数理解析研究所講究録
905巻 1995年 75-85

磁場をもつ Schrödinger 作用素の固有値に対する準古典極限

岐阜大学教養部　松本裕行 (Hiroyuki MATSUMOTO)

1. Introduction

V を $\mathbf{R}^d$ 上の非負値関数, $A=(A_1,...,A_d)$ を $\mathbf{R}^d$ 値関数とする. A は微分一次形式 (1-form) $\sum_i A_i dx_i$ と同一視し, 1-form も A と書く. λ を Planck 定数の逆数にあたる正のパラメーターとし, 次で定義される Schrödinger 作用素 $H_0(\lambda)$, $H(\lambda)$ を考える.

$$H_0(\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}-\lambda A_i\right)^2, \tag{1.1}$$

$$H(\lambda)=H_0(\lambda)+\lambda^2 V. \tag{1.2}$$

本稿においては, 簡単のため, V, A_i が C^∞ であることを仮定する. 従って, $H_0(\lambda)$, $H(\lambda)$ は $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ 上本質的自己共役である. 本稿を通じてポテンシャルが滑らかな関数で与えられる $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ 上本質的自己共役な作用素のみを考え, その $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の自己共役拡大も同じ記号で表すことにする.

目的は, $H_0(\lambda)$, $H(\lambda)$ がそのスペクトルの下端から始まる多重度有限の固有値 $\mu_n(\lambda)$ をもつ場合をポテンシャル A, V に適当な仮定をおいて考えたとき, 各 $\mu_n(\lambda)$ の $\lambda\to\infty$ としたときの漸近挙動をできるだけ具体的な形で与えることである. 具体的には, $H(\lambda)$ を考えて V が井戸型であることを仮定した場合, 及び $H_0(\lambda)$ を考えてスペクトルが離散スペクトルのみからなることを仮定した場合を考察する. 前者の問題に対する考察の中で興味深い直交多項式系の族が得られるのでこれについても触れる.

$\mu_n(\lambda)$ の $\lambda=\infty$ での漸近展開, 対応する固有関数の漸近挙動もいくつかの場合には論ずることができるが, 本稿においては固有値 $\mu_n(\lambda)$ の漸近挙動の主要項にのみ着目して議論を進める.

2. 井戸型スカラーポテンシャル

本節では, V は次をみたすとして (1.2) で定義される Schrödinger 作用素 $H(\lambda)$ を考える.

(V.1) (i) $V \geqq 0$ かつ V の零点集合は有限集合 $\{p^a\}_{a=1}^N$, $N \geqq 1$;
(ii) V の各零点における Hessian, $(\mathrm{Hess}\, V)(p^a) = \left\{ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(p^a) \right\}_{i,j=1,\dots,d}$, は非退化 ;
(iii) $\liminf_{|x|\to\infty} V(x) > 0$.

このとき V は井戸型であるという.

次の基本的な命題が, Simon [10] と同様に証明できる.

命題 2.1. (V. 1) の下で, 任意の自然数 M に対して$\lambda_M > 0$ が存在して次をみたす : $\lambda > \lambda_M$ なら, 任意のベクトルポテンシャル A に対して, $H(\lambda)$ はその本質的スペクトルの下に M 個以上の離散スペクトル $\{\mu_n(\lambda)\}$ をもつ.

さらに, 各固有値 $\mu_n(\lambda)$ が $\lambda \to \infty$ のとき $O(\lambda)$ であることも分かる. 我々の目的は

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\, \mu_n(\lambda)$$

を, できるだけ具体的な形で求めることである.

磁場を考えない場合は, V の各零点において調和振動子を独立に考えることにより, $H(\lambda)$ の固有値, 固有関数が λ に関して漸近展開されることは良く知られている (Helffer [2], Simon [10], [11] 及びこれらの参考文献参照) . さらに, Helffer-Sjöstrand , Maslov, Simon 達は, 零点間の相互作用 (トンネル効果) に関することまで深い解析を行っている.

磁場を考える場合も, 命題 2.1 に一端が見られるように, 井戸型のスカラーポテンシャル V の零点における挙動が $\mu_n(\lambda)$ の漸近挙動において最も重要で, 磁場はその摂動であるとも思える. 実際, Helffer-Sjöstrand [3] は, 磁場が十分小さいという条件の下で, 我々と同じ問題及びトンネル効果に関して考察している. しかし, [3] においては $\mu_n(\lambda)$ の漸近展開は具体的には与えられていない.

我々は磁場を摂動項とは考えず, 従って磁場の大きさに対する仮定はしない.

$\mu_n(\lambda)$ の漸近挙動を調べるには V の零点 p^a の近傍を考えれば良いということから，そこでは一様磁場を考える．つまり，調和振動子の代わりに次の作用素を考える．

$(\mathrm{Hess}\,V)(p^a)$ の固有値を $k_1(a)^2,\dots,k_d(a)^2, k_i(a)>0$，とし，$B(a)=(B_{ij}(p^a))_{i,j=1,\dots,d}$，$B_{ij}(x)=\partial_i A_j(x)-\partial_j A_i(x)$，とおく．$p^a$ のまわりの座標系 $(\xi_1,\dots,\xi_d)$ を $(\mathrm{Hess}\,V)(p^a)$ が対角化されるようにとり，

$$V_a(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}k_i(a)^2\xi_i^2, \qquad b^a(\xi)=\frac{1}{2}B(a)\xi,$$

で与えられるスカラーポテンシャル V_a，ベクトルポテンシャル b^a をもつ Schrödinger 作用素を K^a とする：

$$K^a=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}-b_i^a\right)^2+V_a.$$

さらに，$K^a(\lambda)$, $\lambda>0$，を

$$K^a(\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}-\lambda b_i^a\right)^2+\lambda^2 V_a$$

で定義する．

K^a のスペクトル $\sigma(K^a)$ は離散スペクトルのみからなる．$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mu_1\leqq\mu_2\leqq\dots$，を

$$\bigcup_{a=1}^{N}\sigma(K^a)=\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad (\text{多重度も込めて})$$

によって定めると，本節の主定理を述べることができる．

定理 2.2. 次のいずれかを仮定する．

(V. 2) $\delta>0$ が存在して，$|x|$ が十分大なら $V(x)\geqq|x|^\delta$;

(A. 1) $\partial_k B_{ij}(p^a)=0, i,j,k=1,\dots,d, a=1,\dots,N.$

このとき，すべての $n\in\mathrm{N}$ に対して次が成り立つ：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\,\mu_n(\lambda)=\mu_n.$$

(V.2), (A.1) を仮定した場合それぞれで証明は全く異なるが，いずれも誤差項の評価にのみ必要な技術的な仮定である．

さらにどちらの証明も, $H(\lambda)$ が V の零点 p^a の近傍では $K^a(\lambda)$ のように見える, という素朴なアイディアに基づく. もちろん, 実際には $K^a(\lambda)$ とは gauge の取り方を変えたユニタリ同値な作用素を考える必要がある.

$d=2$ の場合は, μ_n 及び対応する K^a の固有関数を具体的に与えることができ, 固有関数が興味深い直交多項式系を与えることが分かる. これについては 4 節において述べる.

証明の詳細は [6] を参照されたい. ここでは 4 節と関わりのある (V.2) を仮定したときの証明の概略を述べるに止める.

(V.2) の下で, $H(\lambda)$ のスペクトルは離散スペクトル $\{\mu_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ のみから成る. $\mu_n(\lambda)=O(\lambda)$ であることから $N_\lambda(\mu)= {}^{\#}\{n;\lambda^{-1}\mu_n(\lambda)<\mu\}$, とおいて

$$\mathrm{Tr}(\exp(-tH(\lambda)/\lambda))=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-t\mu_n(\lambda)/\lambda)=\int_0^\infty e^{-t\mu}dN_\lambda(\mu),$$

を考える.

上に述べたアイディアに基づき, (V.2) を用いると, 任意の $\delta>0$ に対して

$$\mathrm{Tr}(\exp(-tH(\lambda)/\lambda))=\sum_{a=1}^{N}\int_{|x|<\delta}\exp(-tK^a(\lambda)/\lambda)(x,x)dx\cdot(1+o(1)),\ \ \lambda\to\infty,$$

が証明できる. ここで, $\exp(-tK^a(\lambda))(x,y)$ は $K^a(\lambda)$ で生成される半群の積分核 (heat kernel) である. 筆者 [6] は, $A=0$ のときの Watanabe [15] の方法を参考にして, Malliavin calculas を用いて証明した.

さらに, K^a が 2 次の Hamiltonian (4 節参照) であることから, $\sqrt{\lambda}x=y$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\exp(-tH(\lambda)/\lambda))&=\sum_{a=1}^{N}\int_{|y|<\sqrt{\lambda}\delta}\exp(-tK^a)(y,y)dy\cdot(1+o(1))\\&=\sum_{a=1}^{N}\mathrm{Tr}(\exp(-tK^a))\cdot(1+o(1))\end{aligned}$$

を得る. 従って, $N(\mu)= {}^{\#}\{n;\mu_n<\mu\}$ とおくと

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-\mu t}dN_\lambda(\mu)=\int_0^\infty e^{-\mu t}dN(\mu),\quad t>0,$$

であり, Laplace 変換の連続性から 定理 2.2 の結論を得る.

次の問題は, μ_n を具体的に表せないか, ということである. K^a が 2 次であることから, 対応する古典力学を考えることによりこれは可能である. 節を改め, $d=2$ の場合に話を限って 4 節において述べることにする.

3. $H_0(\lambda)$ の固有値に対する準古典極限

本節では (1.1) によって定義される Schrödinger 作用素 $H_0(\lambda)$ を考える:

$$H_0(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_j} - \lambda A_j\right)^2.$$

$H_0(\lambda)$ に対しては, 命題 2.1 のような固有値の存在定理を述べることはできないので, $H_0(\lambda)$ が離散スペクトルのみをもつことを仮定して考察する. $\|dA(x)\|$ が $|x| \to \infty$ のときあまり大きな振動をせずに ∞ に発散すれば, $H_0(\lambda)$ がすべての $\lambda > 0$ に対して離散スペクトルをもつ. 詳しくは, Iwatsuka [5] 参照.

$H_0(\lambda)$ の固有値を多重度も込めて $\{\mu_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ と記す. $\mu_n(\lambda)$ の $\lambda \to \infty$ としたときの漸近挙動が, 磁場の大きさの最小値, つまり 2-form dA のノルムの最小値で決まることは想像に難くない. そこで, どのようなノルムを考えれば良いかが問題になるが, 次を考えれば良いのを予想することも難しいことではないであろう.

$B_{ij}(x) = \partial_i A_j(x) - \partial_j A_i(x)$ とおき, d 次実歪対称行列 $(B_{ij}(x))$ の固有値を$\pm\sqrt{-1}b_i(x)$, $b_i(x) \geqq 0, i = 1, ..., [d/2]$, とする. さらに,

$$b(x) = \sum_{i=1}^{[d/2]} b_i(x), \qquad b_{min} = \min\{b(x); x \in \mathbf{R}^d\},$$

とおく.

このとき次が成り立つ.

定理 3.1. $H_0(\lambda)$ のスペクトルが離散スペクトル $\{\mu_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ のみから成ることを仮定すると, すべての n に対して

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\, \mu_n(\lambda) = \frac{1}{2}\, b_{min}$$

が成り立つ.

証明について触れておく.

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\,\mu_n(\lambda) \geqq \frac{1}{2}\,b_{min}$$

は, Ueki [13] の結果から直ちに分かる.

逆の不等号の証明は, 基本的には Simon [10] に基づき, 定理 2.2 において (A.1) を仮定した場合の証明に工夫を加えることによってなされるが, ここでは省略する ([8] 参照).

また, 定理 3.1 の証明は, 2 節で論じた井戸型のスカラーポテンシャル V をもつ場合で, V の零点における Hessian が退化した場合にも適用できる. このとき, 2 次の作用素 K^a は本質的スペクトルをもち, 定理 3.1 と同様, 退化した収束定理が得られる ([8]).

4. 2 次の HAMILTONIAN と付随する直交多項式系

本節では, 対応する古典力学の Hamiltonian が運動量, 位置ベクトルに関する 2 次の多項式で与えられるという意味で 2 次の Schrödinger 作用素について考察する. 固有関数から作られる直交多項式系について, Hermite 多項式, 複素 Hermite 多項式と関連させて議論するため, 2 次元ユークリッド空間上の作用素に話を限る.

$k, \ell > 0, b \in \mathbf{R}$, に対して, $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上の自己共役作用素 $P = P(k,\ell;b)$ を次で定義されるものとする.

$$P = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} - c_2 b x_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} + c_1 b x_1\right)^2 + \frac{1}{2}(k^2x_1^2 + \ell^2 x_2^2).$$

ただし, $c_1 = k/(k+\ell), c_2 = \ell/(k+\ell)$ であり, 前節で与えた 2 次の作用素 K^a と異なり gauge の取り方を変えている. これは, Gauss 関数 ϕ_0 を

$$\phi_0(x_1,x_2) = \left(\frac{c_1c_2m_1^2}{\pi^2}\right)^{1/4}\exp(-m_1(c_1x_1^2 + c_2x_2^2)/2), \quad m_1 = ((k+\ell)^2 + b^2)^{1/2},$$

で定義すると, ϕ_0 が P の最小固有値 $m_1/2$ に対応する固有関数になっていることによる.

U を $\exp(\sqrt{-1}(c_1 - 1/2)bx_1x_2)$ によって定義される掛け算作用素とすると, 前節に与えた作用素 K

$$K = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}bx_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}bx_1\right)^2 + \frac{1}{2}(k^2x_1^2 + \ell^2x_2^2).$$

に対して, $U^*PU = K$ である.

P の固有値, 固有関数を与えるため, P を生成作用素, 消滅作用素を用いて表現する. このため

$$
\begin{aligned}
&m_2 = ((k-\ell)^2 + b^2)^{1/2},\ s_1 = \frac{m_1+m_2}{2},\ s_2 = \frac{m_1-m_2}{2},\\
&\alpha_1 = \sqrt{\frac{s_1^2-\ell^2}{2m_1m_2}},\ \beta_1 = \mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{s_1^2-k^2}{2m_1m_1}},\\
&\alpha_2 = \mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\ell^2-s_2^2}{2m_1m_2}},\ \beta_2 = \sqrt{\frac{k^2-s_2^2}{2m_1m_2}},
\end{aligned}
$$

とおき, 消滅作用素 Q_1, Q_2 を次で定義する.

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + c_1m_1x_1\right) + \sqrt{-1}\beta_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + c_2m_1x_2\right),\\
Q_2 &= \sqrt{-1}\alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + c_1m_1x_1\right) + \beta_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + c_2m_1x_2\right).
\end{aligned}
$$

命題 4.1. Q_1^*, Q_2^* を Q_1, Q_2 の形式的共役作用素とすると, 次が成り立つ:

(i) $P = Q_1^*Q_1 + Q_2^*Q_2 + m_1/2$,

(ii) $[Q_i, Q_i^*] = s_i,\ i = 1, 2$,

(iii) $[Q_1, Q_2] = 0, [Q_1^*, Q_2] = 0$,

(iv) $Q_i\phi_0 = 0, i = 1, 2$,

ただし, [,] は $[A, B] = AB - BA$ で定義される交換子である.

結局, P は 2 次元調和振動子とユニタリ同値になっている.

ここで対応する古典力学との関連を見ておく. Hamiltonian $P(p, x)$, Lagrangian $L(x, \dot{x})$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
P(x,p) &= \frac{1}{2}(p_1 - c_2bx_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 + c_1bx_1)^2 + \frac{1}{2}(k^2x_1^2 + \ell^2x_2^2),\\
L(x,\dot{x}) &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + b(c_2\dot{x}_1x_2 - c_1x_1\dot{x}_2) - \frac{1}{2}(k^2x_1^2 + \ell^2x_2^2),
\end{aligned}
$$

で与えられる. Newton 方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k^2 & 0 & 0 & b \\ 0 & -\ell^2 & -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

であり, $\pm\sqrt{-1}s_i, i = 1, 2,$ が右辺の行列の固有値である.

命題 4.1 及び標準的な交換子の計算により次が得られる.

定理 4.2. P のスペクトルは多重度有限の固有値 $\{\mu(m,n)\}_{m,n=0}^{\infty}$,

$$\mu(m,n) = (m+1/2)s_1 + (n+1/2)s_2,$$

のみから成り, 対応する固有関数は $\phi_{m,n} = (Q_1^*)^m(Q_2^*)^n\phi_0$ によって与えられ, $\phi_{m,n}$ は次をみたす:

$$\begin{aligned} (\phi_{m',n'}, \phi_{m,n}) &\equiv \int_{\mathbf{R}^2} \phi_{m',n'}(x_1, x_2)\overline{\phi_{m,n}(x_1, x_2)}dx_1dx_2 \\ &= \delta_{m',m}\delta_{n',n}m!n!s_1^m s_2^n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

証明で残されているのは, 最小固有値の多重度が 1 であること, いわゆる ground state の一意性である. これは半群 $\exp(-tP)$ のトレースを計算することにより証明されるが, 積分核の表現と合わせて後で述べたい.

注意 以上述べてきた 2 次の Hamiltonian の固有値, 固有関数について, 一般次元で同様のことが成立することが最近証明された ([8] 参照) .

(4.1) から, $G_{m,n} = \phi_0^{-1}\phi_{m,n}$ とおくと $\{G_{m,n}\}$ は ϕ_0^2dx に関する 2 変数の直交多項式系を成していることが分かる.

さらに, $k, \ell > 0$ を止めて $b \to \infty$ とすると $\beta_1, \alpha_2 \to 0$ となること, $b \neq 0$ を止めて $k = \ell \to 0$ とすると $\alpha_2, \beta_2 \to 0$ となること, 及び ϕ_0 はいずれの場合も Gauss 関数に収束することから, $\{G_{m,n}\}$ は Hermite 多項式, 複素 Hermite 多項式を含む直交多項式系の

parameter family になっていることが分かる. この観点から $\{G_{m,n}\}$ に対して直交多項式論を展開できる. [7] を参照されたい.

最後に 2 次の Hamiltonian P に対する propagator, heat kernel に対する Van Vleck-Pauli の公式について述べる.

Van Vleck-Pauli の公式は, 我々の考えている場合に即せば次のように述べることができる. 古典的 Hamiltonian $P(p,x)$ に対する境界条件 $x(0)=x, x(t)=y$ をみたす古典軌道を $\{x_{cl}(s)\}_{0\leqq s\leqq t}$ とし, その作用積分を $S(t,x,y)$ とする:

$$S(t,x,y)=\int_0^t L(x_{cl}(s),\dot{x}_{cl}(s))ds.$$

このとき, propagator, つまり Schrödinger 方程式 $\partial u/\partial t=\sqrt{-1}Pu$ の基本解, $\exp(\sqrt{-1}tP)(x,y)$ は

$$\exp(\sqrt{-1}tP)(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(\det\frac{\partial^2 S(t,x,y)}{\partial x\partial y}\right)^{1/2}\exp(\sqrt{-1}S(t,x,y))$$

によって与えられる ([1], [9], [14] 参照). Newton 方程式は線型であり, $S(t,x,y)$ は具体的に計算可能であることに注意して頂きたい.

最近, Ikeda-Kusuoka-Manabe [4] は, この公式及びその証明の中に含まれているアイディアを用いて, 2 次の Wiener 汎関数に関する研究を行っている.

元来の Van Vleck-Pauli の公式及び [4] を参考にすると, P に対する heat kernel $\exp(-tH)(x,y)$ が次のように具体的に求めることができる.

形式的な Hamiltonian $\widetilde{P}(p,x)=P(p,\sqrt{-1}x)$ を考えて, $x(0)=x, x(t)=y, x,y\in\mathbf{R}^2$ なる古典軌道を $\{\tilde{x}_{cl}(s)\}_{0\leqq s\leqq t}$ とする. 軌道は $\mathbf{C}^2$ の中で考える. 対応する Lagrangian (これも形式的に考える) を $\widetilde{L}$ として, 複素数値の "作用積分" $\widetilde{S}(t,x,y)$ を

$$\widetilde{S}(t,x,y)=\int_0^t \widetilde{L}(\tilde{x}_{cl}(s),\dot{\tilde{x}}_{cl}(s))ds$$

によって定義すると, 次が証明できる.

命題 4.3. $\exp(-tP)(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\left(\det\dfrac{\partial^2\widetilde{S}(t,x,y)}{\partial x\partial y}\right)^{1/2}\exp(-\widetilde{S}(t,x,y)).$

この場合も Newton 方程式は線型であり, $\tilde{S}(t,x,y)$ を具体的に求めることによって heat kernel の具体的な表示が得られる. 計算結果については, [6], [7] を参照されたい. ここでは, heat kernel の表示から

$$\mathrm{Tr}(\exp(-tH)) = \frac{1}{2(\cosh m_1 t/2 - \cosh m_2 t/2)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \exp(-\mu(m,n)t), \quad t > 0,$$

が証明され, P のスペクトルが半群のトレースから求まること, 特に最小固有値 $m_1/2$ の多重度が 1 であることが証明することができることを述べるに止める.

また, P の固有関数 $\{\phi_{m,n}\}$ または本節で得られた直交多項式系 $\{G_{m,n}\}$ を用いて, heat kernel $\exp(-tH)(x,y)$ が固有関数展開できることは言うまでもない. 調和振動子に対しては, Hermite 多項式に対するある和公式を用いることによって, 固有関数展開から heat kernel の具体形が得られるが ([12]), Van Vleck-Pauli の公式を用いると直接 heat kernel が求まり, 逆に和公式を証明することができる.

References

1. C. DeWitt-Morette, The semiclassical expansion, *Ann. Phys.*, **97** (1976), 367–399.
2. B. Helffer, "Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications, "*Lec. Notes in Math.*, **1336**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
3. B. Helffer and J. Sjöstrand, Effect tunnel pour l'equation de Schrödinger avec champ magnétique, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, **14** (1987), 625–657.
4. N. Ikeda, S. Kusuoka and S. Manabe, Lévy's stochastic area formula and related problems, *to appear.*
5. A. Iwatsuka, Magnetic Schrödinger operators with compact resolvents, *J. Math. Kyoto Univ.*, **26** (1986), 357–374.
6. H. Matsumoto, Semiclassical asymptotics of eigenvalues for Schrödinger operators with magnetic fields, *to appear in J. Func Anal.*
7. H. Matsumoto, Quadratic Hamiltonians and associated orthogonal polynomials, *preprint.*

8. H. Matsumoto and N. Ueki, *in preparation.*

9. W. Pauli, "Lectures on Physics, " MIT Press, 1973.

10. B. Simon, Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, I. Non-degenerate minima: Asymptotic expansions, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **38** (1983), 295–307.

11. B. Simon, Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling, *Ann. Math.*, **120** (1984), 89–118.

12. E. C. Titchmarsh, "Introduction to the Theory of Fourier Integrals, "Oxford Univ. Press, London and New york, 1937.

13. N. Ueki, Lower bounds for the spectra of Schrödinger operators with magnetic fields, *J. Func. Anal.*, **120** (1994), 344–379.

14. J. H. Van Vleck, The correspondence principle in the statstical interpretation of quantum mechanics, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **14** (1928), 178–188.

15. S. Watanabe, Generalized Wiener functionals and their applications, *Proc. Fifth Japan-USSR Symp. Prob. Theory and Stat., Lec. Notes in Math.*, **1299** 541–548, Springer-Verlag, Berlin, 1988.