } \forall u_j \in H^1(\Omega), H_{\vec{A}_j, q_j} u_j = 0 \text{ in } \Omega$$

この key identity 内の $u_j (j=1, 2)$ として, 次に述べる complex geometric solutions $u_j (j=1, 2)$ を取る。

Fourier 変数 $0 \neq k \in \mathbb{R}^n$ を任意に固定したとき, 単位ベクトル $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^n$ を k, γ_1, γ_2 が互いに直交する様にする。このとき $H_{A_j, b_j} u_j = 0$ in Ω ($j=1, 2$) を満たす complex geometric solutions $u_j(x, \xi_j) = e^{\xi_j \cdot x + \phi_j(x, \hat{\xi}_j)} (1 + w_j^{-\alpha}(x, \xi_j)) \in H^1(\Omega)$ ($j=1, 2$) が存在する。 \square

$$(*) \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{i}{2} k + \tilde{\xi}, & \bar{\xi}_2 = \frac{i}{2} k - \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} = \lambda \zeta + g(\lambda, k) \gamma_1, & g(\lambda, k) = O(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \rightarrow \infty) \text{ (for each fixed } k) \\ \zeta = \gamma_1 + i\gamma_2 \end{cases}$$

$$\|w_j\|_{H^1(\Omega)} \leq C |\xi_j|^{-\alpha} \quad (\alpha=0, 1)$$

$$(**) \quad \phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \hat{\xi}_j \cdot \nabla \phi_j = -2 \hat{\xi}_j \cdot \vec{A}_j, \quad \hat{\xi}_j = |\xi_j|^{-1} \xi_j$$

である。この証明については後でコメントする事にして定理 B の証明に戻切りをつける。 complex geometric solutions u_j ($j=1, 2$) を代入した key identity について $\lambda \rightarrow \infty$ とすると,

$$\int_{\Omega} e^{i k x + \phi_1 + \bar{\phi}_2} \zeta \cdot (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) dx = 0$$

これを (*), (**) を用いて変形すると,

$$i \int_{\partial \Omega} e^{i k x} (z \cdot N) e^{\bar{\Psi}} d\bar{s} = 0, \quad \bar{\Psi} = \phi_1 + \bar{\phi}_2$$

更に積分幾何学の論法を適用すると,

$$\gamma_1 \int_{\Omega} e^{ik \cdot x} (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) dx = 0$$

が従う。これより直ちに $\text{rot}(\vec{A}_1) = \text{rot}(\vec{A}_2)$ in Ω を得、gauge

invariance より、 $\Lambda_{\vec{A}_2, q_2} = \Lambda_{\vec{A}_1, q_2}$ 。仮定の $\Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$ と組み

合わせて $\Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_1, q_2}$ 。この段階では、 $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$ と考えて

より。こう考えた時 $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} (\phi_1 + \bar{\phi}_2) = 0$ とある事に注意。再び

Key identity より、 $\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 \bar{u}_2 dx = 0$ 。ここで $\Delta \rightarrow \infty$ として上の注意を使うと、

$$\int_{\Omega} e^{ik \cdot x} (q_1 - q_2) dx = 0.$$

従って $q_1 = q_2$ in Ω .

最後は complex geometric solutions u_j ($j=1, 2$) の構成に依りてコメントする。以下 index j を省く。まず w についての方程式の形をみる。

$$w \text{ の方程式: } (***) \quad M_{\xi} w - g w = g$$

$$\text{ここで } M_{\xi} w = \{ \Delta + 2\xi \cdot \nabla + 2(\nabla \phi + i\vec{A}) \cdot \nabla \} w,$$

$$g = \vec{A}^2 - i \nabla \cdot \vec{A} + q - 2i \vec{A} \cdot \nabla \phi - \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \Delta \phi \in L^{\infty}(\Omega).$$

M_{ξ} の right inverse M_{ξ}^{-1} の存在等については次がなりたつ。

補題 $\exists R > 0; \forall |\xi| \geq R, \exists M_{\xi}^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$

$$\|M_{\xi}^{-1}(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq C |\xi|^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|M_{\xi}^{-1}(f)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$\left. \begin{array}{l} \|M_{\xi}^{-1}(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq C |\xi|^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \|M_{\xi}^{-1}(f)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{array} \right\} (f \in L^2(\Omega), |\xi| \geq R)$

ここで C は ε に無関係な定数である。

この補題の証明は、 M_{ε} と Δ_{ε} との intertwining (= transmutation) operator を構成することにより示される。詳細は前出の Nakamura - Sun - Uhlmann 論文を見られたい。