数理解析研究所講究録
907巻 1995年 67-81

複素射影空間内の極小 CR 部分多様体の退化次数について

金沢大学大学院自然科学研究科・後藤　亨 (TOHRU GOTOH)

§1. Riemann 多様体の極小部分多様体の退化次数とは，直感的に言えば，その極小部分多様体の体積を変えないような（法）変分の自由度である．より正確には次の様に定義される．M を Riemann 多様体 $\tilde{M}$ のコンパクト極小部分多様体とする．M の法バンドル NM の C^∞-sections の空間 $\Gamma(NM)$ に作用する三つの作用素 Δ^{NM}, $\mathcal{R}_M$ および $\mathcal{A}_M$ を次の様に定義する:

$$\Delta^{NM}V = \sum \left(\nabla^{NM}_{e_j}\nabla^{NM}_{e_j}V - \nabla^{NM}_{\nabla^{M}_{e_j}e_j}V\right),$$

$$\mathcal{R}_M V = \sum \left(R^{\tilde{M}}(e_j, V)e_j\right)^{NM},$$

$$\mathcal{A}_M V = \sum B(A^V e_j, e_j).$$

ここで，∇^{NM} は $\tilde{M}$ の Riemann 接続から誘導される NM の接続，$V \in \Gamma(NM)$，$\{e_j\}$ は M のフレイム，$R^{\tilde{M}}$ は $\tilde{M}$ の曲率テンソル，B は第2基本形式，A^V は V 方向のシェイプ作用素である．これらの作用素を使って Jacobi 作用素と呼ばれる楕円型微分作用素 $\mathfrak{J}_M$ を

$$\mathfrak{J}_M = -\Delta^{NM} + \mathcal{R}_M - \mathcal{A}_M$$

と定義すれば，$V \in \Gamma(NM)$ を変分ベクトル場とする $M = M_0$ の変分 M_t に対して第2変分公式

$$\left.\frac{d^2\,\mathrm{Vol}(M_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \int_M \langle\, \mathfrak{J}_M V,\ V\,\rangle dv$$

が成り立つ．楕円型作用素の一般論により Jacobi 作用素の各固有空間の次元は有限である．極小部分多様体 M の退化次数は，Jacobi 作用素の 0-固有空間の次元，即ち

$$\mathrm{nul}(M) = \dim \mathrm{Ker}\ \mathfrak{J}_M$$

と定義される．また，Jacobi 作用素の負の固有値に対応する固有空間の次元の和を M の指数という．

本稿の目的は，$\tilde{M}$ が複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ のときにその極小部分多様体の退化次数を調べることである．具体的には，退化次数最小の極小部分多様体を決定するという問題を扱いたいが，まず次の節で，Simons による退化次数を一般的に評価する方法を説明しよう．

§**2.** $\tilde{M}, M$ 等は §1 と同じとする．$\mathfrak{k}(\tilde{M})$ で $\tilde{M}$ の Killing ベクトル場全体の作る Lie 環を表す．$\mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM} = \{Z^{NM} \in \Gamma(NM) \mid Z \in \mathfrak{k}(\tilde{M})\}$ とおく．ここで，Z^{NM} は M 上での Z の法成分を表す．すると，次が成り立つ:

THEOREM 2.1 (J.SIMONS). $\mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM} \subset \mathrm{Ker}\ \mathfrak{J}_M$. □

そこで，$\mathrm{nul}_K(M) = \dim \mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM}$ を M の Killing 退化次数と呼んだ．Simons は $\tilde{M}$ が球面のとき，その極小部分多様体の Killing 退化次数を評価した．彼の方法は一般的には次の様にいうことができる．

M の点，例えば x を任意に固定し，線形写像

$$\Phi_x : \mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM} \longrightarrow N_xM \oplus \mathrm{Hom}(T_xM, N_xM)$$

を

$$\Phi_x(Z^{NM}) = \left(Z_x^{NM}, (\nabla^{NM} Z^{NM})_x\right)$$

と定義する．従って，$\mathrm{nul}_K(M) \geq \dim \mathrm{Im}\Phi_x$ が成り立つ．M の点 x は任意であったので，Theorem 2.1 と併せて，結局 M の退化次数は

$$\mathrm{nul}(M) \geq \mathrm{nul}_K(M) \geq \max_{x \in M} (\dim \mathrm{Im}\Phi_x) \tag{2.2}$$

と評価される.

ここで, $\dim \mathrm{Im}\Phi_x$ が点 x に依存しなければ都合がよい. そのための十分条件として次がある:

PROPOSITION 2.3. Mの任意の2点 x, y に対して, $\tilde{M}$ の等長変換 f で $f(x) = y$, $f_*(T_xM) = T_yM$ を満たすものが存在すれば, $\dim \mathrm{Im}\,\Phi_x$ の値は x に依存しない.

PROOF: x, y および f は主張にあるものとする. すると, 写像

$$F : \mathrm{Hom}(T_xM, N_xM) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_yM, N_yM)$$

を $F(\omega) = f_* \circ \omega \circ f_*^{-1}$, $\omega \in \mathrm{Hom}(T_xM, N_xM)$ と定義できる. このとき, 図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM} & \xrightarrow{\Phi_x} & N_xM \oplus \mathrm{Hom}(T_xM, N_xM) \\
{\scriptstyle f_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (f_*|N_xM)\oplus F} \\
\mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM} & \xrightarrow[\Phi_y]{} & N_yM \oplus \mathrm{Hom}(T_yM, N_yM)
\end{array}$$

の可換性を示すことができる. この図式で縦方向の写像はいずれも線形同型なので, $\dim \mathrm{Im}\Phi_x$ $= \dim \mathrm{Im}\Phi_y$ となる. ∎

この Proposition の条件はかなり厳しいと思われるが, $\tilde{M}$ が球面の場合や後で扱う複素射影空間の極小 CR 部分多様体の場合には満たされている (Proposition 4.2) .

例を挙げよう.

EXAMPLE 2.4(J.SIMONS). $\tilde{M} = S^n$. この場合 Φ_x は全射である. 従って, $\dim M = m$ とすれば

$$\mathrm{nul}(M) \geq \dim(N_xM \oplus \mathrm{Hom}(T_xM, N_xM)) = (m+1)(n-m).$$

EXAMPLE 2.5(T.GOTOH). $\tilde{M} = \mathbf{C}P^n$ で M が実超曲面. この場合も Φ_x は全射である. 従って, 上と同様

$$\mathrm{nul}(M) \geq 2n = \dim M + 1.$$

EXAMPLE 2.6(Y.KIMURA). $\tilde{M} = \mathbb{C}P^n$ で M が複素部分多様体. この場合は Φ_x は全射ではない. $\mathrm{Im}\,\Phi_x = N_xM \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_xM, N_xM)$ となる. 従って, $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ とすれば,

$$\mathrm{nul}(M) \geq \dim_{\mathbb{R}}(N_xM \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_xM, N_xM)) = 2(m+1)(n-m).$$

ここに挙げた3つの例で得られた評価は, 考えている極小部分多様体のクラスではどれもシャープなものであり, さらに等号を実現する M も決定されている. 即ち, 等号成立は,

Example 2.4 では, $M = S^m$（全測地的）に限る,
Example 2.5 では, $M = M^{\mathbb{C}}_{0,n-1}$（極小測地球）に限る,
Example 2.6 では, $M = \mathbb{C}P^m$（全測地的）に限る,

となる. $M = M^{\mathbb{C}}_{0,n-1}$ についてはこの後, §5 でも触れる.

§3. §2 で述べた方法は, $\tilde{M}$ が対称空間のときうまく適用できる. それはこのとき, 線形写像 Φ_x を Lie 環の言葉で表せるからである.

対称空間 $\tilde{M}$ が Lie 群 G とその閉部分群 H により $\tilde{M} = G/H$ と表されているとし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \tilde{\mathfrak{m}}$ を標準分解とする. $Z \in \mathfrak{g}$ で生成される $\tilde{M}$ の (Killing) ベクトル場を Z^* で表す:

$$Z^*_x = \left.\frac{d(\exp tZ)x}{dt}\right|_{t=0}, \quad x \in \tilde{M}.$$

すると, $\tilde{M}$ の原点 $o = H$ において $\tilde{M}$ の共変微分は次のように計算される.

(3.1) $$Z \in \tilde{\mathfrak{m}} \quad \Rightarrow \quad (\nabla^{\tilde{M}} Z^*)_o = 0,$$

(3.2) $$Z \in \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad (\nabla^{\tilde{M}} Z^*)_o = \mathrm{ad}(Z).$$

ここで, $T_o\tilde{M}$ と $\tilde{\mathfrak{m}}$ を自然に同一視している.

さて, M は原点 o を含んでいるとしてよく, $T_oM \subset \tilde{\mathfrak{m}}$ とみて $\mathfrak{m} = T_oM$ とおく. 線形写像 $\Psi_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{m}^{\perp}$ と $\Psi_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^{\perp})$ を

$$\Psi_1(Z) = Z^{\perp}, \quad \Psi_2(Z)(X) = (\mathrm{ad}(Z')X)^{\perp} - B(X, Z'')$$

と定義する．ここで，$\tilde{\mathfrak{m}}$ における $\mathfrak{m}$ の直交補空間を $\mathfrak{m}^{\perp}$ と表し，$Z \in \mathfrak{g}$ に対して $Z^{\perp}$，Z'，Z'' とは，それぞれ $\mathfrak{g}$ の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^{\perp}$ に関する Z の $\mathfrak{m}^{\perp}$-成分，$\mathfrak{h}$-成分，$\mathfrak{m}$-成分のことである．また，$B : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^{\perp}$ は，同一視 $\mathfrak{m} = T_oM$ により M の第 2 基本形式に対応する写像である．さらに，$\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM}$ を $\Pi(Z) = Z^{*NM}$ と定義すれば，(3.1) および (3.2) より図式

$$
\text{(3.3)} \qquad
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\Psi=\Psi_1\oplus\Psi_2} & \mathfrak{m}^{\perp} \oplus \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^{\perp}) \\
{\scriptstyle \Pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \cong} \\
\mathfrak{k}(\tilde{M})^{NM} & \xrightarrow[\Phi_o]{} & N_oM \oplus \mathrm{Hom}(T_oM, N_oM)
\end{array}
$$

は可換である．従って，Π は全射であるから，適当な同一視のもとに

$$\mathrm{Im}\Phi_o = \mathrm{Im}\Psi$$

が成り立つ．故に，(2.2) から退化次数は

$$\text{(3.4)} \qquad \mathrm{nul}(M) \geq \mathrm{nul}_K(M) \geq \dim \mathrm{Im}\,\Psi$$

と評価される．そこで，この右辺を調べる．

THEOREM 3.5. M を対称空間 $\tilde{M} = G/H$ のコンパクト極小部分多様体とする．このとき，上の記号を使うと

$$\mathrm{Im}\,\Psi = \mathfrak{m}^{\perp} \oplus \mathrm{Im}\,\Psi_2|(\mathfrak{h} + \mathfrak{m}) \supset \mathfrak{m}^{\perp} \oplus \mathrm{Im}\,\Psi_2|\mathfrak{h}$$

が成り立つ．とくに，M の退化次数は

$$\mathrm{nul}(M) \geq \mathrm{codim}(M) + \dim \mathrm{Im}\,\Psi_2|\mathfrak{h}$$

と評価される．

Proof: Ψ_1, Ψ_2 の定義より

$$\Psi_1(\mathfrak{h}) = 0,\ \Psi_2(\mathfrak{m}) = 0, \Psi_1(\tilde{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}^{\perp},$$

$$\Psi_2(Z)(X) = -B(X, Z),\ X \in \mathfrak{m}, Z \in \tilde{\mathfrak{m}},$$

$$\Psi_2(Z)(X) = (\mathrm{ad}(Z)(X))^{\perp},\ X \in \mathfrak{m}, Z \in \mathfrak{h}.$$

がわかる．これから主張は直ちに従う．∎

§4. この節では，前節の結果を複素射影空間の極小 CR 部分多様体に対して適用する．まず，CR 部分多様体の定義を述べておこう．

$(\tilde{M}, J)$ を Hermite 多様体，M をその（複素とは限らない）部分多様体とする．$(T_xM)_H = T_xM \cap J(T_xM)$ とおき，その T_xM での直交補空間を $(T_xM)_R$ とかく．次の条件が満たされるとき，M は $\tilde{M}$ の CR 部分多様体と呼ばれる:

(1) $\dim_{\mathbf{R}}(T_xM)_H$ は $x \in M$ に依存しない．

(2) 分布 $M \ni x \mapsto (T_xM)_H$ は滑らか．

(3) $J(T_xM)_R \subset N_xM$.

例えば，複素部分多様体や全実部分多様体のクラスは CR 部分多様体の典型的なものである．以下，複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ には正則断面曲率 4 の Fubini-Study 計量が与えられているとし，その極小 CR 部分多様体 M について考える．次の補題は線形代数である:

Lemma 4.1. V を 複素 Euclide 空間 $\mathbf{C}^n$ の実線形部分空間とし，$V_H = V \cap JV$ とおく．$V = V_H + V_R$ を直交分解とし，$h = \dim_{\mathbf{C}} V_H$，$r = \dim_{\mathbf{R}} V_R$とする．また，$V^{\perp}$ を $\mathbf{C}^n$ における V の直交補空間とする．このとき，$J(V_R) \subset V^{\perp}$ を仮定すれば，適当なユニタリ行列 $u \in U(n)$ により，

$$u(V_H) = \mathbf{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}e_h, \quad u(V_R) = \mathbf{R}e_{h+1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_{h+r},$$

とできる．ここで，$e_j = (\underbrace{0, \ldots, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0}_{n \text{ times}})$, $j = 1, \ldots, n$. □

さて，$\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(1)\times U(n) = G/H$ と表す．この場合，標準分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \tilde{\mathfrak{m}}$ は $\tilde{\mathfrak{m}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -{}^t\bar{\zeta} \\ \zeta & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(n+1) \middle| \zeta \in \mathbb{C}^n \right\}$ で与えられるが，行列 $\begin{pmatrix} 0 & -{}^t\bar{\zeta} \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}$ と ζ を同一視することにより $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathbb{C}^n$ と考える．すると，原点 o における線形イソトロピー表現 $U(1)\times U(n) \to GL(\mathbb{C}^n)$, $u \to u_*$ は $u = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ に対し $u_*(\zeta) = \bar{\lambda}F\zeta$ で与えられる．

M を $\mathbb{C}P^n$ の m 次元コンパクト極小 CR 部分多様体とし， $\dim_{\mathbb{C}}(T_xM)_H = h$, $\dim(T_xM)_R = r$ とする．M は $\mathbb{C}P^n$ の原点 o を含んでいるとしてよい．すると，同一視により $T_oM = \mathfrak{m} \subset \tilde{\mathfrak{m}} = \mathbb{C}^n$ とみると， Lemma 4.1 により

$$\mathfrak{m} = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_h \oplus \mathbb{R}e_{h+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_{h+r} \tag{4.2}$$

と仮定してよい．従って， Proposition 2.2 より次が従う:

PROPOSITION 4.3. *M が $\mathbb{C}P^n$ のコンパクト極小 CR 部分多様体ならば，$\dim \mathrm{Im}\,\Phi_x$ は $x \in M$ に依存しない．* □

そこで，この場合に $\mathrm{Im}\Psi_2|\mathfrak{h}$ の次元を計算する．$\mathfrak{h} = \mathbb{R}\sqrt{-1} \oplus \mathfrak{u}(n)$ であるが，$\mathrm{Im}\Psi_2|\mathfrak{h} = \mathrm{Im}\Psi_2|\mathfrak{u}(n)$ となるから，$\mathrm{Im}\Psi_2|\mathfrak{u}(n)$ の次元を計算すればよい．

LEMMA 4.4.

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}\,\Psi_2|\mathfrak{h} &= \dim \mathrm{Im}\,\Psi_2|\mathfrak{u}(n) \\ &= -4h^2 + (4m - 2n - 1)h - \frac{3m^2 - 4mn - m}{2}. \end{aligned}$$

PROOF: $F \in \mathfrak{u}(n)$ に対し

$$\Psi_2(F) = 0 \Longleftrightarrow \langle F(\mathfrak{m}), \mathfrak{m}^{\perp} \rangle = 0$$

であるから

$$\mathrm{Ker}\,\Psi_2|\mathfrak{u}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} \middle| S \in \mathfrak{u}(h), T \in \mathfrak{u}(n-h-r), W \in \mathfrak{o}(r) \right\} \tag{4.5}$$

となる．故に，

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker} \Psi_2|\mathfrak{u}(n) &= \dim \mathfrak{u}(h) + \dim \mathfrak{o}(r) + \dim \mathfrak{u}(n-h-r)\\ &= 4h^2 + (2n-4m+1)h + \frac{3m^2-4mn-m+2n^2}{2}.\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} \Psi_2|\mathfrak{u}(n) &= \dim \mathfrak{u}(n) - \dim \operatorname{Ker} \Psi_2|\mathfrak{u}(n)\\ &= -4h^2 + (4m-2n-1)h - \frac{3m^2-4mn-m}{2}. \blacksquare\end{aligned}$$

Theorem 3.1 と (4.3) より次を得る:

THEOREM 4.5. *M を $\mathbf{C}P^n$ の m 次元コンパクト極小 CR 部分多様体とし，その正則部分バンドル $(TM)_H$ の複素階数を h とすれば，M の退化次数は次の不等式を満たす:*

$$\begin{aligned}\operatorname{nul}(M) &\geq \operatorname{nul}_K(M)\\ &\geq -4h^2 + (4m-2n-1)h + \frac{4n+4mn-3m^2-m}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

この Theorem にある退化次数の下限を $L_{n,m}(h)$ とおく:

$$L_{n,m}(h) = -4h^2 + (4m-2n-1)h + \frac{4n+4mn-3m^2-m}{2}.$$

ここで，h は $\max\{0, m-n\} \leq h \leq \left[\frac{m}{2}\right]$ の範囲の整数を動く．

LEMMA 4.6. *h の 2 次関数 $L_{n,m}$ が最小になるのは以下の通り:*

(1) m が偶数のとき: $L_{n,m}$ は $h = \left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m}{2}$ のみで最小になり，最小値は

$$L_{n,m}\left(\frac{m}{2}\right) = 2\left(n - \frac{m}{2}\right)\left(\frac{m}{2}+1\right).$$

(2) m が奇数で $m=n$ のとき: $L_{n,m}$ は $h=0$ のみで最小になり，最小値は

$$L_{n,n}(0)=\frac{n(n+3)}{2}.$$

(3) m が奇数で $m\neq n$ のとき: $L_{n,m}$ は $h=\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m-1}{2}$ のみで最小になり，最小値は

$$L_{n,m}\left(\frac{m-1}{2}\right)=m+1+2\left(n-\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2}+1\right). \quad \square$$

Theorem 4.5 と Lemma 4.6 より，複素射影空間のコンパクト極小 CR 部分多様体の退化次数の評価が得られた:

Corollary 4.7. M を $\mathbb{C}P^n$ の m 次元コンパクト極小 CR 部分多様体とすると，その退化次数は次の不等式を満たす:

$$\mathrm{nul}(M)\geq\begin{cases}2\left(n-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m}{2}+1\right), & m\text{ が偶数のとき},\\[2mm] \frac{n(n+3)}{2}, & m=n\text{ で奇数のとき},\\[2mm] m+1+2\left(n-\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2}+1\right), & m\neq n\text{ で奇数のとき}. \quad \square\end{cases}$$

実は，これらの評価は全てシャープであるのが以下で解る．この Corollary の初めの 2 つ，即ち，m が偶数の場合および $m=n$ で奇数の場合について，等号を実現する M を決定しして本節を終えよう．以下で，Theorem 4.8 は木村良夫氏による Kähler 部分多様体のクラスに対する結果 (cf. Example 2.6) の，また，Theorem 4.10 は大仁田義裕氏による全実部分多様体に対する結果の，それぞれ CR 部分多様体のクラスへの拡張である．

Theorem 4.8. M を $\mathbb{C}P^n$ の m 次元コンパクト極小 CR 部分多様体で，m が偶数であるとする．このとき，不等式

$$\mathrm{nul}(M)\geq 2\left(n-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m}{2}+1\right)$$

が成り立つ．さらに等号は $M = \mathbb{C}P^{\frac{m}{2}}$（全測地的）のときに限る．

Proof:　不等式は Corollary 4.7 より従う．そこで，以下，等号が成立している場合を考える．

この場合，Lemma 4.6 (1) から $h = \dfrac{m}{2}(\Leftrightarrow r = 0)$，即ち，$M$ は複素部分多様体である．(4.2) より $T_oM = \mathfrak{m} = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_h$ としてよい．また，(4.5) より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\Psi_2|\mathfrak{u}(n) &= \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \middle| S \in \mathfrak{u}(h), T \in \mathfrak{u}(n-h) \right\} \\ &\cong \mathfrak{u}(h) \oplus \mathfrak{u}(n-h).\end{aligned}$$

そこで，Lie 部分環として自然に $\mathfrak{u}(h) \oplus \mathfrak{u}(n-h) \subset \mathfrak{u}(n) \subset \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n) \subset \mathfrak{u}(n+1)$ とみたとき，$\mathfrak{u}(h)$ で生成される $U(n+1)$ の Lie 部分群を U_h とかくことにすれば，

$$U_h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-h} \end{pmatrix} \middle| \; u \in U(h) \right\}.$$

である．ここで，I_k は k次の単位行列を表す．

Claim 4.9.　$\mathrm{nul}(M) = 2\left(n - \dfrac{m}{2}\right)\left(\dfrac{m}{2} + 1\right)$ ならば，U_h は M を不変にする．

実際，$Z \in \mathfrak{u}(n)$ に対し $\Psi_1(Z) = 0, \Psi_2(Z) = 0$ が成り立つから，(3.3) より $\Phi_o(Z^{*NM}) = 0$．ところが，退化次数の条件から Φ_o は単射なので $Z^{*NM} = 0$. 即ち，Z^* は M 上 M に接している．ゆえに，$U_h(M) \subset M$.

さて，U_h の $\mathfrak{m}$ への線形イソトロピー作用は $U(h)$ の $\mathbb{C}^h$ への自然な作用であるから，$\mathfrak{m}$ の単位球面に推移的である．一方，Claim 4.9 により，U_h は $\mathbb{C}P^n, M$ の両方に等長変換として作用する．よって，$X, Y \in \mathfrak{m}, \|X\| = \|Y\| = 1$ ならば $B(X,X) = B(Y,Y)$ となるが，M は極小なので $B = 0$, 即ち，M は全測地的である．∎

全く同様にして次も証明できる:

THEOREM 4.10. M を $\mathbb{C}P^n$ の n 次元コンパクト極小 CR 部分多様体で，n が奇数であるとする．このとき，不等式

$$\mathrm{nul}(M) \geq \frac{n(n+3)}{2}$$

が成り立つ．さらに等号は $M = \mathbb{R}P^n$（全測地的）のときに限る．□

この様に，次元が上の 2 つの場合には退化次数最小のコンパクト極小 CR 部分多様体を決定することができる．実は，残りの "m が奇数で $m \neq n$ "の場合も Corollary 4.7 で得られた評価がシャープであるのが解る．次の節で等号を実現する例を挙げる．

§5. 本節では以下の記号を使う: M を $\tilde{M}$ の極小部分多様体とするとき，

Δ_M: M の（非負）Laplacian,
$E(\lambda; \Delta_M)$: Δ_M の λ-固有空間,
$N(M, \tilde{M})$: $M \to \tilde{M}$ の法バンドル,
$\nabla^{N(M,\tilde{M})}$: $N(M, \tilde{M})$ の法接続,
$\Delta^{N(M,\tilde{M})}$: $\nabla^{N(M,\tilde{M})}$ に関する粗 Laplacian,
$\mathfrak{J}_{M,\tilde{M}}$: $M \to \tilde{M}$ の Jacobi 作用素,
$\mathrm{nul}(M, \tilde{M})$: $M \to \tilde{M}$ の退化次数,
$\mathrm{ind}(M, \tilde{M})$: $M \to \tilde{M}$ の指数.

さて，$p + q = l - 1$ なる 0 以上の整数 p, q に対して $r_p = \dfrac{2p+1}{2l}, r_q = \dfrac{2q+1}{2l}$ とおくとき，$\mathbb{C}P^l$ のコンパクト極小実超曲面 $M^{\mathbb{C}}_{p,q}$ が次の図式により定義された:

$$\begin{array}{ccc} S^{2p+1}(r_p) \times S^{2q+1}(r_q) & \longrightarrow & S^{2l+1}(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^{\mathbb{C}}_{p,q} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^l. \end{array}$$

ここで，$S^1(1) \to S^{2l+1}(1) \to \mathbb{C}P^l$ は Hopf ファイブレーションである．

$\mathbb{C}P^l \subset \mathbb{C}P^n$ を全測地的な埋め込みとするとき，$M^{\mathbb{C}}_{p,q}$ は自然に $\mathbb{C}P^n$ の極小部分多様体と考えられる．その退化次数を計算するのがこの節の目的である．結果は次の様になる:

PROPOSITION 5.1. $m=2l-1$ とおくと,

$$\mathrm{nul}(M^{\mathbb{C}}_{p,q}, \mathbb{C}P^n) = 2(p+1)(q+1) + 2\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\left(n-\frac{m+1}{2}\right).$$

PROOF: まず, $S_{p,q} = S^{2p+1}(r_p) \times S^{2q+1}(r_q)$ とおくと, 各法空間 $N_z(S_{p,q}, S^{2n+1}), z \in S_{p,q}$ は Riemann 沈め込み $S^{2n+1} \to P^n\mathbb{C}$ に関して水平であるから, 自然に $N_z(S_{p,q}, S^{2n+1})$ と $N_x(M^{\mathbb{C}}_{p,q}, \mathbb{C}P^n)$ はベクトル空間として同型である. ただし, z は x 上のファイバーの点とする. そこで, $\theta \in \mathbb{R}$ に対し等長写像 $\tau_\theta : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ を $\tau_\theta(z) = ze^{\sqrt{-1}\theta}$ と定義し,

$$\Gamma(N(S_{p,q}, S^{2n+1}))_{S^1} = \{\xi \in \Gamma(N(S_{p,q}, S^{2n+1})) \otimes \mathbb{C} \mid \tau_{\theta *}\xi = \xi,\ \forall\theta \in \mathbb{R}\}$$

とおけば, $\Gamma(N(S_{p,q}, S^{2n+1}))_{S^1}$ と $\Gamma(N(M^{\mathbb{C}}_{p,q}, \mathbb{C}P^n)) \otimes \mathbb{C}$ はベクトル空間として自然に同型である. Jacobi 作用素 $\mathfrak{J}_{M^{\mathbb{C}}_{p,q}, \mathbb{C}P^n}$ は $\Gamma(N(M^{\mathbb{C}}_{p,q}, \mathbb{C}P^n))$ に作用する微分作用素であるが, 我々は, $\mathrm{nul}(M^{\mathbb{C}}_{p,q}, \mathbb{C}P^n)$ を計算するために $\mathfrak{J}_{M^{\mathbb{C}}_{p,q}, \mathbb{C}P^n}$ に対応する $\Gamma(N(S_{p,q}, S^{2n+1}))_{S^1}$ の微分作用素を考える.

$S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}, S^l \subset \mathbb{C}^{l+1}$ とし, ここで, $\mathbb{C}^{l+1} = \mathbb{C}^{l+1} \times \{0\}^{n-l}$ と考える. $\mathbb{C}^{n+1}$ の自然な複素基底 $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), i = 1, \ldots, n+1$ に対し $\nu_k = e_{l+1+k}, \nu_{\bar{k}} = \sqrt{-1}e_{l+1+k}, k, \bar{k} = 1, \ldots, n-l$ とおく. すると, 自然に $\nu_k, \nu_{\bar{k}} \in \Gamma(N(S_{p,q}, S^{2n+1}))$ とみなせる. 一方, $M^{\mathbb{C}}_{p,q} \to \mathbb{C}P^l$ のグローバルな単位法ベクトル場の水平リフトを $\nu_0 \in \Gamma(N(S_{p,q}, S^{2l+1}))$ とかく. このとき, 次が成り立つ:

LEMMA 5.2. $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-l}, \nu_{\bar{1}}, \ldots, \nu_{\overline{n-l}}$ は 法バンドル $N(S_{p,q}, S^{2n+1})$ のフレイムであって, 次を満たしている:

(i) 各 ν_j は法接続 $\nabla^{N(S_{p,q}, S^{2n+1})}$ に関して平行,

(ii) 各 ν_j は Riemann 沈め込み $S^{2n+1} \to P^n\mathbb{C}$ に関して水平,

(iii) $\tau_{\theta *}\nu_0(z) = \nu_0(\tau_\theta(z)),\ \forall z \in S_{p,q},\ \forall\theta \in \mathbb{R}$,

(iv) $\tau_{\theta *}\nu_k(z) = \nu_k(z)e^{\sqrt{-1}\theta},\ \tau_{\theta *}\nu_{\bar{k}}(z) = \nu_{\bar{k}}(z)e^{\sqrt{-1}\theta},\ \forall z \in S_{p,q},\ \forall\theta \in \mathbb{R}$. □

従って, ν_0 以外は $\Gamma(N(S_{p,q}, S^{2n+1}))_{S^1}$ の元ではないが,

$$C^\infty(S_{p,q})_{S^1} = \{f \in C^\infty(S_{p,q}) \otimes \mathbb{C} \mid f(ze^{\sqrt{-1}\theta}) = f(z),\ \forall z \in S_{p,q}, \forall\theta \in \mathbb{R}\},$$
$$C^\infty(S_{p,q})^{S^1} = \{f \in C^\infty(S_{p,q}) \otimes \mathbb{C} \mid f(ze^{\sqrt{-1}\theta}) = f(z)e^{\sqrt{-1}\theta},\ \forall z \in S_{p,q}, \forall\theta \in \mathbb{R}\},$$

とおけば，Lemma 5.2, (iii), (iv) により $\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1}$ は次の様に記述される:

$$\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1}=\Big\{\xi=f_0\nu_0+\sum f_k\nu_k+\sum f_{\bar{k}}\nu_{\bar{k}}\in\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))\otimes\mathbf{C}$$
$$\Big|\ f_0\in C^\infty(S_{p,q})_{S^1},f_k,f_{\bar{k}}\in C^\infty(S_{p,q})^{S^1},k,\bar{k}=1,\ldots,n-l\Big\}.$$

次に，Jacobi 作用素 $\mathfrak{J}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}$ の $\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1}$ への持ち上げを計算しよう．V を Riemann 沈め込み $S^{2n+1}\longrightarrow\mathbf{C}P^n$ に関する垂直単位ベクトル場とする．これは，$V(z)=\sqrt{-1}z$, $z\in S^{2n+1}$ と定義される．

Lemma 5.3. $\xi\in\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1}$ に対し，次が成り立つ:

(i) $\nabla_V^{N(S_{p,q},S^{2n+1})}\xi=\sqrt{-1}(\xi-\langle\xi,\ \nu_0\rangle\nu_0)$,

(ii) $\nabla_V^{N(S_{p,q},S^{2n+1})}\nabla_V^{N(S_{p,q},S^2n+1)}\xi=-(\xi-\langle\xi,\ \nu_0\rangle\nu_0)$. □

$\Gamma(N(M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n))$ の作用素 L に対し，対応する $\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1}$ の作用素を $\widehat{L}$ とかく．即ち，$\widehat{L}$ は可換な図式

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1} & \xrightarrow{\widehat{L}} & \Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1}\\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong\\ \Gamma(N(M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n)) & \xrightarrow[L]{} & \Gamma(N(M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n))\end{array}$$

により定義される．$\widehat{L}$ を L のリフトと呼ぶ．Lemma 5.5 は粗 Laplacian $\Delta^{N(M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n)}$ のリフトの計算に使われる:

Lemma 5.4. $\Delta^{N(M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n)},\mathcal{R}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}$ および $\mathcal{A}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}$ のリフトは次で与えられる:

(i) $\widehat{\Delta}^{N(M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n)}\xi=\Delta^{N(S_{p,q},S^{2n+1})}\xi+\xi-\langle\xi,\ \nu_0\rangle\nu_0$,

(ii) $\widehat{\mathcal{R}}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}(\xi)=-(2l-1)\xi-3\langle\xi,\ \nu_0\rangle\nu_0$,

(iii) $\widehat{\mathcal{A}}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}(\xi)=2(l-1)\langle\xi,\ \nu_0\rangle\nu_0$, $\qquad\xi\in\Gamma(N(S_{p,q},S^{2n+1}))_{S^1}$. □

従って，Jacobi 作用素 $\mathfrak{J}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}$ のリフトは次の様になるのが解った:

$$\widehat{\mathfrak{J}}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}\xi = -\Delta^{N(S_{p,q},S^{2n+1})}\xi - 2l(\xi + \langle \xi,\ \nu_0\rangle \nu_0). \tag{5.5}$$

さて，Lemma 5.2, (i) より， $f \in C^\infty(S_{p,q})$ に対し

$$-\Delta^{N(S_{p,q},S^{2n+1})}(f\nu_\alpha) = (\Delta_{S_{p,q}} f)\nu_\alpha$$

となるので, (5.5) より $\xi = f_0\nu_0 + \sum f_k\nu_k + \sum f_{\bar{k}}\nu_{\bar{k}} \in \Gamma(N(S_{p,q}, S^{2n+1}))_{S^1}$ に対し

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{J}}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n}\xi &= \left(\Delta_{S_{p,q}} f_0 - 4lf_0\right)\nu_0 \\ &\quad + \sum_{k,\bar{k}} \left\{ \left(\Delta_{S_{p,q}} f_k - 2lf_k\right)\nu_k + \left(\Delta_{S_{p,q}} f_{\bar{k}} - 2lf_{\bar{k}}\right)\nu_{\bar{k}} \right\}\end{aligned}$$

と計算される．故に,

$$\begin{aligned} E(\lambda;\Delta_{S^{p,q}})_{S^1} &= E(\lambda;\Delta_{S^{p,q}}) \otimes \mathbf{C} \cap C^\infty(S_{p,q})_{S^1}, \\ E(\lambda;\Delta_{S^{p,q}})^{S^1} &= E(\lambda;\Delta_{S^{p,q}}) \otimes \mathbf{C} \cap C^\infty(S_{p,q})^{S^1}\end{aligned}$$

とおけば，同型 Ker $\widehat{\mathfrak{J}}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n} \cong E(4l;\Delta_{S^{p,q}})_{S^1} \oplus \left(E(2l;\Delta_{S^{p,q}})^{S^1}\right)^{2(n-l)}$ が成り立つ．$\Delta_{S_{p,q}}$ のスペクトルを調べることにより

$$\dim_{\mathbf{C}} E(4l;\Delta_{S^{p,q}})_{S^1} = 2(p+1)(q+1), \quad \dim_{\mathbf{C}} E(2l;\Delta_{S^{p,q}})^{S^1} = l+1$$

が解るから,

$$\begin{aligned}\mathrm{nul}(M^{\mathbf{C}}_{p,q}, \mathbf{C}P^n) &= \dim \mathrm{Ker}\mathfrak{J}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q}} \\ &= \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Ker}\widehat{\mathfrak{J}}_{M^{\mathbf{C}}_{p,q},\mathbf{C}P^n} \\ &= 2(p+1)(q+1) + 2\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\left(n - \frac{m+1}{2}\right).\end{aligned}$$

よって，Proposition 5.1 が証明された．∎

Remark 5.6. $M^{\mathbf{C}}_{p,q} \to \mathbf{C}P^n$ の指数も同様に計算される．結果は

$$\mathrm{ind}(M^{\mathbf{C}}_{p,q}, \mathbf{C}P^n) = 2(n-l)+1 = \mathrm{codim}(M^{\mathbf{C}}_{p,q}, \mathbf{C}P^n).$$

さて，Proposotion 5.1 で特に $p = 0, q = l-1 = \dfrac{m-1}{2}$ ならば，退化次数は

$$\mathrm{nul}(M^{\mathbf{C}}_{0,\frac{m-1}{2}}, \mathbf{C}P^n) = m+1+2\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\left(n-\frac{m+1}{2}\right)$$

となる．この値は，Corollary 4.7 で得られた退化次数の評価の下限に等しい．この様に，次元 m が奇数で $m \neq n$ なる $\mathbf{C}P^n$ のコンパクト極小 CR 部分多様体というクラスの中では，$M^{\mathbf{C}}_{0,\frac{m-1}{2}}$ の退化次数は最小である．そこで，残された問題は，

そのクラスの中で，退化次数最小のものは $M^{\mathbf{C}}_{0,\frac{m-1}{2}}$ にかぎるか?

となった．

ごく最近，この問題を肯定的に解決することができた．複素射影空間の CR 部分多様体に対する一種の余次元還元定理 (codimennsion reduction Theorem) を導くのが 1 つの鍵である．詳細についての報告は別の機会に譲る．

References

1. Y.Kimura, *The nullity of compact Kähler submanifolds in a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 561–580.
2. T.Gotoh, *The nullity of compact minimal real hypersurfaces in a complex projective space*, Tokyo J. Math. **17** (1994), 201–209.
3. Y.Ohnita, *Stable minimal submanifolds in compact rank one symmetric spaces*, Tôhoku Math. J. **38** (1986), 199–217.
4. ———, *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*, Compositio Math. **64** (1897), 157–189.
5. J.Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. Math. **88** (1968), 62–105.