

# 1次元可逆セル・オートマトンにおける一斉射撃問題の高速解

今井 克暢, 森田 憲一

Katsunobu IMAI and Kenich MORITA

広島大学 工学部

{imai,morita}@ke.sys.hiroshima-u.ac.jp

## 1 はじめに

1次元セル・オートマトンの一斉射撃問題 [1] は、任意の有限の長さ  $n$  の1次元3近傍セル・オートマトンの左端のセルからの信号により、すべてのセルを同時刻に特別の状態(射撃状態)にする問題である。Minsky と McCarthy は、 $3n$  ステップで射撃状態になる同期解を示し、その後、後藤や Waksman [2] らによって  $2n-2$  ステップで同期する最小時間解が得られた。現在は Mazoyer[4] による6状態の最小時間解が知られている。

われわれは、この一斉射撃問題を可逆セル・オートマトン上で実現することを試みた。ところが、1次元可逆セル・オートマトンにおいては従来の単一の状態になるという意味での一斉射撃解は存在せず、複数の射撃状態を許すという拡張した一斉射撃条件を満たす解が  $3n$  時間解を元に構成可能であることを示した [6]。

本稿では、可逆セル・オートマトン上でのさらに高速な同期解を構成したことについて報告する。 $3n$  時間解では一度に2分割する事によって全体の同期を図るが、さらに、分割数を大きくすることにより、収束時間を短縮することを試みた。その結果、 $2^k$  ( $k$ は有限の自然数) 分割解の構成が可能であることがわかり、実際に  $k=2,3$  の場合、すなわち4,8分割解を構成した。解の構成にあたっては、可逆セル・オートマトンの設計を容易にするために分割セル・オートマトン(PCA)[5]を用いた。

## 2 可逆セル・オートマトンに対する一斉射撃解条件

### 2.1 1次元セル・オートマトンの定義

決定性1次元セル・オートマトン(CA)は

$$A = (\mathbf{Z}, Q, N, \varphi_A, \#)$$

で定義される。ただし、

- $\mathbf{Z}$  は全整数の集合、

- $Q$  は各セルの状態の空でない有限集合、
- $N = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  は近傍ベクトルで、 $x_i \in \mathbf{Z}$ ,  $k$ は自然数、
- $\varphi_A : Q^k \rightarrow Q$  は局所写像、
- $\# \in Q$  は静止状態で、 $\varphi_A(\#, \#, \dots, \#) = \#$ ,

である。 $A$  の状相  $c$  は  $c : \mathbf{Z} \rightarrow Q$  なる写像で、 $Q$  上のすべての状相の集合  $\text{Conf}(Q)$  は、

$$\text{Conf}(Q) = \{c | c : \mathbf{Z} \rightarrow Q\}$$

で表される。大域写像  $\Phi_A : \text{Conf}(Q) \rightarrow \text{Conf}(Q)$  は

$$\forall x \in \mathbf{Z}, \Phi_A(c)(x) = \varphi_A(c(x+x_1), \dots, c(x+x_k))$$

で定義される。すなわち、ある状相  $c$  に対して、 $\Phi_A$  を適用した次の時刻の状相は  $\Phi_A(c)$  となる。また、 $k$  ステップ後の状相は  $\Phi_A^k(c)$  と表すことにする。可逆CAとは大域写像  $\Phi_A$  が単射であるようなCAである。なお、 $N = (-1, 0, 1)$  であるようなCAを1次元3近傍CAと呼ぶことにする。

### 2.2 可逆CAに対する一斉射撃解条件

可逆CAでは単一の射撃状態の一斉射撃解を構成できないため、可逆CAに対する一斉射撃解の条件を次のように定義した [6]。

可逆CAに対する一斉射撃解条件 1次元3近傍CA  $A = (\mathbf{Z}, Q, (-1, 0, 1), \varphi_A, \#)$  において、相異なる2つの状態  $g, s \in Q - \{\#\}$  と状態集合  $F \subset Q - \{\#, g, s\}$  が存在し、つぎの1,2を満たす。

1.  $\varphi_A(\#, s, s) = s$ ,  $\varphi_A(s, s, s) = s$ ,  
 $\varphi_A(s, s, \#) = s$ .
2.  $c_s^{(n)}$  を次のような状相とする。

$$c_s^{(n)}(x) = \begin{cases} g & x = 0 \\ s & x = 1, \dots, n-1 \\ \# & x < 0, x \geq n \end{cases}$$

このとき、ある関数  $t_f: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{Z}_+$  が存在し、

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{Z}_+ \forall x \in \mathbf{Z} \\ ((1 \leq x \leq n \Rightarrow \Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) \in F) \\ \wedge ((x < 1 \vee x > n) \Rightarrow \Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) \notin F)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbf{Z}_+ (0 \leq i < t_f(n) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbf{Z}, (\Phi_A^{t_f(n)}(c_s^{(n)})(x) \notin F)). \end{aligned}$$

が成り立つ。

すなわち、複数の状態からなる射撃状態集合  $F(C, Q)$  を考え、 $t = t_f(n)$  において、各セルの状態が  $F$  の要素になっていれば同期したと考えるものであり、同期させる  $n$  個のセルだけでなく、その外側のセルの状態の変更も許すものである。

## 2.3 分割セル・オートマトンの定義

可逆セル・オートマトンの一斉射撃解の定義に基づいて解を構成するにあたっては、分割セル・オートマトン(PCA)を用いた。まず、PCAの定義を示す。

1次元3近傍PCA  $P$  は1次元CAのサブクラスとみなすことができ、

$$P = (\mathbf{Z}, L, C, R, \varphi_P, (\#, \#, \#))$$

であらわされ、

- $\mathbf{Z}$  は全整数の集合、
- $L, C, R$  はそれぞれ3分割した各セルの左、中央、右パーティションの状態の空でない有限集合、
- $\varphi_P: R \times C \times L \rightarrow L \times C \times R$  は局所関数。
- $(\#, \#, \#) \in L \times C \times R$  は静止状態で  $\varphi_P(\#, \#, \#) = (\#, \#, \#)$ 。

である。 $P$ の状相  $c$  は  $c: \mathbf{Z} \rightarrow L \times C \times R$  なる写像で、 $L \times C \times R$  上のすべての状相の集合  $\text{Conf}(L \times C \times R)$  は、

$$\text{Conf}(L \times C \times R) = \{c | c: \mathbf{Z} \rightarrow L \times C \times R\}$$

で表される。大域関数

$$\Phi_P: \text{Conf}(L \times C \times R) \rightarrow \text{Conf}(L \times C \times R)$$

は、 $L \times C \times R$  から  $L, C, R$  をとりだす射影関数をそれぞれ、 $LEFT, CENTER, RIGHT$  とすると、

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{Z}, \Phi_P(c)(x) = \varphi_P(RIGHT(c(x-1)), \\ CENTER(c(x)), \\ LEFT(c(x+1))) \end{aligned}$$

で定義される。 $P$ が可逆であるための必要十分条件は、 $\varphi_P$ が1対1写像であることが示されているので[5]容易に可逆なCAを設計することができる。

## 3 可逆PCAによる $2^k$ 分割解の構成

### 3.1 $2^k$ 分割解

Minskyの $3n$ 時間解は速さが1と $1/3$ の二つの信号を用いて一度に問題を2分割するものであり、可逆CAにおける $3n$ 時間解はこの考え方を元に構成した[6]。これに対してWaksman[2]の最小時間解は、 $1/7, 1/15, 1/31, \dots$ のさらに遅い信号を無限に用いることにより $2n-2$ 時間解を実現したものである。

可逆CAでは信号の生成、消滅には制約が伴うため、無限個の信号を扱うことは困難であるが、出力する信号を有限個で打ち切った $2^k$ 分割解( $k$ は有限の自然数)すなわち、 $(2+\varepsilon)n$ 、時間解( $\varepsilon > 0$ )が構成可能であることを $k=2, 3$ の場合を元に示す。

### 3.2 4分割解の例

図3に4分割解の概念図を示す。新たに $1/7$ の信号を用いて、全体の長さの $1/4$ を計算し、約 $7n/4$ ステップ後に全体を4分割する。一般に $2^k$ 分割解は最初の分割に $(2-1/2^k)n$ ステップ必要なので、射撃状態になるために必要なステップ数は

$$t_f(n) = \frac{2^{k+1} - 1}{2^k - 1} n$$

である。よって4分割解は $7n/3$ 時間で射撃状態になる。

アドホックに構成した4分割解の例を次に示す。

### 4分割解

- $P_4 = (\mathbf{Z}, L_4, C_4, R_4, \varphi_{P_4}, (\#, \#, \#))$ ,  
 $C_4 = \{ G1R, G1L, G2R, G2L, G3R, G3L, GA1R, GA1L, GA2R, GA2L, GA3R, GA3L, GB1R, GB1L, GB2R, GB2L, GB3R, GB3L, GC1R, GC1L, GC2R, GC2L, GC3R, GC3L, GD1R, GD1L, GD2R, GD2L, GD3R, GD3L, \#, U1R, U1L, U2R, U2L, V1R, V1L, V2R, V2L, V3R, V3L, V4R, V4L, V5R, V5L, V6R, V6L, S, AR, AL, GA0L, GA0R, BR, BL, GB0R, GB0L, WR, WL, XR, XL, YR, YL,$

GC0R, GC0L, G0R, G0L, PR, PL, QR, QL, GD0R, GD0L, HR, HL, HAR, HAL, HBR, HBL, HCR, HCL, HDR, HDL, EUR, EUL, ESR, ESL, EHR, EHL, EHAR, EHAL, EHBR, EHBL, EHCR, EHCL, EHDR, EHDL, FUR, FUL, FSR, FSL, FEHR, FEHL, FEHAR, FEHAL, FEHBR, FEHBL, FEHCR, FEHCL, FEHDR, FEHDL, FHR, FHL, FHAR, FHAL, FHBR, FHBL, FHCR, FHCL, FHDR, FHDL, FG1R, FG1L, FGA1R, FGA1L, FGB1R, FGB1L, FGC1R, FGC1L, FGD1R, FGD1L, FGR, FGL, FGAR, FGAL, FGBR, FGBL, FGCR, FGCL, FGDR, FGDL},

$$L_4 = R_4 = \{-, //, ++, /, *, -, **, #, +\},$$

- General を (\*, G0R, \*) , soldier を (#, S, #) , 静止状態を (#, #, #) とする。初期状態は,

$$c_s^{(n)}(x) = \begin{cases} (*, G0R, *) & x = 0 \\ (#, S, #) & x = 1, \dots, n-1 \\ (#, #, #) & x \leq 0, x \geq n. \end{cases}$$

- 射撃状態集合  $F_4$  は要素数 146 の集合
- 局所関数は 376 の遷移規則からなる

状態数は L, C, R がそれぞれ, 9,140,9 で 11340 状態の解であり, このセル・オートマトンが可逆であることは, 局所関数の単射性からわかる。図 2 に  $n=11$  におけるコンフィグレーションを示す。

### 3.3 $2^k$ 分割解構成時の問題点

8 分割解の構成を組織的に検討することにより, 2 以上の任意の有限の自然数  $k$  について  $2^k$  分割解, すなわち  $(2 + \epsilon)n$  解が構成可能であることを示す。

問題となる点は,

- 信号の衝突でノードが構成可能か
- 生成されたノードが全体を等分割しているか
- 次の 4 つの general  $a$  が同時刻に生成されるか

である。以上の 3 点について順に述べる。

#### 3.3.1 信号の衝突が必ず起きること

8 分割解の場合には図 3 のように,  $b, c, d$  のノードを構成した後, 新たな general としての 4 つの  $a$  ノードができる。

このとき,  $b$  以外のすべてのノードは, 同一ノードから生成され, かつ, 速度の絶対値が 1 の信号と反

対の符号を持つ  $1/3, 1/7, 1/15, \dots$  の信号との衝突によって構成されるが, PCA を用いているために信号が常に衝突するとは限らない。

図 4 は速度  $1/3$  と  $-1$  の信号との衝突の位相を示しているが, (2) のように衝突を起こさず交差してしまう場合があり得る。しかし,  $2^k$  分割解においては必ず衝突が起きるように初期位相を決定できる。

最初に general から出力された速度 1 の信号の  $t$  ステップ目における位置を  $s_1(t)$  とすると, 壁で反射した後は  $t + s_1(t)$  が常に偶数となるセルの L パーティションに存在する。また, 衝突に関わる遅い信号はすべて速さが奇数分の 1 であり, 初期位相(次のセルに移るまでの時間遅れ)が偶数であれば, 奇数分の 1 の信号が次のセルに移るタイミングは, ステップ数と位置の和が偶数のときに限られる。これは反射後の速さが 1 の信号と同様であり, 両者の衝突時には図 4 の (2) のような信号の交差は起きず, 必ず衝突することになる。なお, 同様の議論が奇数の場合にも成り立つので次のように表せる。

信号のキャリアの状態に関する条件:

任意の時刻  $t$ , 任意の位置  $x$  のセルについて, 分割に関わる速度の絶対値  $1, 1/3, 1/7, \dots$  の信号のキャリアとなる状態が L, R パーティションに存在する場合には  $t+x$  がすべて偶数であるか, すべて奇数であるかのどちらかでなければならない。

以上のことから, 各信号の初期位相を表 1 のようにすべて偶数値にとった。L または R パーティションにセルの分割に関わる信号のキャリアとなっている状態が存在する場合には L, R パーティションに存在する場合には  $t+x$  がすべて偶数である。

表 1: 信号の初期位相

speed	initial phase
1	0
1/3	-2
1/7	-2
1/15	-8

この場合には図 4 の速度  $1/3$  の信号との衝突では (1), (3) だけが現れることになる。

#### 3.3.2 分割が等分割であること

各ノード  $c, d$  ならびに新たな general  $a$  は, 割り当てられている領域のセル数を常に等分割するように生成されねばならない。セル数が奇数ならば生成



合分けの表を示す(表3).

表3: general  $a$  についての場合分け

$n(mod 8)$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
0	$a000$	$a010$	$a020$	$a030$
1	$a100$		$a120$	$a130$
2	$a200$	$a210$		$a230$
3	$a300$		$a320$	$a330$
4	$40+$	$41+$	$42+$	$43+$
5	$50+$		$52+$	$53+$
6	$60+$	$61+$		$63+$
7	$70+$		$72+$	$73+$

ここで  $n = 4, \dots, 8(mod 8)$  では, 表2に示したように生成される  $a$  ノードがつねに  $aL, aR$  のふたつとなるので, 6の状態“ $42+$ ”のように  $aL, aR$  間で反射しつづけることにより衝突時の信号の位相などを保持する状態である.

### 3.4 8分割解の例

以上のようにして構成された8分割解の  $n = 18$  のときのコンフィグレーションを図7に示した. 実際に8分割解を構成するにあたっては, 上述の注意点をもとに, すべての場合を尽くすためには, 新たな general  $a$  から次の general が生成されるまでの状態を考慮する必要があり, 64通りの場合を尽くさねばならない.

## 4 おわりに

可逆セル空間における一斉射撃解の条件に基づき  $2^k$  ( $k$ は有限の自然数) 分割解, すなわち  $(2 + \epsilon)n$  時間解が構成が可能であることを示し, 実際に  $k = 2, 3$  の場合を可逆 PCA を用いて構成した.

しかし現状では非常に多くの状態を用いるので, 状態数をいかに削減するかは今後の課題である. 特に, 信号のキャリア自体が多くの内部状態を持って遅い速度を実現している現在の方法ではなく, 従来の一斉射撃問題の  $2n - 2$  時間解で用いられているような, 特定の信号を受信することでセルを移動し受動的に速度を決める方法を用いて状態数が削減できると思われる.

$2n - 2$  最小時間解の構成は実現困難であると思われるが, いまだ今後の課題として残されている.

## 参考文献

- [1] Moore, E.F.: The firing squad synchronization problem, in *Sequential machines* (ed. E. F. Moore) Addison-Wesley, Reading MA, pp.213-214 (1964).
- [2] Waksman, A.: An optimum solution to the firing squad synchronization problem, *Inform. and Control*, **9**, pp.66-78 (1966).
- [3] Balzer, R.: An 8-states minimal time solution to the firing squad synchronization problem, *Inform. and Control*, **10**, pp.22-42 (1967).
- [4] Mazoyer, J.: A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem, *Theoretical Computer Science*, **50**, pp.183-238 (1987).
- [5] Morita, K., Harao, M.: Computation universality of one-dimensional reversible (injective) cellular automata, *Trans. IEICE*, **E72**, pp.758-762 (1989).
- [6] 今井克暢, 森田憲一. 1次元可逆セル・オートマトンにおける一斉射撃問題について. , 京都大学数理解析研究所講究録 871 ( LA冬のシンポジウム), 66-72 ページ, 1994.

	6	7	8	9					
20	c0	+	c12R	s	c1	12L			
21	c0		s	c2	s	d1	301 d1		
22	c0		s		42+aR!		301		
23	c0		aL+	42+	aR+		301		
24	c0		3	a0L	42+a0R	3	301		
25	+	ec0	+	a1L	42+	a1R	+	ec01	+
26		fec0		fa1L	42+fa1R			fed01	

$n = 12$

図6: general  $a$  の生成時の位相の保持

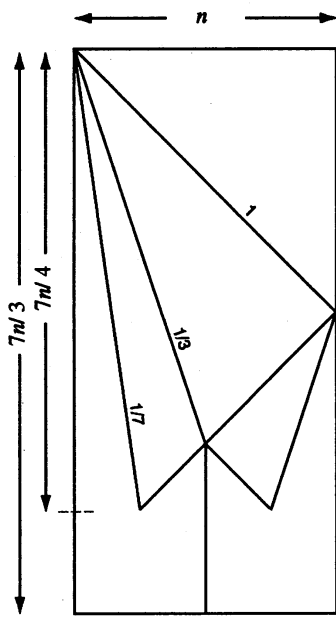


図 1: 4分割解の概念図

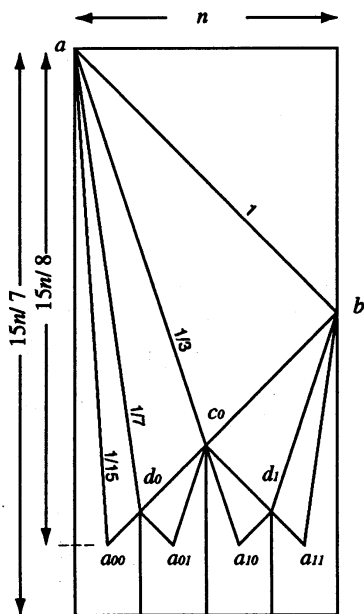


図 3: 8分割解の概念図

(1)

s		s		s		s
2	s		s		s	
11R			s			s
12R		s		s	1	s
s	2	s	1	s		s

(2)

s		s		s		s
2	s		s		s	
11R			s		1	s
12R		s		1	s	
s	2	1	s		s	

(3)

s		s		s		s
2	s		s		1	s
11R			s	1	s	
12R		1	s		s	
* * *		s		s		s

(4)

s		s		s	1	s
2	s		s	1	s	
11R		1	s		s	
* * *		s		s		s
* * *		* * *		s		s

図 4: 信号の衝突時の位相

(1)  $n=8$

	3	4	5	6				
9	s	2	s	s	s			
10	s		11R	s	1	s		
11	s		12R	1	s	s		
12	s	c3	c0	c3	s	11L		
13	c1	c11L	c0	c11R	c1	12L		
14	c12L	c0	c12R	d1	d01	d1		
15	3	a010	3	c0	3	a020	3	d01

(2a)  $n=9$

	3	4	5	6			
9	s	2	s	s	s		
10	s		11R	s	s		
11	s		12R	s	s		
12	s		s	2	s	1	s
13	s		s	c3*	cR1	s	s
14	s		c3	cL	cR	c3	s
15	c1	c11L	cL	cR	cR	c11R	c1

(2b)  $n=9$

	3	4	5	6				
9	s	2	s	s	s			
10	s		11R	s	s			
11	s		12R	s	s			
12	s		s	2	s	1	s	
13	s		s	c3*	cR	c3+	s	
14	s		c3	cL	cR	c3+	c11R	c1+
15	c1	c11L	cL	cR	cR	c12R		

図 5: 奇偶による衝突時の違い

